
Etude des configurations locales dans le modèle d'Ising

DAVID COUPIER

Plan de l'exposé

1. Modèle d'Ising et configurations locales
2. Poids d'une configuration locale
3. Approximations poissonniennes

1. Modèle d'Ising et configurations locales

Partie 1. Le graphe $G_n = (V_n, E_n)$

- L'ensemble des **sommets** est $V_n = \{0, \dots, n - 1\}^d$.
- Le **voisinage** d'un sommet $x \in V_n$ est

$$\mathcal{V}(x) = \{y \in V_n, 0 < \|y - x\|_q \leq \rho\}$$

et son cardinal est noté $\mathcal{V} = |\mathcal{V}(x)|$.

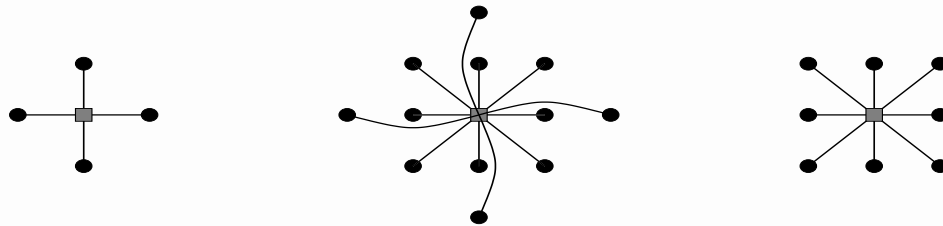


Fig. 1 - Voisinages en dimension $d = 2$. De gauche à droite : $\rho = 1$ et $\|\cdot\|_1$ ($\mathcal{V} = 4$); $\rho = 2$ et $\|\cdot\|_1$ ($\mathcal{V} = 12$); $\rho = 1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ($\mathcal{V} = 8$).

Partie 1. Le graphe $G_n = (V_n, E_n)$

- Deux sommets $x, y \in V_n$ sont **voisins** si

$$y \in \mathcal{V}(x) \ (\Leftrightarrow \ x \in \mathcal{V}(y)) .$$

- L'ensemble des **arêtes** E_n est l'ensemble des paires $\{x, y\}$ de sommets voisins.

Enfin, $G_n = (V_n, E_n)$ est supposé à bords périodiques.

- En résumé, 2 propriétés de G_n sont cruciales :
 - *caractère local*,
 - *invariance par translation*.

Partie 1. Le modèle d'Ising

- Une **configuration** ζ est une application de V_n dans $\{-, +\}$. Leur ensemble est noté $\{-, +\}^{V_n}$.
- Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Le **modèle d'Ising** de paramètres a et b est la mesure de probabilité $\mu_{a,b}$ sur l'ensemble $\{-, +\}^{V_n}$ définie par : $\forall \zeta \in \{-, +\}^{V_n}$,

$$\mu_{a,b}(\zeta) = \frac{1}{Z_{a,b}} \exp \left(a \sum_{x \in V_n} \zeta(x) + b \sum_{\{x,y\} \in E_n} \zeta(x)\zeta(y) \right) .$$

- $\mu_{a,b}$ est appelée la **mesure de Gibbs** associée aux potentiels a et b .

Partie 1. Hypothèses sur les potentiels

- a est le **champ magnétique** :

$a > 0$; favorise les sommets +,

$a < 0$; favorise les sommets -.

Symétrie \Rightarrow réduction au cas $\boxed{a < 0}$

- b est le **potentiel de paire** :

$b > 0$; favorise les sommets voisins de mêmes spins,

$b < 0$; favorise les sommets voisins de spins opposés,

$b = 0$; indépendance entre les spins des sommets voisins.

Hypothèse **ferromagnétique** \Rightarrow $\boxed{b \geq 0}$

- **Asymptotique** : La taille du graphe $n \rightarrow +\infty$ et les potentiels $a = a(n)$ et $b = b(n)$ pourront diverger.

Partie 1. Influence du signe du potentiel de paire b

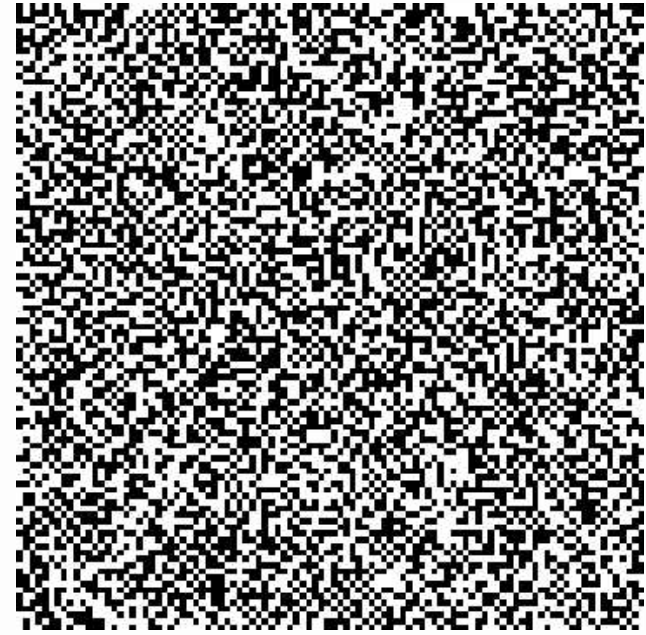
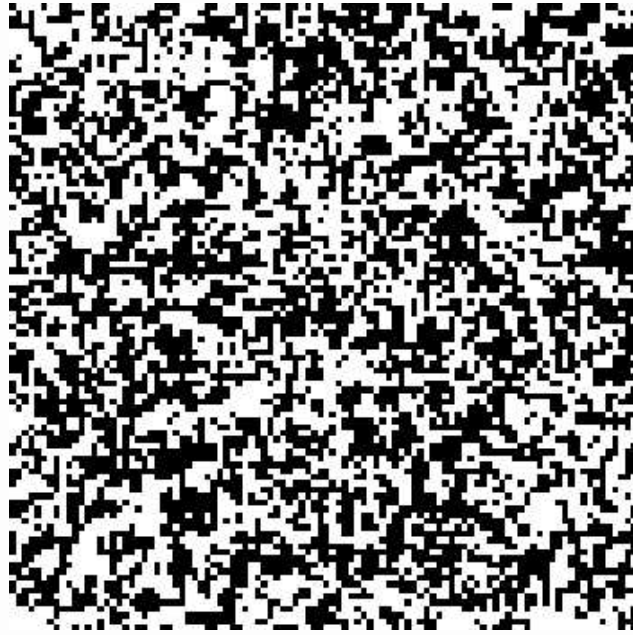


Fig. 2 - A gauche ; $(a, b) = (0, 0.2)$. A droite ; $(a, b) = (0, -0.2)$.

Partie 1. Distance de graphe et boules

- La **distance de graphe** entre x et y , notée $dist(x, y)$ est la longueur du plus court chemin allant de x à y .
- La boule de centre x et de rayon $r \geq 1$ est :

$$B(x, r) = \{y \in V_n, dist(x, y) \leq r\} .$$

- Le **voisinage** de $B(x, r)$ est :

$$\begin{aligned} \delta B(x, r) &= \{y \in V_n \setminus B(x, r), \exists z \in B(x, r), \{y, z\} \in E_n\} \\ &= \{y \in V_n, dist(x, y) = r + 1\} . \end{aligned}$$

Partie 1. Boules et leurs voisinages ($d = 2$)

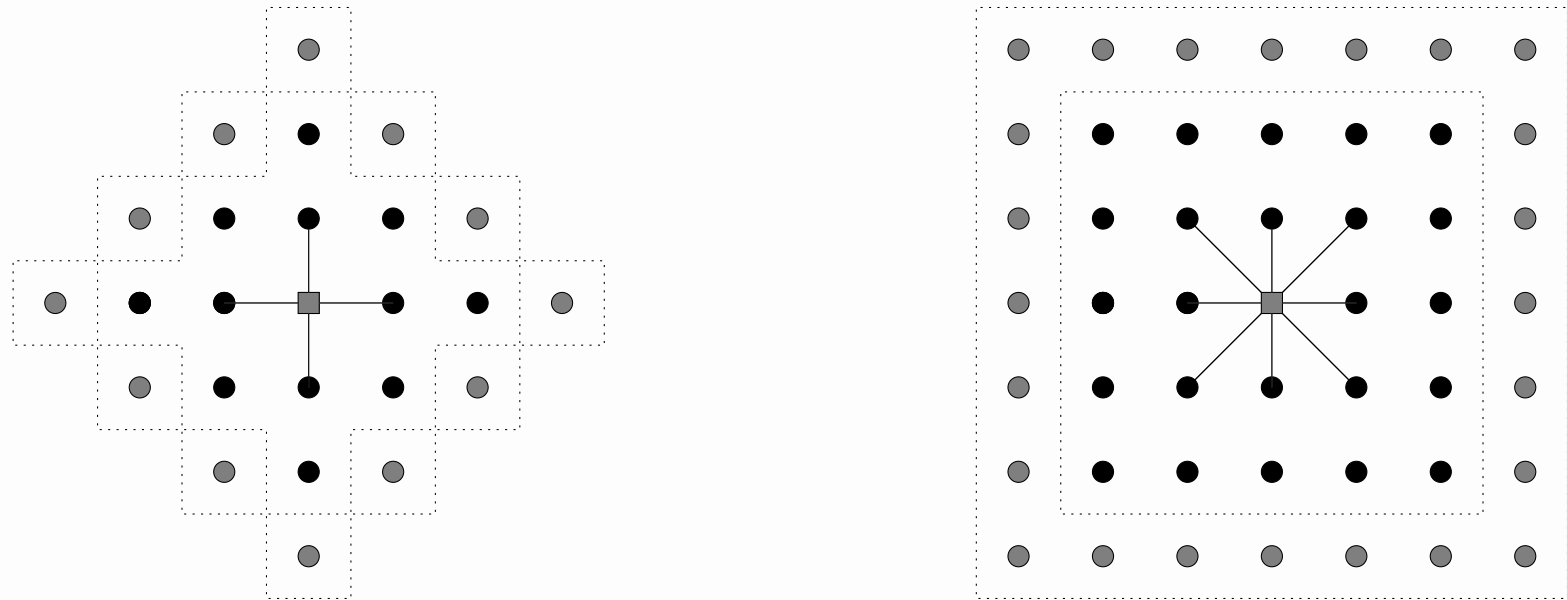


Fig. 3 - Deux boules de rayon $r = 2$. A gauche ; $\rho = 1$ et $\| \cdot \|_1$. A droite ; $\rho = 1$ et $\| \cdot \|_\infty$.

Partie 1. Configuration locale

- Fixons $B(0, r)$. Une **configuration locale** de rayon r est un élément de $\mathcal{C}_r = \{-, +\}^{B(0, r)}$.
- Une configuration locale $\eta \in \mathcal{C}_r$ est déterminée par son ensemble de sommets $+$:

$$V_+(\eta) = \{x \in B(0, r), \eta(x) = +\} \subset B(0, r) .$$

Notons aussi $V_-(\eta) = B(0, r) \setminus V_+(\eta)$.

- Notons par $k(\eta) = |V_+(\eta)|$ le **nombre de sommets $+$** de η et par $\gamma(\eta)$ son **périmètre** :

$$\gamma(\eta) = \mathcal{V}|V_+(\eta)| - 2|\{\{x, y\} \in E_n, x, y \in V_+(\eta)\}| .$$

Partie 1. Exemple de configuration locale

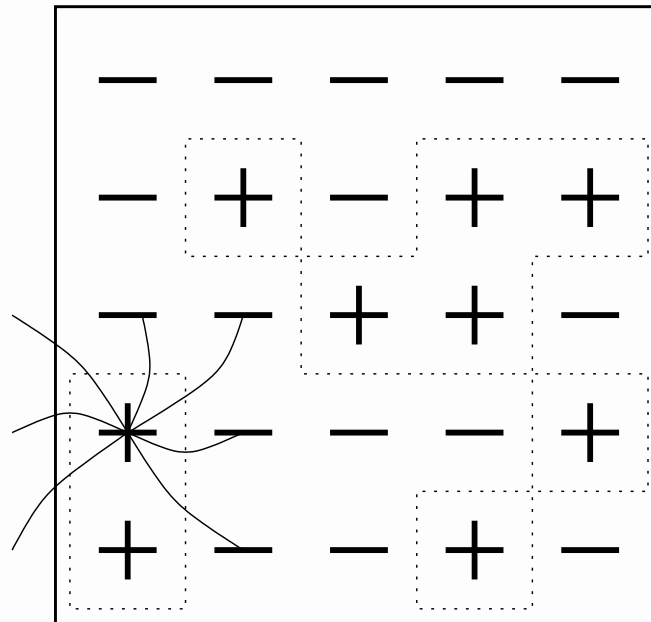


Fig. 4 - Une configuration locale η de rayon $r = 2$ (avec $\rho = 1$, $\|\cdot\|_\infty$ et $d = 2$), formée de $k(\eta) = |V_+(\eta)| = 9$ sommets $+$ et de périmètre $\gamma(\eta) = 54$.

2. Poids d'une configuration locale

Partie 2. Le Poids $W_n(\eta)$

- Le poids de $\eta \in \mathcal{C}_r$ est

$$W_n(\eta) = \exp(2a(n)k(\eta) - 2b(n)\gamma(\eta)) .$$

- $a(n) < 0$ et $b(n) \geq 0$ impliquent

$$0 < W_n(\eta) \leq 1 .$$

- Si η^0 est la configuration locale nulle ($\eta^0 \equiv -$), alors

$$W_n(\eta^0) = 1$$

et, pour $\eta \neq \eta^0$,

$$W_n(\eta) \leq \exp(2a(n) - 2\mathcal{V}b(n)) < 1 .$$

Partie 2. Compter les copies de η

- Pour tout $x \in V_n$, η_x est le translaté de η sur $B(x, r)$:

$$\forall y \in V_n, \text{dist}(0, y) \leq r \implies \eta_x(x + y) = \eta(y) .$$

- L'indicatrice $I_x^\eta : \{-, +\}^{V_n} \rightarrow \{0, 1\}$ est définie par :

$$\forall \zeta \in \{-, +\}^{V_n}, I_x^\eta(\zeta) = \begin{cases} 1, & \text{si } \zeta_{B(x,r)} = \eta_x , \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Le nombre de copies dans G_n de η est :

$$X_n(\eta) = \sum_{x \in V_n} I_x^\eta .$$

Partie 2. Probabilité conditionnelle et poids

- Soient $x \in V_n$, $B = B(x, r)$, $\eta \in \mathcal{C}_r$ et $\sigma \in \{-, +\}^{\delta B}$. Alors,

$$\mu_{a,b} (I_x^\eta = 1 | \sigma) = \frac{W_n(\eta_x \sigma)}{\sum_{\eta' \in \mathcal{C}_r} W_n(\eta'_x \sigma)} .$$

- $\gamma(\eta_x \sigma) \neq \gamma(\eta_x) + \gamma(\sigma)$ implique $W_n(\eta_x \sigma) \neq W_n(\eta)W_n(\sigma)$.

Mais :

$$W_n(\eta_x \sigma^0) = W_n(\eta_x)W_n(\sigma^0) = W_n(\eta) .$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } \mu_{a,b} (I_x^\eta = 1 | \sigma^0) &= \frac{W_n(\eta)}{\sum_{\eta' \in \mathcal{C}_r} W_n(\eta')} \\ &\leq W_n(\eta) . \end{aligned}$$

Partie 2. Probabilité de trou $\Delta_n(\eta)$

- La probabilité de trou $\Delta_n(\eta)$ est

$$\Delta_n(\eta) = \max_{\substack{\sigma \in \{-, +\}^{\delta B} \\ \sigma \neq \sigma^0}} \frac{W_n(\eta_x \sigma)}{W_n(\eta)} .$$

- L'hypothèse $\Delta_n(\eta) \rightarrow 0$ signifie :

“étant donnée la réalisation de η_x sur B ,
les sommets de δB sont tous $-$ ”.

Partie 2. Contrôle de la probabilité conditionnelle

- LEMME FONDAMENTAL :

Soient $x \in V_n$, $B = B(x, r)$, $\eta \in \mathcal{C}_r$ et $\sigma \in \{-, +\}^{\delta B}$.

Alors, $\forall n$,

$$\begin{aligned} W_n(\eta) \mathbf{1}_{\sigma=\sigma^0} (1 - |\mathcal{C}_r| \Delta_n(\eta)) &\leq \mu_{a,b}(I_x^\eta = 1 | \sigma) \\ &\leq W_n(\eta) \left(1 + \mathbf{1}_{\sigma \neq \sigma^0} \frac{\Delta_n(\eta)}{W_n(\sigma)} \right) . \end{aligned}$$

- Interprétation : si $\Delta_n(\eta) \rightarrow 0$ et $\mathbf{1}_{\sigma=\sigma^0} \xrightarrow{pr.} 1$ alors

$$\mu_{a,b}(I_x^\eta = 1) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} W_n(\eta) .$$

3. Approximations poissonniennes

Partie 3. Probabilité de maximalité $\Theta_n(\eta)$

- Notons

$$\mathcal{C}_r(\eta) = \{\eta' \in \mathcal{C}_r, V_+(\eta') \supset V_+(\eta)\} .$$

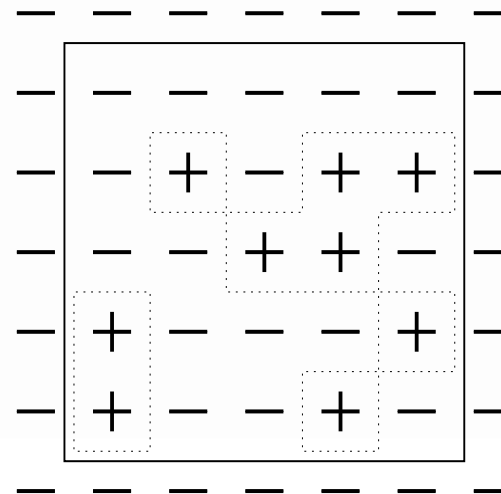
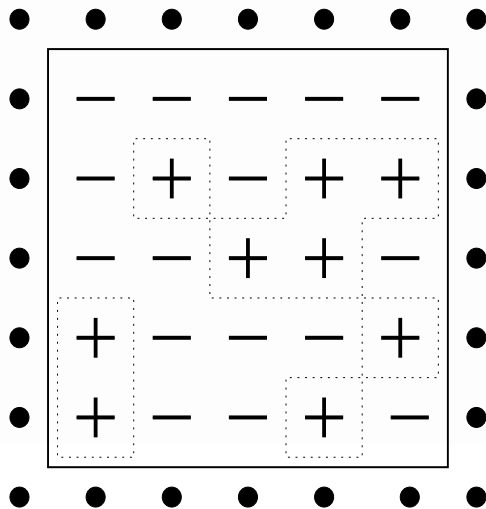
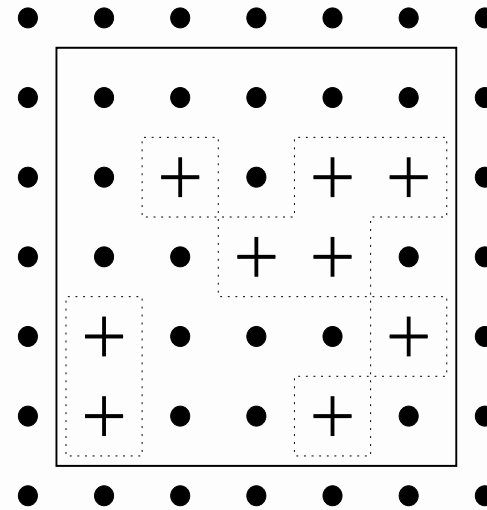
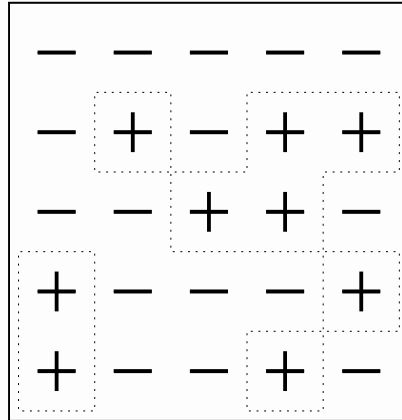
La probabilité de maximalité $\Theta_n(\eta)$ est

$$\Theta_n(\eta) = \max_{\substack{\eta' \in \mathcal{C}_r(\eta) \\ \eta' \neq \eta}} \frac{W_n(\eta')}{W_n(\eta)} .$$

- L'hypothèse $\Theta_n(\eta) \rightarrow 0$ signifie :

“sachant que les sommets de $x + V_+(\eta)$ sont +,
les autres sommets de B sont tous –”.

Partie 3. Hypothèse $\max\{\Delta_n(\eta), \Theta_n(\eta)\} \rightarrow 0$



Partie 3. Approximation Poissonnienne pour $X_n(\eta)$

THÉORÈME :

Soient $\eta \in \mathcal{C}_r$, $a(n) < 0$ et $b(n) \geq 0$ tels que

$$n^d W_n(\eta) = \lambda ,$$

pour $\lambda > 0$. Les hypothèses

$$(H1) : \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \max\{\Delta_n(\eta), \Theta_n(\eta)\} = 0 .$$

$$(H2) : \quad \forall V \subset V_n, \exists C = C(|V|) > 0, \forall \zeta \in \{-, +\}^V, \forall n, \\ \mu_{a,b}(I_V^\zeta = 1) \leq C W_n(\zeta) .$$

impliquent

$$d_{TV}(\mathcal{L}(X_n(\eta)), \mathcal{P}(\lambda)) = \mathcal{O}(\max\{\Delta_n(\eta), \Theta_n(\eta)\}) .$$

Partie 3. Schéma de la preuve

On introduit une v.a. $\bar{X}_n(\eta)$

- **croissante au sens FKG** ;
- “proche” de $X_n(\eta)$ sous $(H1)$ et $(H2)$.

On majore $d_{TV}(\mathcal{L}(X_n(\eta)), \mathcal{P}(\lambda))$ par la somme des 3 termes suivants :

- $d_{TV}(\mathcal{L}(X_n(\eta)), \mathcal{L}(\bar{X}_n(\eta)))$
- $d_{TV}(\mathcal{L}(\bar{X}_n(\eta)), \mathcal{P}(\lambda_n))$
 \hookrightarrow méthode de **Chen-Stein**
- $d_{TV}(\mathcal{P}(\lambda_n), \mathcal{P}(\lambda))$

où $\lambda_n = \mathbf{E}_{a,b}[\bar{X}_n(\eta)]$. Et on montre que chacun d’entre eux est un $\mathcal{O}(\max\{\Delta_n(\eta), \Theta_n(\eta)\})$.

Partie 3. Traduction en termes de $a(n)$ et $b(n)$

- PROPOSITION :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a(n) + \mathcal{V}b(n) = -\infty \Rightarrow (H1) ,$$

$$a(n) + 2\mathcal{V}b(n) \leq 0 \Rightarrow (H2) .$$

- EXEMPLE 1 : $a(n) < 0$, $b(n) \geq 0$ tels que $n^d W_n(\eta) = \lambda$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a(n) = -\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b(n)}{a(n)} = 0 .$$

- EXEMPLE 2 :

$$\begin{cases} a(n) = \frac{1}{2k(\eta) + \gamma(\eta)/\mathcal{V}} \log\left(\frac{\lambda}{n^d}\right) , \\ b(n) = -\frac{a(n)}{2\mathcal{V}} = \frac{-1}{4\mathcal{V}k(\eta) + 2\gamma(\eta)} \log\left(\frac{\lambda}{n^d}\right) . \end{cases}$$

Merci !

Plus de détails sur ;

`http://math.univ-lille1.fr/~coupier/`