CHARACTÈRES DU GROUPE SYMÉTRIQUE

ET CUMULANTS LIBRES

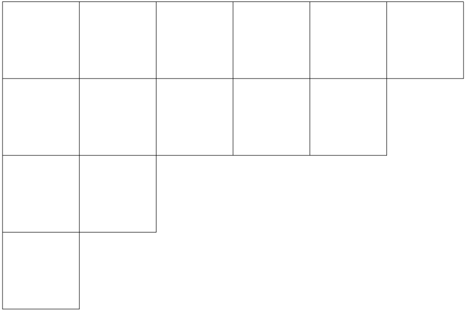
Philippe Biane

CNRS, IGM

AERES, 05/02/2009

PARTITIONS

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n \geq 0.$
Indexent les *représentations irréductible du groupe symétrique* sur $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$ lettres.

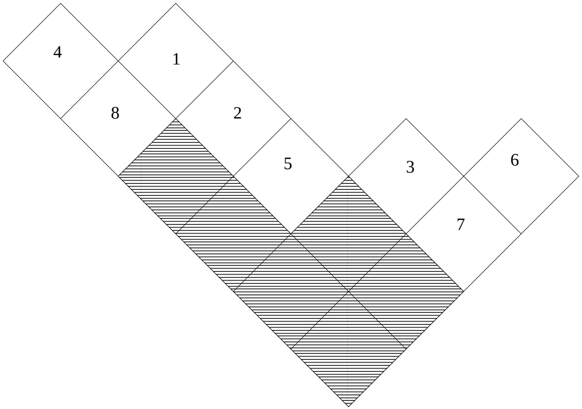


$$6 + 5 + 2 + 1 = 14$$

$$4 + 3 + 2 + 2 + 2 + 1 = 14$$

CONVENTION RUSSE

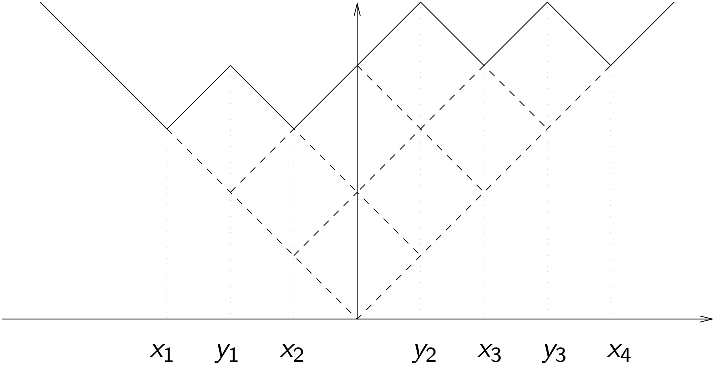
Un diagramme est une fonction continue $\omega(t) = |t|, |t| >> 1$.



Restriction d'une représentation $S_{14} \downarrow S_6$.

La multiplicité est égale au nombre de façons d'effacer les boîtes.

CUMULANTS LIBRES



$$G_\lambda(z) = \frac{\prod_j (z - y_j)}{\prod_i (z - x_i)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n-1} M_n$$

$$K_{\lambda_i}(G_\lambda(z)) = G_\lambda(K_\lambda(z)) = z; \qquad K_\lambda(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} R_n(\lambda) z^n$$

$R_n(\lambda) =$ **cumulants libres du diagramme** λ. Peuvent être définis pour des diagrammes "continus" $\omega(t)$

ÉVALUATION ASYMPTOTIQUE DES CARACTÈRES

$\lambda =$ diagramme de taille q, $\lambda \sim \sqrt{q}\omega$
ω=diagramme continu.

$$\chi_\lambda(\sigma) = q^{-|\sigma|/2}(\prod_{c|\sigma} R_{|c|+2}(\omega) + O(q^{-1}))$$

$|\sigma|$= nombre minimal de transpositions pour écrire σ. Le produit est sur les cycles de σ.

ASYMPTOTIQUE DE RESTRICTIONS

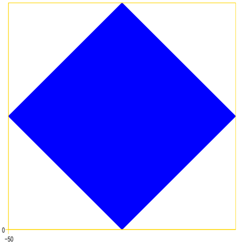
λ partition de q, sa restriction à $S_p \times S_{q-p} \subset S_q$ se décompose

$$\bigoplus c^{\lambda}_{\mu\nu} \, [\mu] \otimes [\nu] \qquad \text{(Littlewood-Richarson rule).}$$

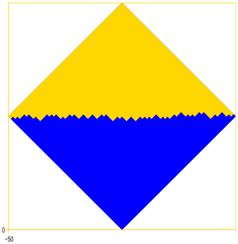
Quand $q \to \infty$ and $p/q \to t$, presque tous les couples (μ, ν) dans la décomposition ont une forme proche de (ω_t, ω_{1-t}).

$$R_n(\omega_t) = t^{n-1} R_n(\omega)$$

Restriction process



Restriction process



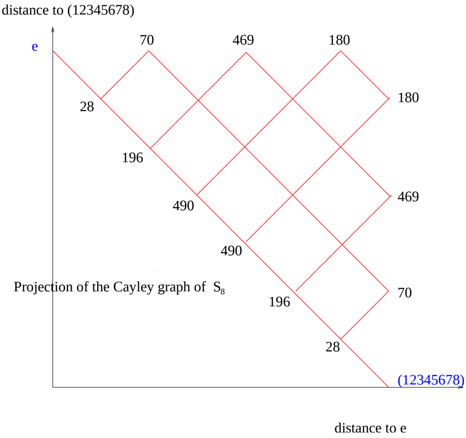
POLYNOMES DE KEROV

Ils expriment les caractères de cycles en terme des cumulants libres.

Σ_k = caractère normalisé d'un cycle de longueur k

$$
\begin{aligned}
\Sigma_1 &= R_2 \\
\Sigma_2 &= R_3 \\
\Sigma_3 &= R_4 + R_2 \\
\Sigma_4 &= R_5 + 5R_3 \\
\Sigma_5 &= R_6 + 15R_4 + 5R_2^2 + 8R_2 \\
\Sigma_6 &= R_7 + 35R_5 + 35R_3R_2 + 84R_3 \\
\Sigma_7 &= R_8 + 70R_6 + 84R_4R_2 + 56R_3^2 + 14R_2^3 + 469R_4 + 224R_2^2 + 180R_2
\end{aligned}
$$

$$\Sigma_7 = R_8 + 70R_6 + 84R_4R_2 + 56R_3^2 + 14R_2^3 + 469R_4 + 224R_2^2 + 180R_2$$



Le coefficient de R_{k+1-2l} dans Σ_k est égal au nombre de cycles $c \in S_k$, de longueur k, tels que $(1\,2\ldots k)\,c^{-1}$ a $k-2l$ cycles (Stanley 2001, B. 2001).

Conjecture de Kerov (2000): les coefficients sont positifs.

Preuve par V. Féray (2007).
Puis interprétation combinatoire par Dolcega, Féray, Sniady (2008): les coefficients sont des nombres de factorisation.

APPLICATIONS

Les polynômes de Kerov permettent de donner de nouvelles bornes supérieures pour les valeurs des caractères [V. Féray, P. Sniady].

Grâce à ces bornes, on peut montrer [Moore, Russel, Sniady] que les algorithmes quantiques proposés pour résoudre le HSP (Hidden Subgroup Problem) ne font pas mieux que les algorithmes classiques pour le problème d'isomorphisme de graphes .