# Marches branchantes
# sur l’arbre binaire de recherche

Eric Fekete

LMV - université de Versailles

ALEA 2007 - Luminy

# Définition 1: L'ABR

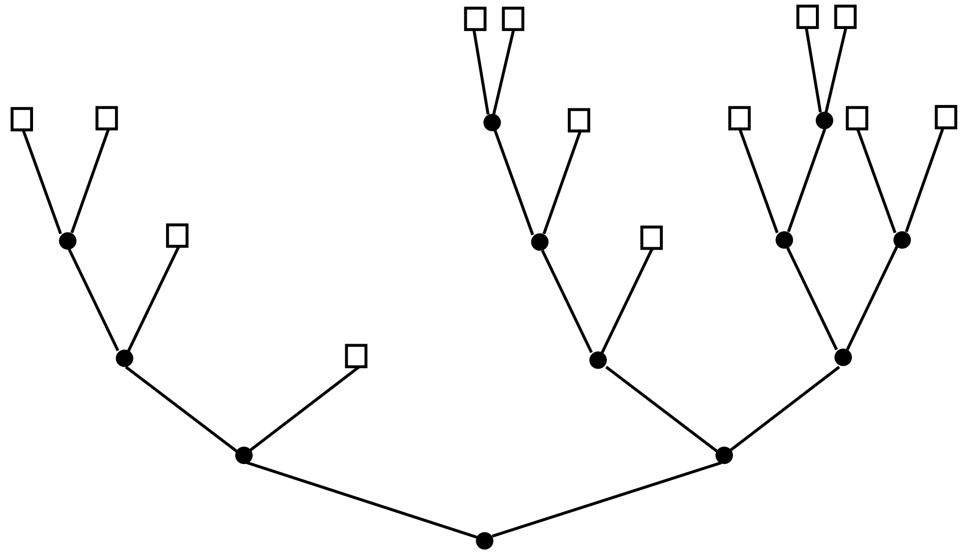
Un processus $(\mathcal{T}_n)_{n\geq 0}$ d'arbres binaires de recherche est un processus d'arbres binaires complets à $n$ nœuds internes tel que :

- $\mathcal{T}_0$ est une feuille.
- Sachant $\mathcal{T}_n$, on obtient $\mathcal{T}_{n+1}$ en piochant uniformément une des $n+1$ feuilles de $\mathcal{T}_n$ et en la remplaçant par un nœud interne et ses deux feuilles.

# *Définition 1: L'ABR*

Un processus $(\mathcal{T}_n)_{n\geq 0}$ d'arbres binaires de recherche est un processus d'arbres binaires complets à $n$ nœuds internes tel que :

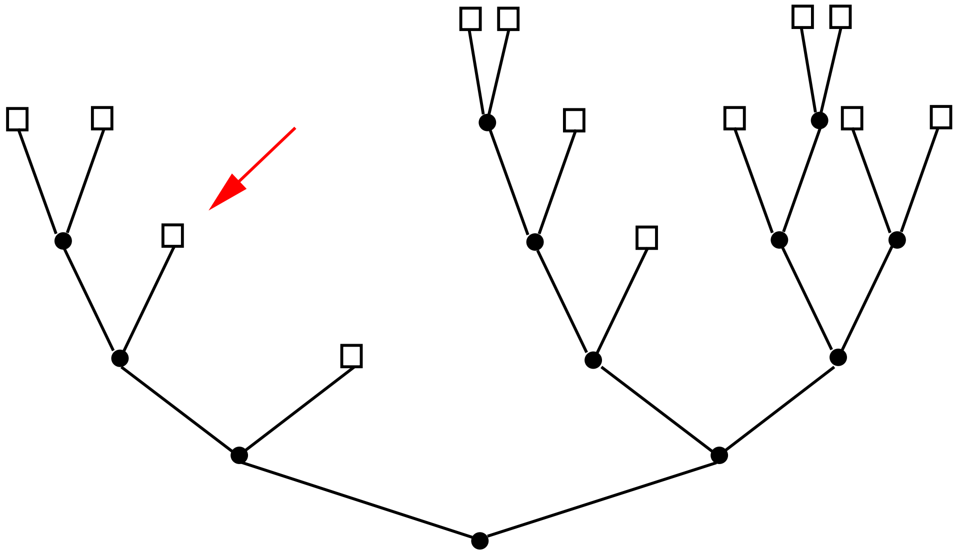
- $\mathcal{T}_0$ est une feuille.
- Sachant $\mathcal{T}_n$, on obtient $\mathcal{T}_{n+1}$ en piochant uniformément une des $n+1$ feuilles de $\mathcal{T}_n$ et en la remplaçant par un nœud interne et ses deux feuilles.



# Définition 1: L'ABR

Un processus $(\mathcal{T}_n)_{n\geq 0}$ d'arbres binaires de recherche est un processus d'arbres binaires complets à $n$ nœuds internes tel que :

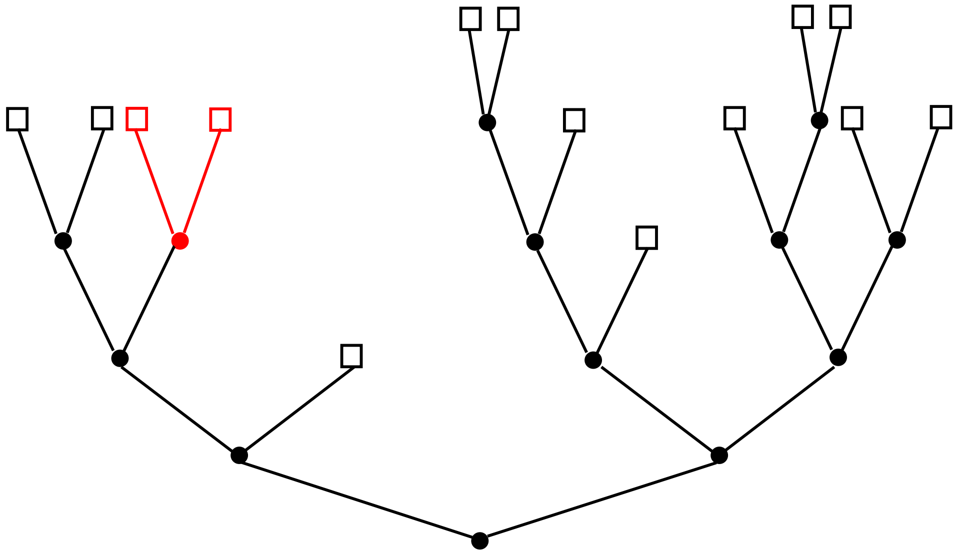
- $\mathcal{T}_0$ est une feuille.
- Sachant $\mathcal{T}_n$, on obtient $\mathcal{T}_{n+1}$ en piochant uniformément une des $n+1$ feuilles de $\mathcal{T}_n$ et en la remplaçant par un nœud interne et ses deux feuilles.



# Définition 1: L'ABR

Un processus $(\mathcal{T}_n)_{n\geq 0}$ d'arbres binaires de recherche est un processus d'arbres binaires complets à $n$ nœuds internes tel que :

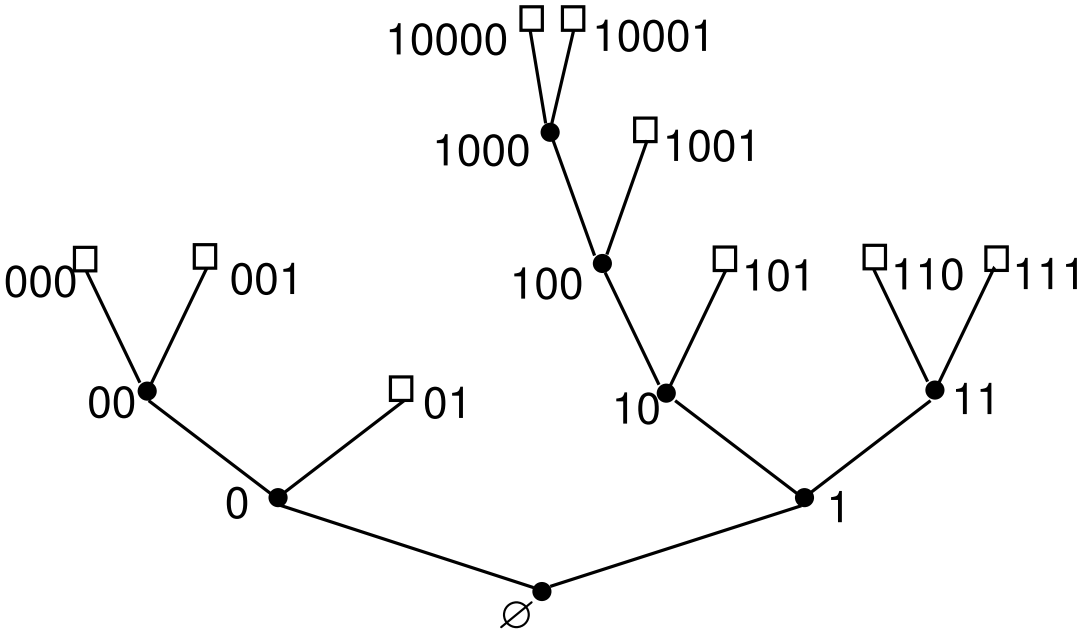
- $\mathcal{T}_0$ est une feuille.
- Sachant $\mathcal{T}_n$, on obtient $\mathcal{T}_{n+1}$ en piochant uniformément une des $n+1$ feuilles de $\mathcal{T}_n$ et en la remplaçant par un nœud interne et ses deux feuilles.



# *Quelques remarques*

- Cette dynamique induit une loi sur les arbres binaires de taille $n$.
- Un arbre binaire complet est un sous-ensemble de $\mathbb{U} := \varnothing \cup \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, vérifiant :

$$\begin{cases} \varnothing \in \mathcal{T}, \\ \forall (u,v) \in \mathbb{U}^2, \quad \text{si } uv \in \mathcal{T} \text{ alors } u \in \mathcal{T}\ , \\ \forall u \in \mathbb{U}\ \ , u1 \in \mathcal{T} \Leftrightarrow u0 \in \mathcal{T}. \end{cases}$$



# *Quelques remarques*

- Cette dynamique induit une loi sur les arbres binaires de taille $n$.
- Un arbre binaire complet est un sous-ensemble de $\mathbb{U} := \varnothing \cup \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, vérifiant :

# *Quelques remarques*

- Cette dynamique induit une loi sur les arbres binaires de taille $n$.
- Un arbre binaire complet est un sous-ensemble de $\mathbb{U} := \varnothing \cup \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, vérifiant :
- **Louchard 87**: Soit $u_n$ un nœud choisi uniformément dans un ABR de taille $n$, on a alors

$$\frac{|u_n| - 2\log n}{\sqrt{2\log n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

- **Mahmoud et Neininger 03**: Soient $u_n$ et $v_n$ deux nœuds internes choisis uniformément dans un ABR de taille $n$, on a alors

$$\frac{\Delta_{u_n,v_n} - 4\log n}{\sqrt{4\log n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

# *Définition 2: Marches branchantes*

Soit $\mathcal{T}_n$ un ABR de taille $n$.
À tout nœud $u$ de l'arbre on associe une variable aléatoire réelle $X_u$.
$\forall u$ de $\mathcal{T}_n$, on note $Y_u := (Y_u(j))_{j\in\{0\cdots|u|\}}$ la marche aléatoire, arrêtée en $|u|$, définie par :

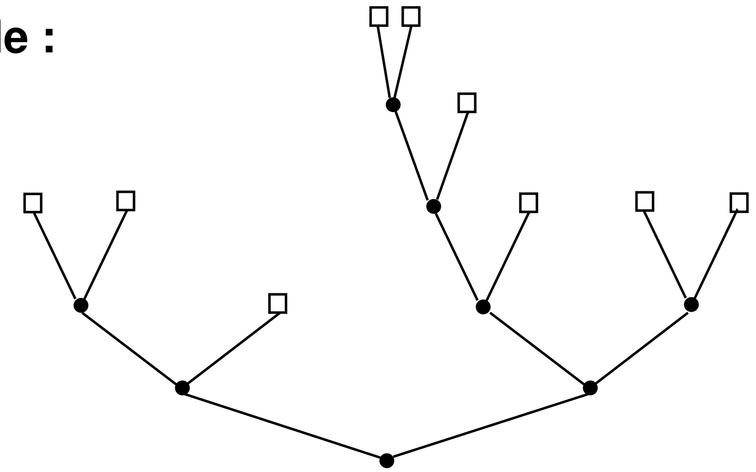
$$Y_u(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall j \in \{1\cdots|u|\} \quad Y_u(j) = \sum_{v<<u;|v|\leq j} X_v.$$

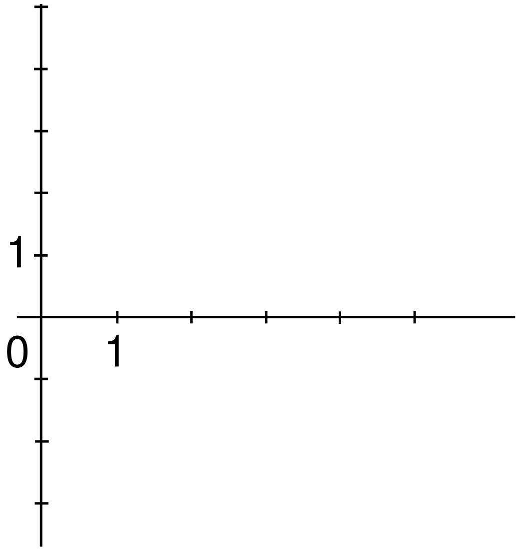
# Définition 2: Marches branchantes

Soit $\mathcal{T}_n$ un ABR de taille $n$.
À tout nœud $u$ de l'arbre on associe une variable aléatoire réelle $X_u$.
$\forall u$ de $\mathcal{T}_n$, on note $Y_u := (Y_u(j))_{j\in\{0\cdots|u|\}}$ la marche aléatoire, arrêtée en $|u|$, définie par :

$$Y_u(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall j \in \{1 \cdots |u|\} \quad Y_u(j) = \sum_{v<<u;|v|\leq j} X_v.$$

**Exemple :**



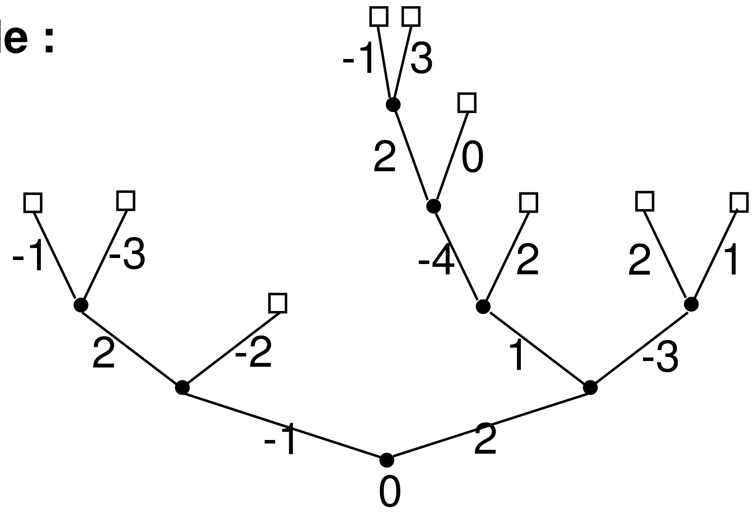


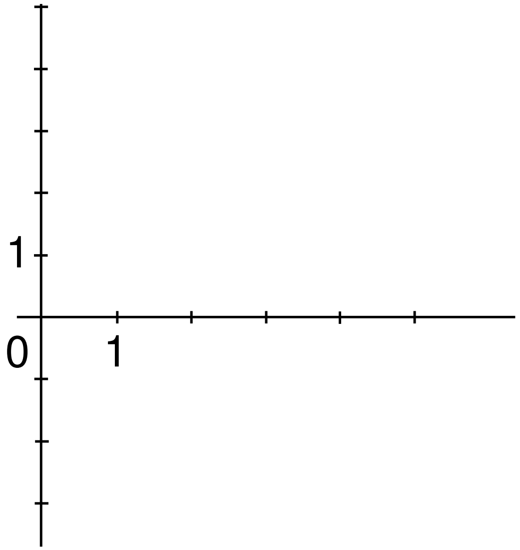
# *Définition 2: Marches branchantes*

Soit $\mathcal{T}_n$ un ABR de taille $n$.
À tout nœud $u$ de l'arbre on associe une variable aléatoire réelle $X_u$.
$\forall u$ de $\mathcal{T}_n$, on note $Y_u := (Y_u(j))_{j\in\{0\cdots|u|\}}$ la marche aléatoire, arrêtée en $|u|$, définie par :

$$Y_u(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall j \in \{1\cdots|u|\} \quad Y_u(j) = \sum_{v<<u;|v|\leq j} X_v.$$

**Exemple :**



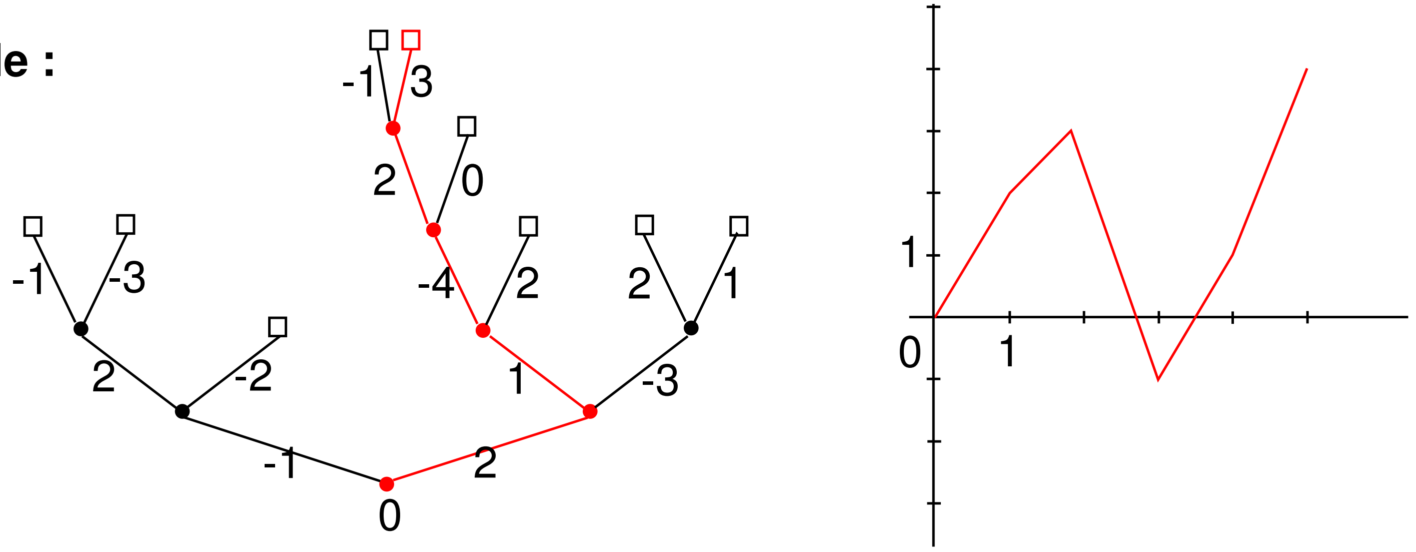



# Définition 2: Marches branchantes

Soit $\mathcal{T}_n$ un ABR de taille $n$.
À tout nœud $u$ de l'arbre on associe une variable aléatoire réelle $X_u$.
$\forall u$ de $\mathcal{T}_n$, on note $Y_u := (Y_u(j))_{j\in\{0\cdots|u|\}}$ la marche aléatoire, arrêtée en $|u|$, définie par :

$$Y_u(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall j \in \{1\cdots|u|\} \quad Y_u(j) = \sum_{v<<u;|v|\leq j} X_v.$$

**Exemple :**

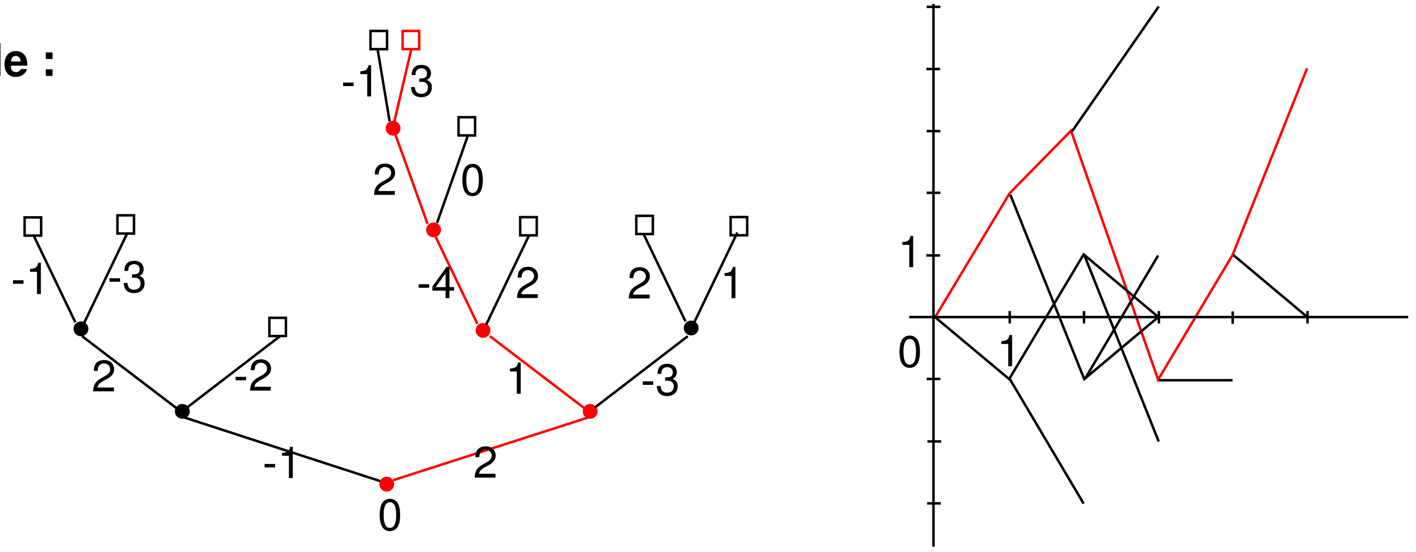


# *Définition 2: Marches branchantes*

Soit $\mathcal{T}_n$ un ABR de taille $n$.
À tout nœud $u$ de l'arbre on associe une variable aléatoire réelle $X_u$.
$\forall u$ de $\mathcal{T}_n$, on note $Y_u := (Y_u(j))_{j\in\{0\cdots|u|\}}$ la marche aléatoire, arrêtée en $|u|$, définie par :

$$Y_u(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall j \in \{1\cdots|u|\} \quad Y_u(j) = \sum_{v<<u;|v|\leq j} X_v.$$

**Exemple :**




On appelle **marche aléatoire branchante** sur $\mathcal{T}_n$, l'ensemble $\mathbf{Y} := \{Y_u;\ u \in \mathcal{T}_n\}$.

# *Hypothèses 1*

On s'intéresse à la mesure d'occupation de $\mathbf{Y}$, définie par

$$\sum_{u \in \mathcal{T}_n} \delta_{Y_u(|u|)}$$

# *Hypothèses 1*

On s'intéresse à la mesure d'occupation de $\mathbf{Y}$, définie par

$$\sum_{u \in \mathcal{T}_n} \delta_{Y_u(|u|)}$$

On note **(H1)** les hypothèses suivantes:

- La famille $((X_{u0}, X_{u1}))_{u \in \mathcal{T}_n \setminus \partial \mathcal{T}_n}$ est une famille de v.a. **indépendantes.**
- $\forall u \in \mathcal{T}_n$, $u \neq \varnothing$, $X_u$ est de loi $\nu$ fixée ($X_\varnothing = 0$).
  $m_\nu \in \mathbb{R}$ et $\sigma_\nu^2 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ sont l'espérance et la variance de $X_u$.
- La loi $\nu$ est dans le domaine d'attraction d'une loi stable $\mu$, d'indice $\alpha \in ]1, 2]$.

# Loi stables

Une loi $\nu$ est dans le domaine d'attraction d'une loi stable $\mu$, s'il existe deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\frac{\sum X_i - b_n}{a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mu$$

# *Loi stables*

Une loi $\nu$ est dans le domaine d'attraction d'une loi stable $\mu$, s'il existe deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\frac{\sum X_i - b_n}{a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mu$$

**Remarques :** $\alpha$ étant l'indice de $\mu$, on a

- $a_n = L_n \times n^{\frac{1}{\alpha}}$ où $L_n$ est une suite à variations lentes.
- $b_n = n \times m_\nu$.

# Loi stables

Une loi $\nu$ est dans le domaine d'attraction d'une loi stable $\mu$, s'il existe deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\frac{\sum X_i - b_n}{a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mu$$

**Remarques :** $\alpha$ étant l'indice de $\mu$, on a

- $a_n = L_n \times n^{\frac{1}{\alpha}}$ où $L_n$ est une suite à variations lentes.
- $b_n = n \times m_\nu$.
- Si $\alpha = 2$, $\mu$ est une loi normale centrée.
- Si $\alpha = 2$ et $\sigma_\nu^2 < +\infty$, alors on pose $L_n \equiv 1$, et donc $\mu \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\nu^2)$.
- Si $\alpha = 2$ et $\sigma_\nu^2 = +\infty$, alors $L_n \to +\infty$.

# Théorème 1

Soit la mesure d'occupation renormalisée : $\boxed{\mu_n := \frac{1}{2n+1} \sum_{u \in \mathcal{T}_n} \delta_{\frac{Y_u(|u|) - \beta_n}{\alpha_n}}}$

où $\alpha_n := a_{2\log n} = L_{2\log_n} \times (2\log n)^{\frac{1}{\alpha}}$ et $\beta_n := b_{2\log n} = 2m_\nu \log n$.

# Théorème 1

Soit la mesure d'occupation renormalisée : $$\boxed{\mu_n := \frac{1}{2n+1}\sum_{u\in\mathcal{T}_n}\delta_{\frac{Y_u(|u|)-\beta_n}{\alpha_n}}}$$

où $\alpha_n := a_{2\log n} = L_{2\log_n} \times (2\log n)^{\frac{1}{\alpha}}$ et $\beta_n := b_{2\log n} = 2m_\nu \log n$.

**Théorème 1:** Sous **(H1)** on a

- Si $\alpha \in ]1,2[$ ou si $\alpha = 2$ et $\sigma_\nu^2 = +\infty$, alors

$$\mu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{proba} \mu,$$

- Si $\alpha = 2$ et $\sigma_\nu^2 < +\infty$, alors

$$\mu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{proba} \mathcal{N}(0, m_\nu^2 + \sigma_\nu^2),$$

dans l'espace des mesures de probabilités muni de la topologie de la convergence faible.

**Remarque:** La limite est déterministe dans les deux cas. On la note $\mu_{\infty,\nu}$.

# *Hypothèses 2 - Théorème 2*

On note **(H2)** les hypothèses suivantes :

- $((X_{u0}, X_{u1}))_{u\in\mathcal{T}_n\setminus\partial\mathcal{T}_n}$ est une famille de v.a.**indépendantes.**
- Pour tout nœud $u$ de $\mathcal{T}_n\setminus\partial\mathcal{T}_n$, $X_{u0}$ a pour loi $\nu_0$ et $X_{u1}$ a pour loi $\nu_1$.
- La loi $\frac{1}{2}\nu_0 + \frac{1}{2}\nu_1$ est dans le domaine d'attraction de la loi $\mu$.

# *Hypothèses 2 - Théorème 2*

On note **(H2)** les hypothèses suivantes :

- $((X_{u0}, X_{u1}))_{u \in \mathcal{T}_n \setminus \partial \mathcal{T}_n}$ est une famille de v.a.**indépendantes.**
- Pour tout nœud $u$ de $\mathcal{T}_n \setminus \partial \mathcal{T}_n$, $X_{u0}$ a pour loi $\nu_0$ et $X_{u1}$ a pour loi $\nu_1$.
- La loi $\frac{1}{2}\nu_0 + \frac{1}{2}\nu_1$ est dans le domaine d'attraction de la loi $\mu$.

**Théorème 2:** Sous les hypothèses **(H2)** on a

$$\mu_n \xrightarrow[n \to +\infty]{proba} \mu_{\infty, \frac{1}{2}\nu_0 + \frac{1}{2}\nu_1},$$

dans l'espace des mesures de probabilités muni de la topologie de la convergence faible.

# Application 1: Les arbres récursifs

Un processus $(\mathbb{T}_n)_{n\geq 1}$ d'arbres récursifs est un processus d'arbres planaires à $n$ nœuds tel que:

- $\mathbb{T}_1$ est l'arbre à un nœud.
- Sachant $\mathbb{T}_n$, on obtient $\mathbb{T}_{n+1}$ en choisissant uniformément un des $n$ nœuds de $\mathcal{T}_n$ et en lui ajoutant un fils à droite.

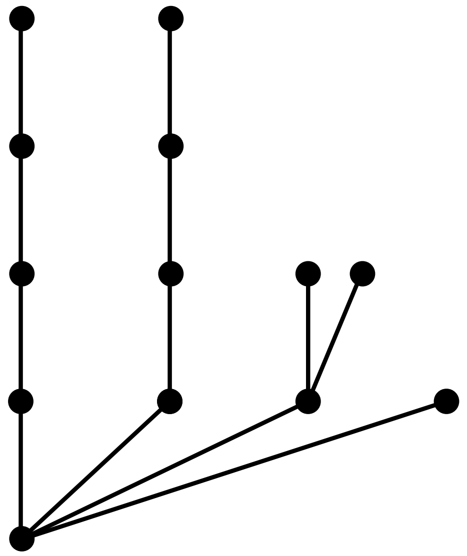
**Exemple :**

# *Application 1: Les arbres récursifs*

Un processus $(\mathbb{T}_n)_{n\geq 1}$ d'arbres récursifs est un processus d'arbres planaires à $n$ nœuds tel que:

- $\mathbb{T}_1$ est l'arbre à un nœud.
- Sachant $\mathbb{T}_n$, on obtient $\mathbb{T}_{n+1}$ en choisissant uniformément un des $n$ nœuds de $\mathcal{T}_n$ et en lui ajoutant un fils à droite.

**Exemple :**

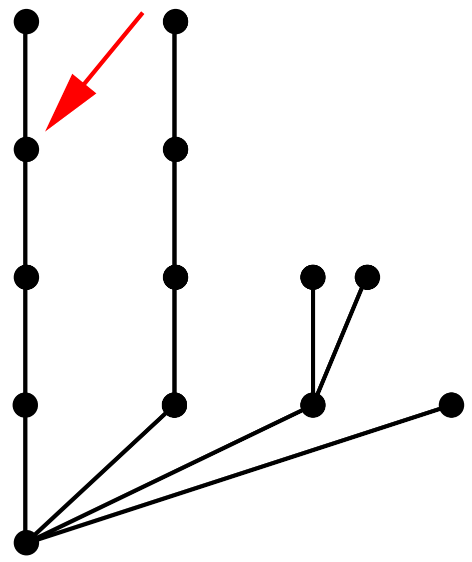


# *Application 1: Les arbres récursifs*

Un processus $(\mathbb{T}_n)_{n\geq 1}$ d'arbres récursifs est un processus d'arbres planaires à $n$ nœuds tel que:

- $\mathbb{T}_1$ est l'arbre à un nœud.
- Sachant $\mathbb{T}_n$, on obtient $\mathbb{T}_{n+1}$ en choisissant uniformément un des $n$ nœuds de $\mathcal{T}_n$ et en lui ajoutant un fils à droite.

**Exemple :**

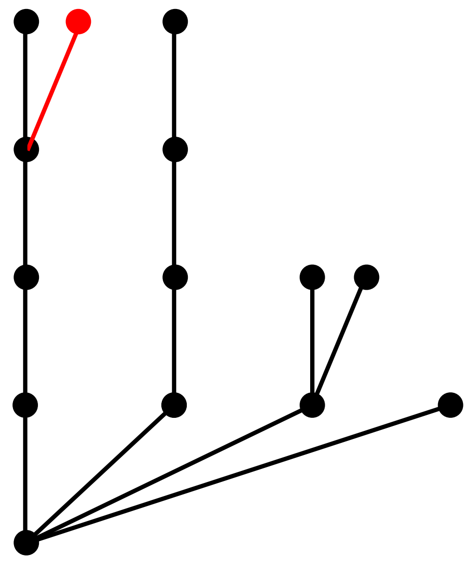


# *Application 1: Les arbres récursifs*

Un processus $(\mathbb{T}_n)_{n\geq 1}$ d'arbres récursifs est un processus d'arbres planaires à $n$ nœuds tel que:

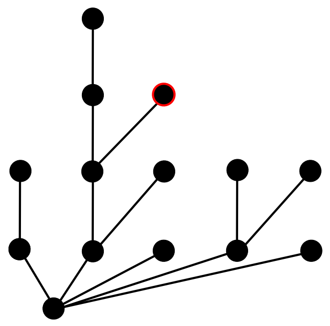
- $\mathbb{T}_1$ est l'arbre à un nœud.
- Sachant $\mathbb{T}_n$, on obtient $\mathbb{T}_{n+1}$ en choisissant uniformément un des $n$ nœuds de $\mathcal{T}_n$ et en lui ajoutant un fils à droite.

**Exemple :**



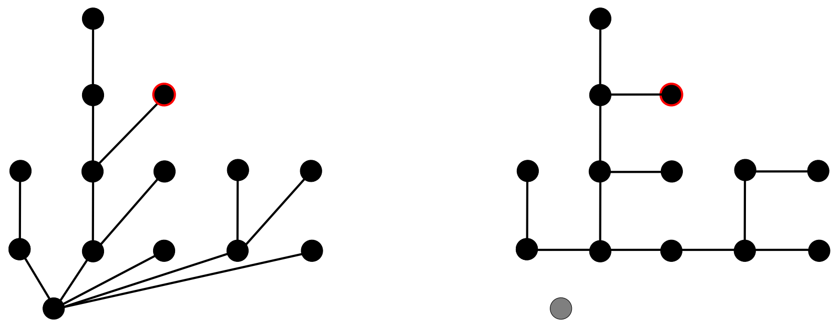
# La rotation

Soit $\Phi$ la bijection de l'ensemble des arbres planaires dans l'ensemble des arbres binaires complets définie par :



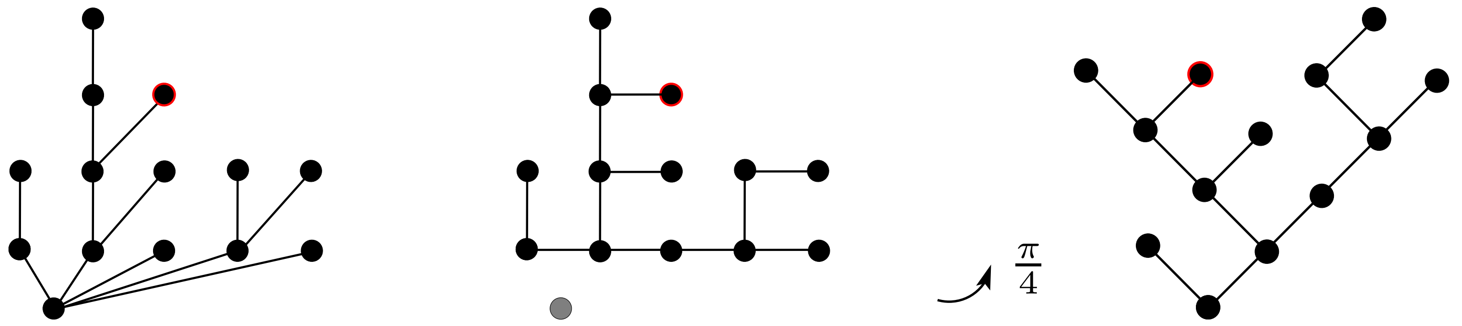
# La rotation

Soit $\Phi$ la bijection de l'ensemble des arbres planaires dans l'ensemble des arbres binaires complets définie par :



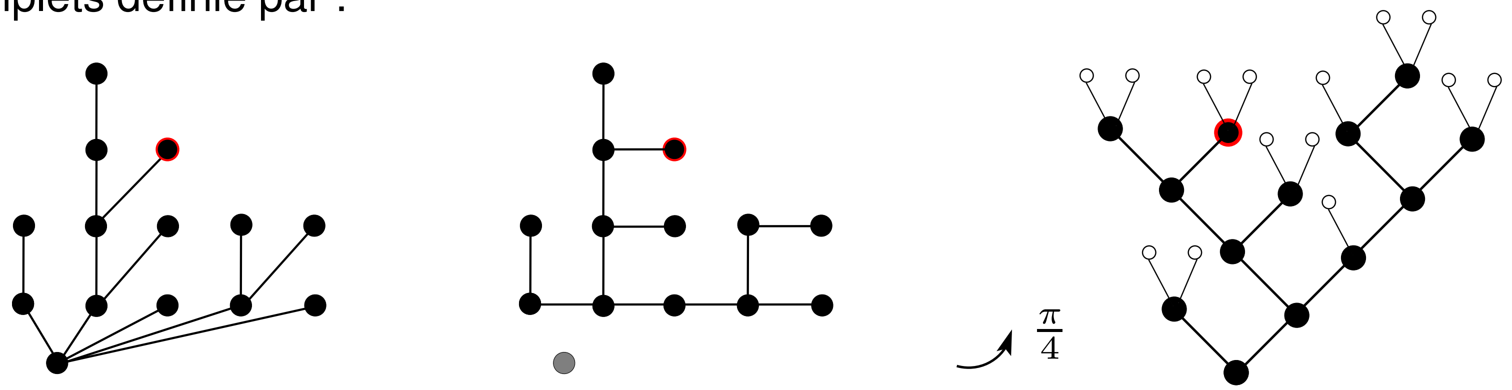
# La rotation

Soit $\Phi$ la bijection de l'ensemble des arbres planaires dans l'ensemble des arbres binaires complets définie par :



# La rotation

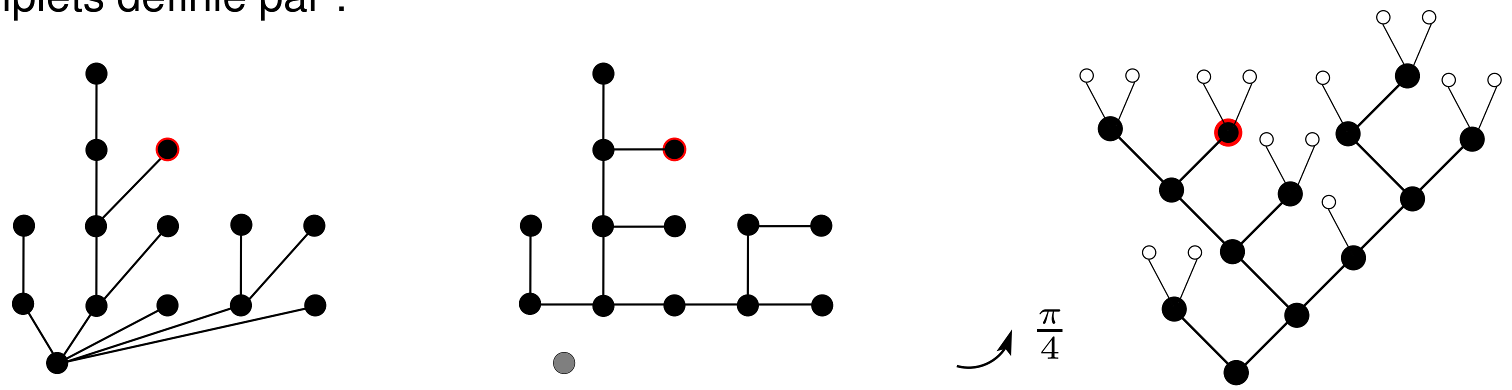
Soit $\Phi$ la bijection de l'ensemble des arbres planaires dans l'ensemble des arbres binaires complets définie par :




La bijection $\Phi$ associe à un arbre planaire à $n$ nœuds, un arbre binaire à $n-1$ nœuds internes.

# *La rotation*

Soit $\Phi$ la bijection de l'ensemble des arbres planaires dans l'ensemble des arbres binaires complets définie par :




La bijection $\Phi$ associe à un arbre planaire à $n$ nœuds, un arbre binaire à $n-1$ nœuds internes.

**Proposition:** Si $(\mathbb{T}_n)_{n\geq 1}$ est un processus d'arbres récursifs, alors $(\Phi(\mathbb{T}_n))_{n\geq 1}$ est un processus d'arbres binaires de recherche.

**Remarque :** La hauteur d'un nœud $u$ dans $\mathbb{T}_n$ est égale à la profondeur à gauche de $\Phi(u)$ dans $\Phi(\mathbb{T}_n)$ plus 1.

# *Profil des arbres récursifs*

Soit $\mathbf{Y}$ la marche branchante sur $\Phi(\mathbb{T}_n)$ dont la loi des incréments est donnée par :

$$\mathbb{P}((X_{u0}, X_{u1}) = (1,0)) = 1 \quad \forall u \in \Phi(\mathbb{T}_n).$$

Soit $X_n(k)$ le nombre de nœuds de l'arbre récursif $\mathbb{T}_n$ à la hauteur $k$.
On a alors

$$X_n(k) = \#\{u \in \Phi(\mathbb{T}_n);\ Y_u(|u|) = k-1\}.$$

# Profil des arbres récursifs

Soit $\mathbf{Y}$ la marche branchante sur $\Phi(\mathbb{T}_n)$ dont la loi des incréments est donnée par :

$$\mathbb{P}((X_{u0}, X_{u1}) = (1,0)) = 1 \quad \forall u \in \Phi(\mathbb{T}_n).$$

Soit $X_n(k)$ le nombre de nœuds de l'arbre récursif $\mathbb{T}_n$ à la hauteur $k$.
On a alors

$$X_n(k) = \#\{u \in \Phi(\mathbb{T}_n);\ Y_u(|u|) = k-1\}.$$

**Théorème 3:** Soit $p_n$ la fonction de répartition empirique du profil de l'arbre récursif $\mathbb{T}_n$ définie par : $p_n(k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} X_n(i)$.

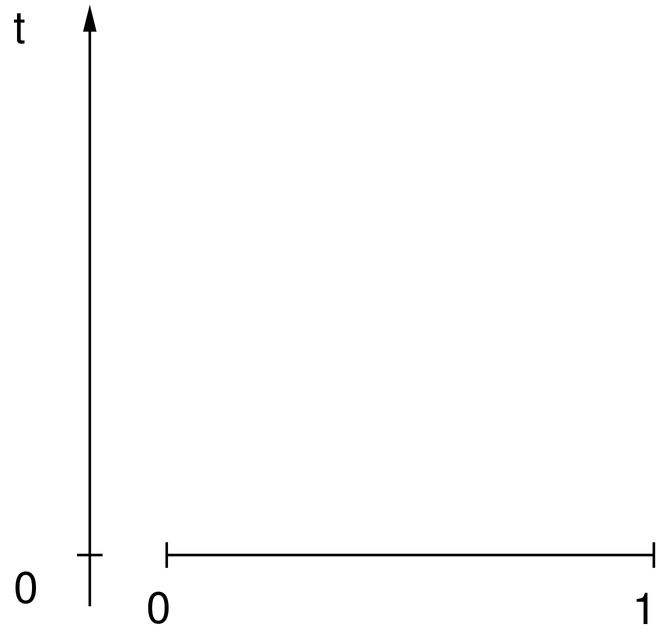
$$\Big(p_n(\lfloor \log n + \lambda\sqrt{2\log n}\rfloor)\Big)_{\lambda\in\mathbb{R}} \xrightarrow[n\to+\infty]{proba} (\mathbb{P}(N \leq \lambda))_{\lambda\in\mathbb{R}}\,,$$

où $N$ est une v.a. de loi $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$.

# Application 2: Les fragmentations homogènes

Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}+}$ la fragmentation de l'intervalle $]0,1[$ définie par :

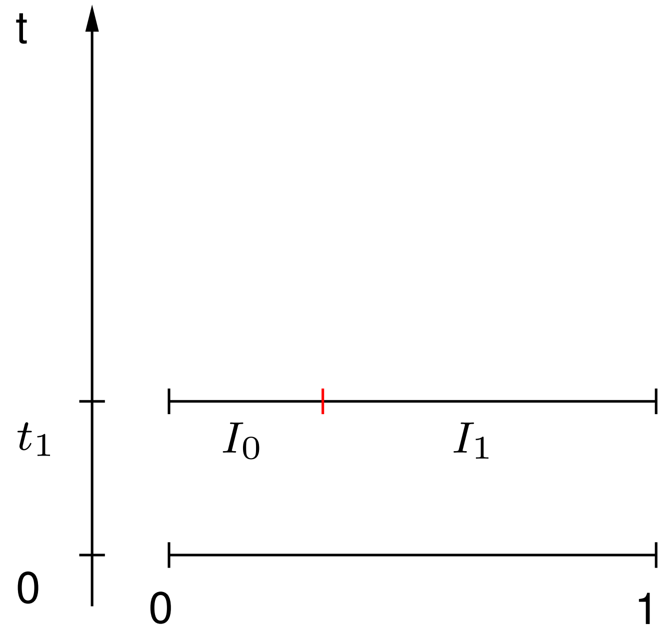
- $\mathcal{F}_0 :=]0,1[$
  et sa durée de vie $t_1$ suit une loi $\mathcal{E}(1)$.



# Application 2: Les fragmentations homogènes

Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}+}$ la fragmentation de l'intervalle $]0,1[$ définie par :

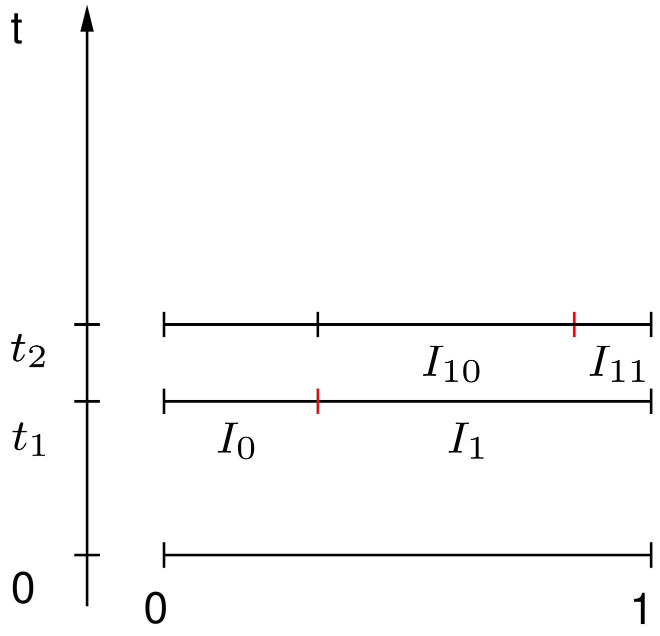
- $\mathcal{F}_0 :=]0,1[$
  et sa durée de vie $t_1$ suit une loi $\mathcal{E}(1)$.
- $\mathcal{F}_{t_1} := (I_0, I_1)$,
  où $|I_0|$ a pour loi $\nu_0$ et $|I_1| = 1 - |I_0|$.
  $I_0$ et $I_1$ ont des durées de vies indép. de lois $\mathcal{E}(1)$.



# Application 2: Les fragmentations homogènes

Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}+}$ la fragmentation de l'intervalle $]0,1[$ définie par :

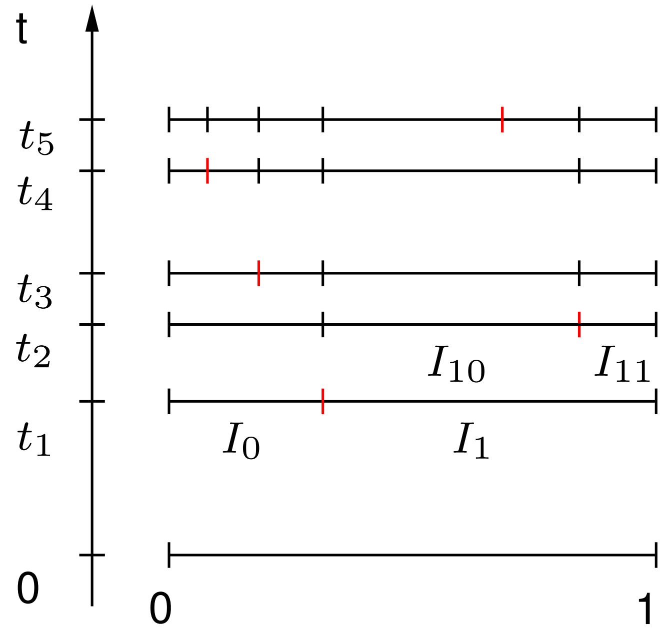
- $\mathcal{F}_0 :=]0,1[$
  et sa durée de vie $t_1$ suit une loi $\mathcal{E}(1)$.
- $\mathcal{F}_{t_1} := (I_0, I_1)$,
  où $|I_0|$ a pour loi $\nu_0$ et $|I_1| = 1 - |I_0|$.
  $I_0$ et $I_1$ ont des durées de vies indép. de lois $\mathcal{E}(1)$.



# Application 2: Les fragmentations homogènes

Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}+}$ la fragmentation de l'intervalle $]0,1[$ définie par :

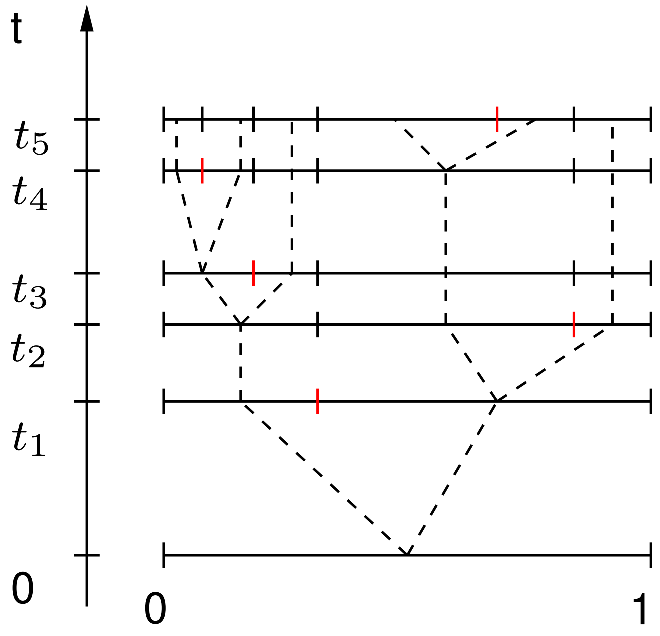
- $\mathcal{F}_0 :=]0,1[$
  et sa durée de vie $t_1$ suit une loi $\mathcal{E}(1)$.
- $\mathcal{F}_{t_1} := (I_0, I_1)$,
  où $|I_0|$ a pour loi $\nu_0$ et $|I_1| = 1 - |I_0|$.
  $I_0$ et $I_1$ ont des durées de vies indép. de lois $\mathcal{E}(1)$.
- Soient $t_n$ l'instant du n-ième saut de $\mathcal{F}_t$ et $I_u$ le fragment qui "saute" à l'instant $t_n$.
  $I_u$ se coupe en deux segments $I_{u0}$ et $I_{u1}$ tels que:
  $|I_{u0}| = Z_u|I_u|$ et $|I_{u1}| = (1 - Z_u)|I_u|$
  où $Z_u$ est de loi $\nu_0$.
  On note $\nu_1$ la loi de $1 - Z_u$.
  Tous les fragments ont des durées de vie indép. de loi $\mathcal{E}(1)$.



# Application 2: Les fragmentations homogènes

Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}+}$ la fragmentation de l'intervalle $]0,1[$ définie par :

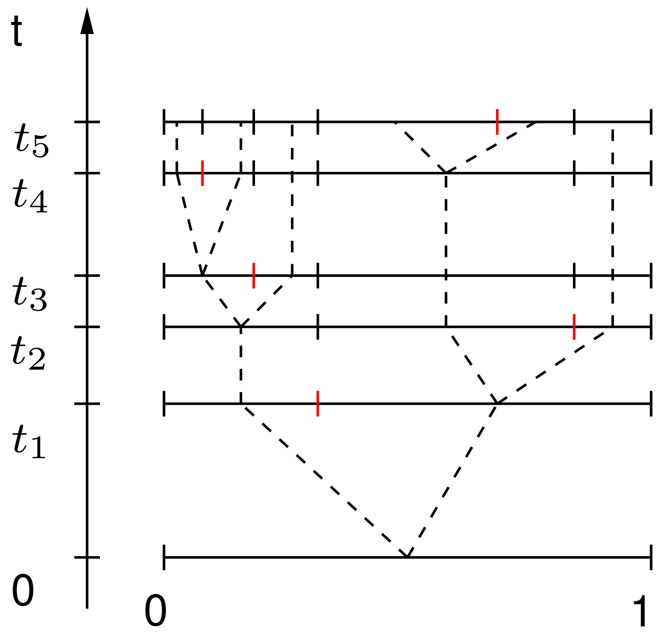
- $\mathcal{F}_0 :=]0,1[$
  et sa durée de vie $t_1$ suit une loi $\mathcal{E}(1)$.
- $\mathcal{F}_{t_1} := (I_0, I_1)$,
  où $|I_0|$ a pour loi $\nu_0$ et $|I_1| = 1 - |I_0|$.
  $I_0$ et $I_1$ ont des durées de vies indép. de lois $\mathcal{E}(1)$.
- Soient $t_n$ l'instant du n-ième saut de $\mathcal{F}_t$ et $I_u$ le fragment qui "saute" à l'instant $t_n$.
  $I_u$ se coupe en deux segments $I_{u0}$ et $I_{u1}$ tels que:
  $|I_{u0}| = Z_u|I_u|$ et $|I_{u1}| = (1 - Z_u)|I_u|$
  où $Z_u$ est de loi $\nu_0$.
  On note $\nu_1$ la loi de $1 - Z_u$.
  Tous les fragments ont des durées de vie indép. de loi $\mathcal{E}(1)$.



# Application 2: Les fragmentations homogènes

Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ la fragmentation de l'intervalle $]0,1[$ définie par :

- $\mathcal{F}_0 :=]0,1[$
  et sa durée de vie $t_1$ suit une loi $\mathcal{E}(1)$.
- $\mathcal{F}_{t_1} := (I_0, I_1)$,
  où $|I_0|$ a pour loi $\nu_0$ et $|I_1| = 1 - |I_0|$.
  $I_0$ et $I_1$ ont des durées de vies indép. de lois $\mathcal{E}(1)$.
- Soient $t_n$ l'instant du n-ième saut de $\mathcal{F}_t$ et $I_u$ le fragment qui "saute" à l'instant $t_n$.
  $I_u$ se coupe en deux segments $I_{u0}$ et $I_{u1}$ tels que:
  $|I_{u0}| = Z_u|I_u|$ et $|I_{u1}| = (1 - Z_u)|I_u|$
  où $Z_u$ est de loi $\nu_0$.
  On note $\nu_1$ la loi de $1 - Z_u$.
  Tous les fragments ont des durées de vie indép. de loi $\mathcal{E}(1)$.




- $\dfrac{t_n}{\log n} \to 1 p.s.$
- Soit $\mathbb{T}_t$ l'arbre binaire défini par :
  $\partial\mathbb{T}_t := \{u, I_u \in \mathcal{F}_t\}$.
  $(\mathbb{T}_{t_n})_{n\geq 0}$ est un processus d'ABR.

# *Taille des fragments*

Soit $\mathbf{Y}$ la marche branchante sur $\mathbb{T}_{t_n}$ dont les incréments vérifient :

$$\forall u \in \mathbb{T}_{t_n}; \quad X_{u0} = -\log(Z_u) \quad \text{et} \quad X_{u1} = -\log(1 - Z_u) \qquad \text{où} \quad Z_u \sim \nu_0$$

On note $\tilde{\nu}_0$ et $\tilde{\nu}_1$ les lois de $X_{u0}$ et $X_{u1}$.

**Remarque:** Pour tout nœud $u$ de $\mathbb{T}_{t_n}$ on a : $Y_u(|u|) = -\log(|I_u|)$.

# *Taille des fragments*

Soit $\mathbf{Y}$ la marche branchante sur $\mathbb{T}_{t_n}$ dont les incréments vérifient :

$$\forall u \in \mathbb{T}_{t_n}; \quad X_{u0} = -\log(Z_u) \quad \text{et} \quad X_{u1} = -\log(1 - Z_u) \qquad \text{où} \quad Z_u \sim \nu_0$$

On note $\tilde{\nu}_0$ et $\tilde{\nu}_1$ les lois de $X_{u0}$ et $X_{u1}$.

**Remarque:** Pour tout nœud $u$ de $\mathbb{T}_{t_n}$ on a : $Y_u(|u|) = -\log(|I_u|)$.

**Théorème 4 :** Si la loi $\frac{1}{2}\tilde{\nu}_0 + \frac{1}{2}\tilde{\nu}_1$ est dans le domaine d'attraction de $\mu$, alors

$$\frac{1}{n+1} \sum_{u \in \mathcal{F}(t_n)} \delta_{\frac{-\log|I_u| - \beta_n}{\alpha_n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{proba} \mu_{\infty, \frac{1}{2}\tilde{\nu}_0 + \frac{1}{2}\tilde{\nu}_1},$$

dans l'espace des mesures de probabilités muni de la topologie de la convergence faible.

# *Fin*

Merci de votre attention.

Bon appétit à tous.