

Génération aléatoire et propriétés statistiques de “configurations de boucles compactes” avec symétries

Philippe Duchon

Aléa 07

23 mars 2007

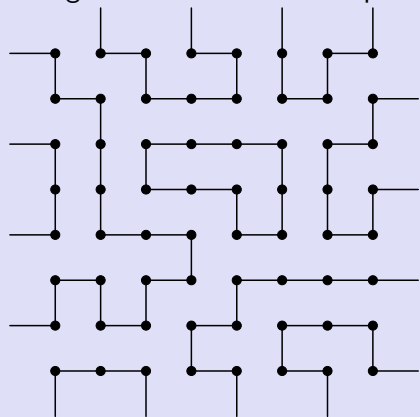
Outline

- 1 Configurations de boucles compactes
- 2 Génération aléatoire uniforme
- 3 Statistiques

FPL

Fully-Packed Loop (FPL)

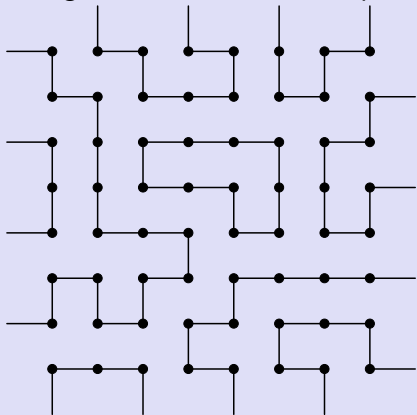
configuration de boucles compactes



FPL

Fully-Packed Loop (FPL)

configuration de boucles compactes



Codage

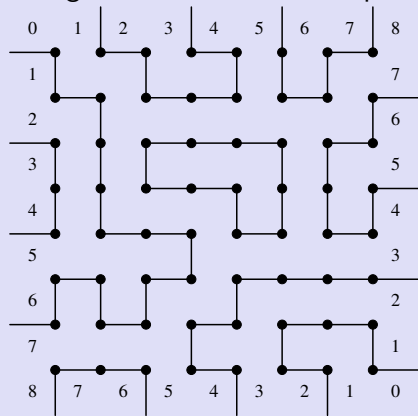
matrice de hauteurs

- matrice $(n + 1) \times (n + 1)$

FPL

Fully-Packed Loop (FPL)

configuration de boucles compactes



Codage

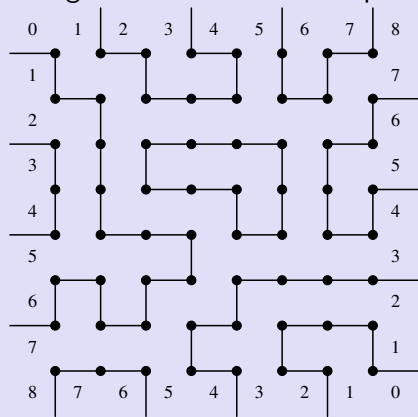
matrice de hauteurs

- matrice $(n + 1) \times (n + 1)$
- bords fixés

FPL

Fully-Packed Loop (FPL)

configuration de boucles compactes



Codage

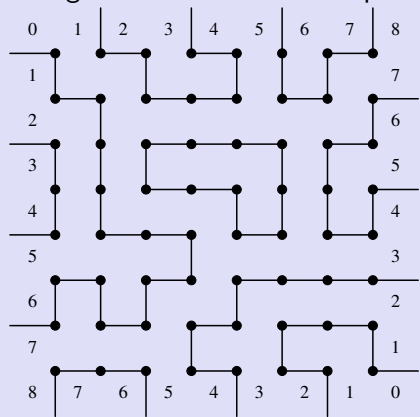
matrice de hauteurs

- matrice $(n + 1) \times (n + 1)$
- bords fixés
- $m_{i,j} = m_{i,j+1} \pm 1 = m_{i+1,j} \pm 1$

FPL

Fully-Packed Loop (FPL)

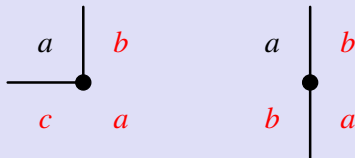
configuration de boucles compactes



Codage

matrice de hauteurs

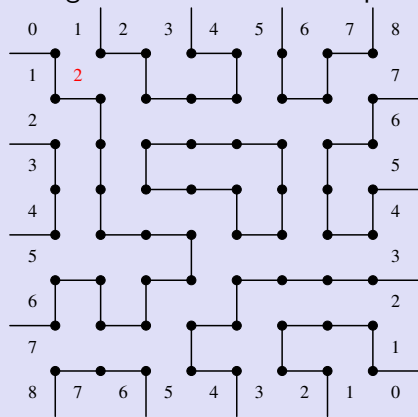
- matrice $(n + 1) \times (n + 1)$
- bords fixés
- $m_{i,j} = m_{i,j+1} \pm 1 = m_{i+1,j} \pm 1$
- “règles locales”



FPL

Fully-Packed Loop (FPL)

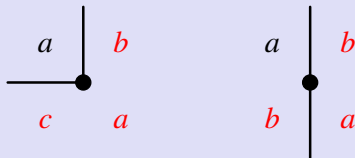
configuration de boucles compactes



Codage

matrice de hauteurs

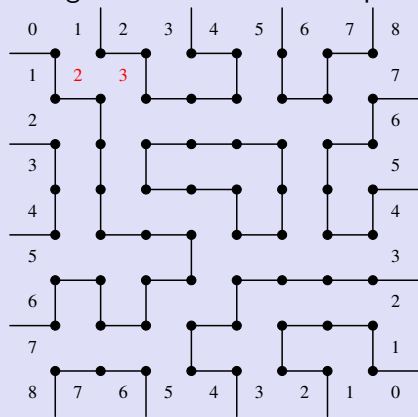
- matrice $(n + 1) \times (n + 1)$
- bords fixés
- $m_{i,j} = m_{i,j+1} \pm 1 = m_{i+1,j} \pm 1$
- “règles locales”



FPL

Fully-Packed Loop (FPL)

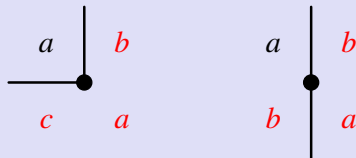
configuration de boucles compactes



Codage

matrice de hauteurs

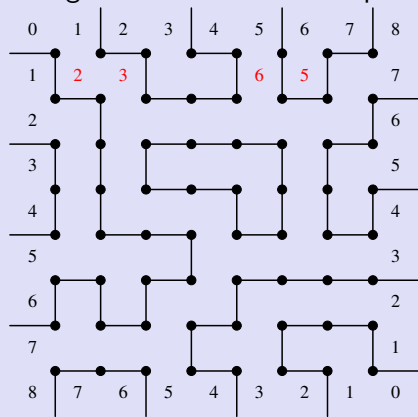
- matrice $(n + 1) \times (n + 1)$
- bords fixés
- $m_{i,j} = m_{i,j+1} \pm 1 = m_{i+1,j} \pm 1$
- “règles locales”



FPL

Fully-Packed Loop (FPL)

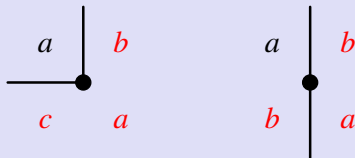
configuration de boucles compactes



Codage

matrice de hauteurs

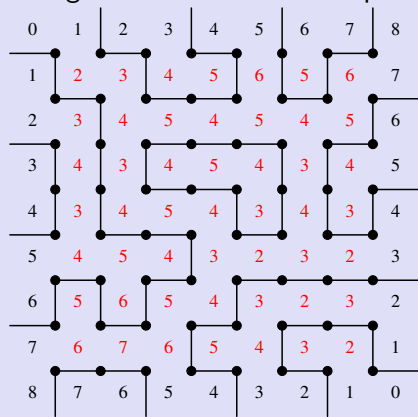
- matrice $(n + 1) \times (n + 1)$
- bords fixés
- $m_{i,j} = m_{i,j+1} \pm 1 = m_{i+1,j} \pm 1$
- “règles locales”



FPL

Fully-Packed Loop (FPL)

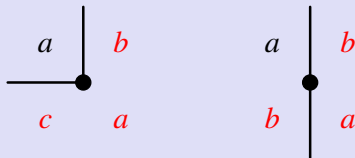
configuration de boucles compactes



Codage

matrice de hauteurs

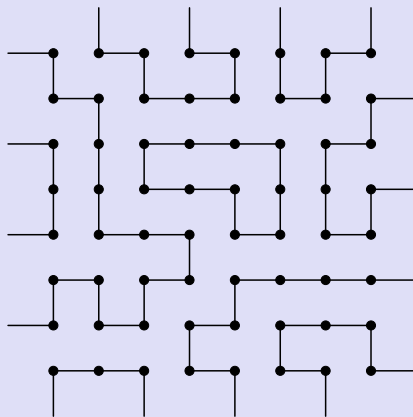
- matrice $(n + 1) \times (n + 1)$
- bords fixés
- $m_{i,j} = m_{i,j+1} \pm 1 = m_{i+1,j} \pm 1$
- “règles locales”



Classes de symétrie

- pas de conditions : $\mathcal{A}(n)$

Exemples

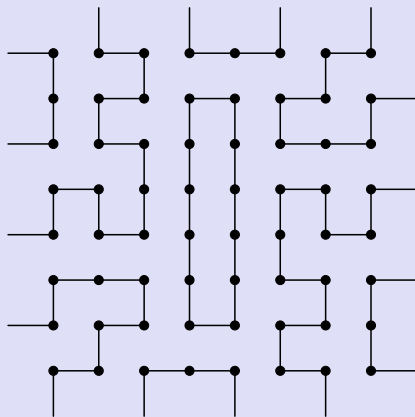


Classes de symétrie

- pas de conditions : $\mathcal{A}(n)$
- symétrie centrale : $\mathcal{A}_{HT}(n)$

$$m_{n-i, n-j} = m_{i, j}$$

Exemples



Classes de symétrie

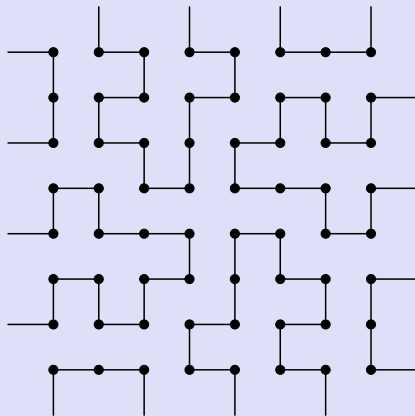
- pas de conditions : $\mathcal{A}(n)$
- symétrie centrale : $\mathcal{A}_{HT}(n)$

$$m_{n-i, n-j} = m_{i, j}$$

- symétrie par quart de tour : $\mathcal{A}_{QT}(n)$

$$m_{j, n-i} = n - m_{i, j}$$

Exemples



Comptage des FPL

Théorème (Zeilberger, Kuperberg 95)

Le nombre de FPL (ou de matrices à signes alternants) de taille n , est

$$A(n) = \prod_{0 \leq i < n} \frac{(3i+1)!}{(n+i)!} = (-3)^{\binom{n}{2}} \prod_{1 \leq i, j \leq n} \frac{3(j-i)+1}{j-i+n}$$

Théorème (Kuperberg 01)

Les nombres de FPL symétriques de tailles paires, sont

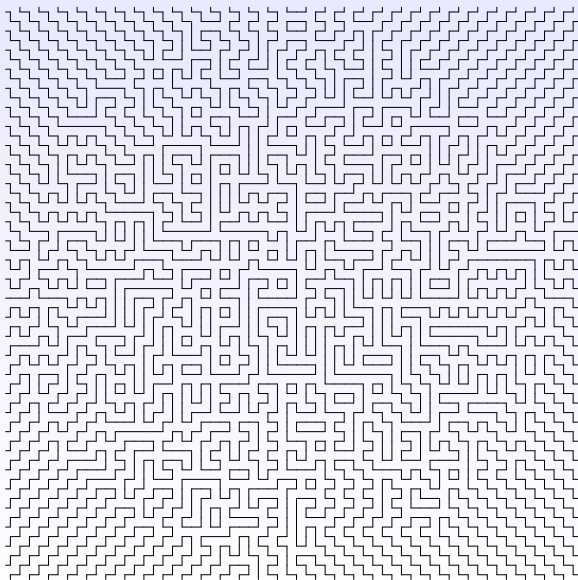
$$A_{HT}(2n) = A(n) \cdot (-3)^{\binom{n}{2}} \prod_{i,j} \frac{3(j-i)+2}{j-i+n}$$

$$A_{QT}(4n) = A_{HT}(2n)A(n)^2$$

Outline

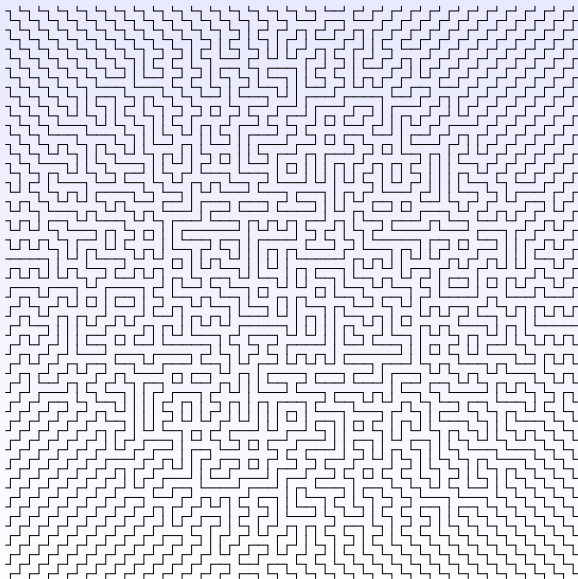
- 1 Configurations de boucles compactes
- 2 Génération aléatoire uniforme**
- 3 Statistiques

Génération aléatoire uniforme



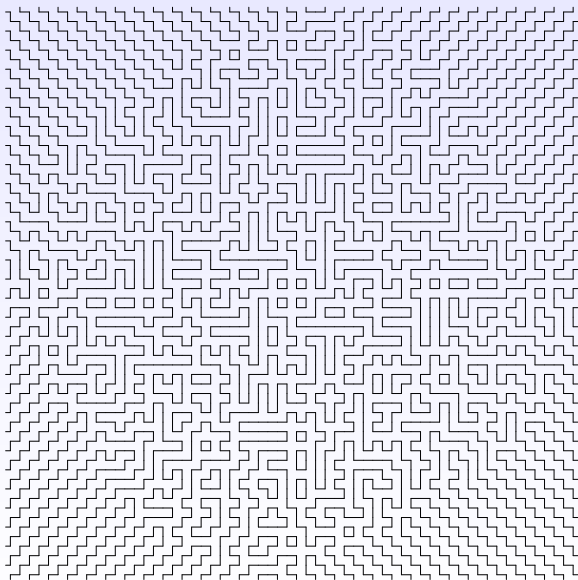
$\in \mathcal{A}(60)$

Génération aléatoire uniforme



$\in \mathcal{A}_{HT}(60)$

Génération aléatoire uniforme



$\in \mathcal{A}_{QT}(60)$

Le cas des non symétriques

On trouve facilement une chaîne de Markov irréductible, apériodique sur $\mathcal{A}(n)$, dont la loi stationnaire soit la loi uniforme. . .

Sur les matrices de hauteur : ($1 \leq i, j \leq n - 1, \epsilon = \pm 1$)

$$T_{i,j,\epsilon} : \begin{array}{l} \mathcal{M}_n \rightarrow \mathcal{M}_n \\ M = (m_{k,\ell}) \mapsto M' = (m'_{k,\ell}) \end{array}$$

$$m'_{k,\ell} = \begin{cases} m_{k,\ell} + 2\epsilon & (k = i, \ell = j, \\ & m_{i-1,j} = m_{i+1,j} = m_{i,j-1} = m_{i,j+1} = m_{i,j} + \epsilon) \\ m_{k,\ell} & \text{sinon} \end{cases}$$

Le cas des non symétriques

On trouve facilement une chaîne de Markov irréductible, apériodique sur $\mathcal{A}(n)$, dont la loi stationnaire soit la loi uniforme. . .

Sur les matrices de hauteur : $(1 \leq i, j \leq n - 1, \epsilon = \pm 1)$

$$T_{i,j,\epsilon} : \begin{array}{l} \mathcal{M}_n \rightarrow \mathcal{M}_n \\ M = (m_{k,\ell}) \mapsto M' = (m'_{k,\ell}) \end{array}$$

$$m'_{k,\ell} = \begin{cases} m_{k,\ell} + 2\epsilon & (k = i, \ell = j, \\ & m_{i-1,j} = m_{i+1,j} = m_{i,j-1} = m_{i,j+1} = m_{i,j} + \epsilon) \\ m_{k,\ell} & \text{sinon} \end{cases}$$

$T_{i,j,\epsilon}$ fait varier la valeur de $m_{i,j}$ dans un sens donné, si possible

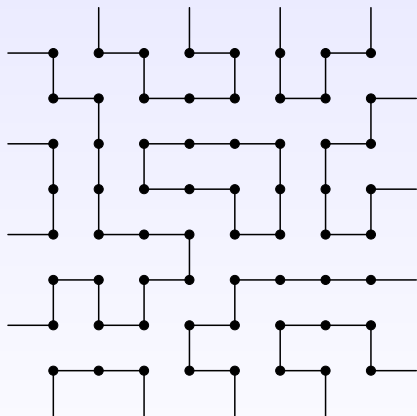
La chaîne des $T_{i,j,\epsilon}$

Sous choix aléatoire uniforme de (i, j, ϵ) ,

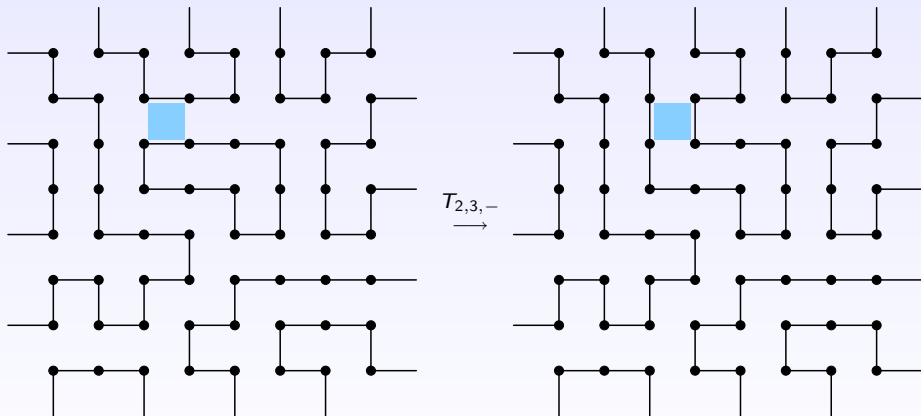
$$\mathbb{P}(T(M) = M') = \mathbb{P}(T(M') = M) = \begin{cases} \frac{1}{2(n-1)^2} & \text{si } M \text{ et } M' \text{ diffèrent} \\ & \text{en une seule case} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Condition d'équilibre local : chaîne de Markov (irréductible, apériodique) dont la loi stationnaire est uniforme sur $\mathcal{A}(n)$.

Sur les FPL...



Sur les FPL...



Version exactement uniforme

On est dans le cas rêvé pour l'algorithme "Couplage depuis le passé" (*coupling from the past*) de Propp et Wilson :

- chaque fonction $T_{i,j,\epsilon}$ est *croissante*
- il existe une unique matrice minimale, et une unique matrice maximale

(Ordre partiel : comparaison case par case des matrices, $M \leq M'$ ssi $m_{i,j} \leq m'_{i,j}$ pour tout (i,j))

CFTP en un transparent

- $(T_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ i.i.d. uniformes dans $\{T_{i,j,\epsilon}\}$

CFTP en un transparent

- $(T_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ i.i.d. uniformes dans $\{T_{i,j,\epsilon}\}$
- $T_{a,b} = T_b \circ T_{b-1} \circ \cdots \circ T_a$

CFTP en un transparent

- $(T_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ i.i.d. uniformes dans $\{T_{i,j,\epsilon}\}$
- $T_{a,b} = T_b \circ T_{b-1} \circ \dots \circ T_a$
- $N^+ = \inf\{n > 0 : T_{0,n}(M_{\min}) = T_{0,n}(M_{\max})\}$

CFTP en un transparent

- $(T_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ i.i.d. uniformes dans $\{T_{i,j,\epsilon}\}$
- $T_{a,b} = T_b \circ T_{b-1} \circ \dots \circ T_a$
- $N^+ = \inf\{n > 0 : T_{0,n}(M_{\min}) = T_{0,n}(M_{\max})\}$
- $N^- = \sup\{n < 0 : T_{n,0}(M_{\min}) = T_{n,0}(M_{\max})\}$

CFTP en un transparent

- $(T_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ i.i.d. uniformes dans $\{T_{i,j,\epsilon}\}$
- $T_{a,b} = T_b \circ T_{b-1} \circ \dots \circ T_a$
- $N^+ = \inf\{n > 0 : T_{0,n}(M_{\min}) = T_{0,n}(M_{\max})\}$
- $N^- = \sup\{n < 0 : T_{n,0}(M_{\min}) = T_{n,0}(M_{\max})\}$
- $T_{0,N^+}(\cdot)$ n'est pas uniforme sur $\mathcal{A}(n)$, mais $T_{N^-,0}(\cdot)$ l'est

CFTP en un transparent

- $(T_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ i.i.d. uniformes dans $\{T_{i,j,\epsilon}\}$
- $T_{a,b} = T_b \circ T_{b-1} \circ \dots \circ T_a$
- $N^+ = \inf\{n > 0 : T_{0,n}(M_{\min}) = T_{0,n}(M_{\max})\}$
- $N^- = \sup\{n < 0 : T_{n,0}(M_{\min}) = T_{n,0}(M_{\max})\}$
- $T_{0,N^+}()$ n'est pas uniforme sur $\mathcal{A}(n)$, mais $T_{N^-,0}()$ l'est
- Ordre de grandeur du temps d'exécution : $\mathbb{E}(N^-)$ ($O(n^8)$ d'après Luby, Randall et Sinclair ; expérimentalement, $O(n^5)$)

CFTP en un transparent

- $(T_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ i.i.d. uniformes dans $\{T_{i,j,\epsilon}\}$
- $T_{a,b} = T_b \circ T_{b-1} \circ \dots \circ T_a$
- $N^+ = \inf\{n > 0 : T_{0,n}(M_{\min}) = T_{0,n}(M_{\max})\}$
- $N^- = \sup\{n < 0 : T_{n,0}(M_{\min}) = T_{n,0}(M_{\max})\}$
- $T_{0,N^+}()$ n'est pas uniforme sur $\mathcal{A}(n)$, mais $T_{N^-,0}()$ l'est
- Ordre de grandeur du temps d'exécution : $\mathbb{E}(N^-)$ ($O(n^8)$ d'après Luby, Randall et Sinclair ; expérimentalement, $O(n^5)$)
- Version “read-once” [Wilson] permettant de composer les T dans l'ordre naturel, même ordre de grandeur de temps (facteur 4)

Le cas des FPL invariants par demi tour

- Les FPL minimal et maximal sont tous deux dans $\mathcal{A}_{HT}(n)$

Le cas des FPL invariants par demi tour

- Les FPL minimal et maximal sont tous deux dans $\mathcal{A}_{HT}(n)$
- On symétrise naturellement la chaîne sur $\mathcal{A}(n)$: chaque fois qu'on fait bouger une case, on fait aussi bouger dans le même sens la case symétrique

Le cas des FPL invariants par demi tour

- Les FPL minimal et maximal sont tous deux dans $\mathcal{A}_{HT}(n)$
- On symétrise naturellement la chaîne sur $\mathcal{A}(n)$: chaque fois qu'on fait bouger une case, on fait aussi bouger dans le même sens la case symétrique
- *i.e.*, on utilise les $T'_{i,j,\epsilon} = T_{i,j,\epsilon} \circ T_{n-i,n-j,\epsilon}$ et le reste de l'algorithme est le même.

Le cas des FPL invariants par demi tour

- Les FPL minimal et maximal sont tous deux dans $\mathcal{A}_{HT}(n)$
- On symétrise naturellement la chaîne sur $\mathcal{A}(n)$: chaque fois qu'on fait bouger une case, on fait aussi bouger dans le même sens la case symétrique
- *i.e.*, on utilise les $T'_{i,j,\epsilon} = T_{i,j,\epsilon} \circ T_{n-i,n-j,\epsilon}$ et le reste de l'algorithme est le même.
- Expérimentalement, c'est à peu près deux fois plus rapide

FPL invariants par quart de tour

- On a encore une chaîne qui converge vers l'uniforme sur $\mathcal{A}_{QT}(n)$, en re-symétrisant :

$$T''_{i,j,\epsilon} = T_{i,j,\epsilon} \circ T_{n-i,n-j,\epsilon} \circ T_{j,n-i,-\epsilon} \circ T_{n-j,i,-\epsilon}$$

FPL invariants par quart de tour

- On a encore une chaîne qui converge vers l'uniforme sur $\mathcal{A}_{QT}(n)$, en re-symétrisant :

$$T''_{i,j,\epsilon} = T_{i,j,\epsilon} \circ T_{n-i,n-j,\epsilon} \circ T_{j,n-i,-\epsilon} \circ T_{n-j,i,-\epsilon}$$

- (chaque fois qu'une case bouge, une autre bouge dans le même sens, et deux autres dans le sens inverse)

FPL invariants par quart de tour

- On a encore une chaîne qui converge vers l'uniforme sur $\mathcal{A}_{QT}(n)$, en re-symétrisant :

$$T''_{i,j,\epsilon} = T_{i,j,\epsilon} \circ T_{n-i,n-j,\epsilon} \circ T_{j,n-i,-\epsilon} \circ T_{n-j,i,-\epsilon}$$

- (chaque fois qu'une case bouge, une autre bouge dans le même sens, et deux autres dans le sens inverse)
- Catastrophe !** On n'a plus d'ordre naturel sur $\mathcal{A}_{QT}(n)$ pour lequel les T'' soient monotones ; M_{\min} et $M_{\max} \notin \mathcal{A}_{QT}(n)$...

FPL invariants par quart de tour (suite)

Ce qui marche :

- Sur $\mathcal{A}(n)$, on applique la chaîne des $T''_{i,j,\epsilon}$

FPL invariants par quart de tour (suite)

Ce qui marche :

- Sur $\mathcal{A}(n)$, on applique la chaîne des $T''_{i,j,\epsilon}$
- Cette chaîne est bien monotone, apériodique, avec une (unique) distribution stationnaire qui ne charge que $\mathcal{A}_{QT}(n)$ (de manière uniforme)

FPL invariants par quart de tour (suite)

Ce qui marche :

- Sur $\mathcal{A}(n)$, on applique la chaîne des $T''_{i,j,\epsilon}$
- Cette chaîne est bien monotone, apériodique, avec une (unique) distribution stationnaire qui ne charge que $\mathcal{A}_{QT}(n)$ (de manière uniforme)
- Expérimentalement, le temps est de l'ordre du quart de la chaîne pour $\mathcal{A}(n)$

Outline

- 1 Configurations de boucles compactes
- 2 Génération aléatoire uniforme
- 3 Statistiques**

Matrice de hauteur, normalisée

Surface associée à une matrice de hauteurs M :

$$f_M(t, u) = \frac{1}{n} m_{tn, un}$$

(et interpolation)

Théorème (Cohn, Elkies, Propp 96)

Pour la loi sur $\mathcal{A}(n)$ qui donne à chaque FPL F un poids proportionnel à $\sqrt{2}^{D(F)}$, où $D(F)$ est le nombre de sommets où les deux arêtes incidentes sont alignées, la surface associée est asymptotiquement déterministe (et explicite)

Matrice de hauteur, normalisée

Surface associée à une matrice de hauteurs M :

$$f_M(t, u) = \frac{1}{n} m_{tn, un}$$

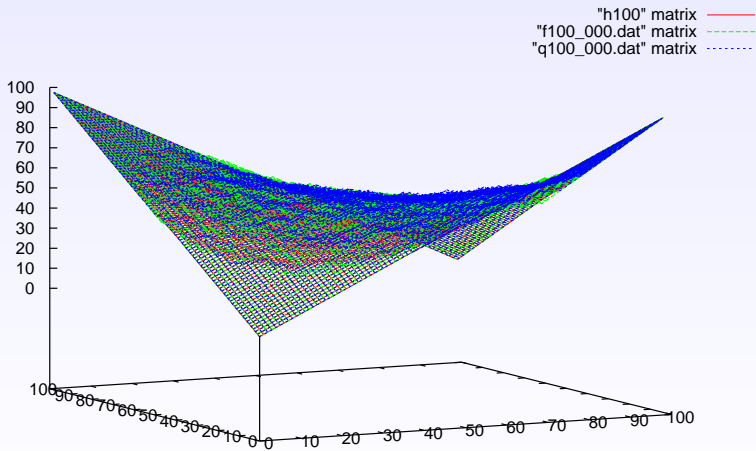
(et interpolation)

Théorème (Cohn, Elkies, Propp 96)

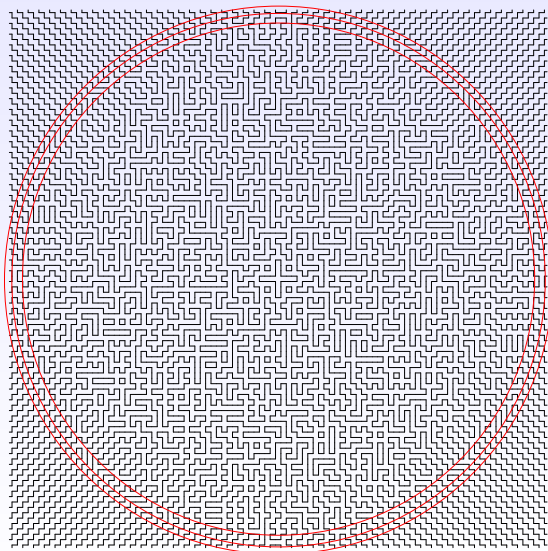
Pour la loi sur $\mathcal{A}(n)$ qui donne à chaque FPL F un poids proportionnel à $\sqrt{2}^{D(F)}$, où $D(F)$ est le nombre de sommets où les deux arêtes incidentes sont alignées, la surface associée est asymptotiquement déterministe (et explicite)

Expérimentalement...

Expérimentalement, ça semble être aussi vrai (avec la même limite) pour $\mathcal{A}(n)$ uniforme, ainsi que pour $\mathcal{A}_{HT}(n)$ uniforme, et que pour $\mathcal{A}_{QT}(n)$ uniforme...



Le “cercle arctique”



Quel rapport ?

