Une généralisation des fonctions quasi-symétriques et des fonctions symétriques non commutatives

Gerard DUCHAMP*, Florent HIVERT†, Jean-Yves THIBON†

* Laboratoire d'Informatique Fondamentale et
Appliquee de Rouen – Faculté des Sciences – Université de Rouen
76821 Mont-Saint-Aignan CEDEX

†Institut Gaspard Monge – Université de Marne-la-Vallée
5, bd Descartes – Champs sur Marne 77454 Marne-la-Vallée CEDEX 2
Tel : 01 49 32 90 84, E-mail : `Florent.Hivert@univ-mlv.fr`

Combinatoire
Une généralisation des fonctions quasi-symétriques et non commutatives

Résumé

Nous construisons une bigèbre autoduale qui admet comme quotients ou comme sous algèbres diverses généralisations récentes de l'algèbre des fonctions symétriques, et dans laquelle on peut relever la plupart des constructions usuelles sur ces dernières.

A generalization of quasi-symmetric functions and noncommutative symmetric functions

Abstract

We construct a self-dual bialgebra admitting as quotients or subalgebras various recent generalizations of symmetric functions, such that most of the usual constructions can be lifted.

L'objet de cette Note est de présenter une généralisation commune à plusieurs algèbres de Hopf intervenant en théorie des représentations et en combinatoire.

Il est bien connu que l'anneau *Sym* des fonctions symétriques peut s'interpréter comme la somme directe des groupes de Grothendieck des algèbres de tous les groupes symétriques $\mathbb{K}\mathfrak{S}_n$ sur un corps de caractéristique nulle, ou des algèbres de Hecke $H_n(t)$ de type A pour t non nul et non racine de l'unité. Lorque $t = 0$, les sommes directes des groupes $G_0(H_n(t))$ et $K_0(H_n(t))$ forment deux algèbres de Hopf en dualité, respectivement isomorphes à l'algèbre **QSym** des fonctions quasi-symétriques de Gessel [5] et à l'algèbre **Sym** des fonctions symétriques non commutatives de [4] (*cf.* [3, 2, 10]).

La prise en compte d'une filtration naturelle des $H_n(0)$-modules conduit à une catégorie graduée dont la somme directe des groupes de Grothendieck forme un q-analogue de **QSym**, l'algèbre $\mathbf{QSym}_q$ des fonctions quasi-symétriques quantiques [18]. Nous allons voir que ces dernières peuvent être obtenues en spécialisant aux générateurs de l'espace affine quantique les variables formelles d'objets plus généraux, appelés fonctions quasi-symétriques libres, qui forment une réalisation du dual **FQSym** de l'algèbre de convolution $\mathbb{K}\mathfrak{S}$ considérée dans [14] (voir aussi [17]). Notons encore que **FQSym** contient deux sous algèbres intéressantes, les fonctions symétriques libres **FSym** qui conduisent à la preuve la plus simple de la règle de Littlewood-Richardson [8], et le dual de l'algèbre de Hopf des arbres binaires de [12].

Les bases de *Sym* sont indexées par les partitions λ, celles de **QSym**, **Sym** et $\mathbf{QSym}_q$ par les compositions et celles de **FQSym** par les permutations. Dans cette Note, nous introduisons une bigèbre **MQSym** dont les bases sont indexées par les matrices d'entiers représentant les doubles classes des groupes symétriques modulo des sous-groupes paraboliques. Nous montrons comment obtenir les algèbres précédentes comme quotients ou sous-algèbres de **MQSym** et comment relever dans **MQSym** les bases usuelles et un certain nombre de constructions combinatoires.

Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif de caractéristique nulle et X un alphabet totalement ordonné de cardinal n. On note $\mathbb{K}[X]^+$ l'idéal formé des polynômes sans terme constant et $\mathbb{K}\{X\} = T(\mathbb{K}[X]^+)$ son algèbre tensorielle. Une base naturelle de $\mathbb{K}\{X\}$ est formée par les produits tensoriels de monômes (appellés *multimots*) que l'on peut représenter par les matrices d'entiers $M = (m_{i,j})$ où $m_{i,j}$ est l'exposant de la variable x_i dans le $j^{\text{ième}}$ facteur du produit tensoriel. Ces matrices n'ont aucune colonne nulle, on dira qu'elles sont *horizontalement tassées*. Un multimot m pourra encore être représenté de la manière suivante. Soient A le support de m, c'est-à-dire l'ensemble des variables x_i telles que la $i^{\text{ième}}$ ligne de M soit non nulle et P la matrice obtenue en supprimant les lignes nulles de M. On notera alors $m = A^P$. Une matrice telle que P, sans ligne ni colonne nulle, sera dite *tassée*.

Soit $\mathbf{MQSym}(X)$ le sous espace vectoriel de $\mathbb{K}\{X\}$ engendré par les éléments

$$\mathbf{MS}_M = \sum_{A \in \mathcal{P}_k(X)} A^M \tag{1}$$

où $\mathcal{P}_k(X)$ est l'ensemble des parties à k éléments de X et M parcourt les matrices tassées de hauteur $h(m) = k < n$. On peut montrer que $\mathbf{MQSym}(X)$ est en fait une sous-algèbre de $\mathbb{K}\{X\}$, que nous appelerons *algèbre quasi-symétrique matricielle.* On peut reformuler cette définition par une action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ similaire à celle de [6]. Le produit $\mathbf{MS}_P\mathbf{MS}_Q$ est égal à la somme des $\mathbf{MS}_R$, où R parcourt l'ensemble $⧢(P, Q)$ appelé *mélange augmenté* des matrices P et Q, défini ainsi : soit r une entier compris entre $\max(p, q)$ et $p + q$ où $p = h(P)$ et $q = h(Q)$. On insère des lignes de 0 à l'intérieur des matrices P et Q de manière à obtenir des matrices $\tilde{P}$ et $\tilde{Q}$ de hauteur r. Soit R la matrice $(\tilde{P}, \tilde{Q})$. L'ensemble $⧢(P, Q)$ est formé des matrices sans lignes nulles obtenues par cette construction.

Soit Y un second alphabet totalement ordonné, de même cardinal que X. On identifie le produit $\mathbf{MQSym}(X) \otimes \mathbf{MQSym}(X)$ à $\mathbf{MQSym}(X \boxplus Y)$ où $X \boxplus Y$ désigne la somme ordinale de X et de Y. On supposera maintenant que X et Y sont infinis dénombrables. Le morphisme naturel

$$\Delta \ : \ \mathbf{MQSym}(X) \longrightarrow \mathbf{MQSym}(X \boxplus Y) \simeq \mathbf{MQSym}(X) \otimes \mathbf{MQSym}(X) \tag{2}$$

donné par $\Delta \mathbf{MS}_M(X) = \mathbf{MS}(X \boxplus Y)$ peut alors s'interpréter comme un coproduit.

Notons $\mu \ : \ f \otimes g \longmapsto fg$ la multiplication de **MQSym**, et e la restriction à **MQSym** de l'augmentation de $T(\mathbb{K}[X]^+)$. Posons aussi $\deg(\mathbf{MS}_M) = \sum m_{i,j}$ et notons $\mathbf{MQSym}_d$ l'ensemble des éléments de degré d.

Propositition 1 $(\mathbf{MQSym}, \mu, 1, \Delta, e)$ *est une bigèbre graduée autoduale, le crochet de dualité étant donné par* $\langle \mathbf{MS}_P, \mathbf{MS}_Q \rangle = \delta_{P,{}^tQ}$.

Les dimensions des composantes homogènes de **MQSym** sont données par la formule

$$\dim(\mathbf{MQSym}_d) = \sum_{|I|=|J|=d} 2^{2d-\ell(I)-\ell(J)} \langle r_I, r_J \rangle \tag{3}$$

où r_I et r_J désignent les fonctions de Schur rubans indexées par les compositions I et J de d, et $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire des fonctions symétriques [5, 4].

A une matrice tassée P, on associe deux compositions $\mathrm{Lig}(P)$ et $\mathrm{Col}(P)$ formées respectivement des sommes par lignes et par colonnes de P. Soit Ev l'application linéaire définie par

$$\begin{aligned} \mathrm{Ev}\ :\ \mathbf{MQSym} &\longrightarrow \mathbf{QSym} \\ \mathbf{MS}_P &\longmapsto M_{\mathrm{Lig}(P)} \end{aligned}$$

Propositition 2 Ev *est un morphisme de bigèbres surjectif. Par dualité, l'application*

$${}^t\mathrm{Ev}\ :\ \mathbf{Sym} \longmapsto \mathbf{MQSym}$$

est un morphisme de bigèbres injectif.

Ainsi **MQSym** admet **QSym** comme quotient et **Sym** comme sous-algèbre.

L'algèbre des *fonctions quasi-symétriques libres* **FQSym** est définie comme la sous-algèbre de l'algèbre associative libre $\mathbb{K}\langle X\rangle$ engendrée par les éléments

$$\mathbb{F}_\sigma = \sum_{\mathrm{Std}(w)=\sigma^{-1}} w,$$

somme des mots dont le standardisé est égal à l'inverse de la permutation σ. On peut montrer que le produit $\mathbb{F}_\alpha\mathbb{F}_\beta$ est égal à la somme des $\mathbb{F}_\sigma$ où σ parcourt l'ensemble des permutations apparaissant dans le produit de mélange $\alpha \sqcup\!\sqcup \beta[p]$ de $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_p$ avec le mot $\beta[p] = (\beta_1 + p) \dots (\beta_p + p)$, et que que **FQSym** est isomorphe au dual de l'algèbre de convolution $\mathbb{K}\mathfrak{S} = \bigoplus_{n\geq 0} \mathbb{K}\mathfrak{S}_n$ étudiée dans [14]. L'algèbre associative libre $\mathbb{K}\langle X\rangle$ est naturellement une sous algèbre de $\mathbb{K}\{X\}$, les mots étant des multimots particuliers. Il apparait clairement que **FQSym** est une sous-algèbre de **MQSym**.

Elle possède une sous-algèbre remarquable **FSym**, engendrée par les *fonctions de Schur libres* $\mathbb{S}_t = \sum_{Q(\sigma)=t} \mathbb{F}_\sigma$ où $Q(\sigma)$ désigne le tableau d'insertion du mot σ dans la correspondance de Robinson-Schensted [17, 8]. L'algèbre des arbres binaires de [12] est la sous algèbre du dual $\mathbf{FQSym}^*$ engendrée par les éléments $T_{\mathcal{A}} = \sum \mathbb{F}^*_\sigma$ où la somme porte sur les permutations σ ayant le même arbre binaire $\mathcal{A}$ sous-jacent.

Soit P une matrice tassée de hauteur h. A toute composition $K = (k_1, k_2 \dots, k_p)$ de h on associe la matrice $P\rangle K$ définie comme suit. Soient $L_1, L_2, \dots, L_p$ les lignes de P. La première ligne de $P\rangle K$ est la somme des k_1 premières lignes de P, la deuxième ligne la somme des k_2 suivantes et ainsi de suite. On obtient donc une matrice de hauteur p. On pose alors

$$\phi\mathbf{S}_P = \sum_{|K|=h} \frac{1}{K!}\,\mathbf{MS}_{P\rangle K} \tag{4}$$

avec $K! = k_1!k_2!\cdots, k_p!$. La famille $\{\phi\mathbf{S}_P\}$ où P décrit l'ensemble des matrices tassées est une base homogène de **MQSym** avec $\deg(\phi\mathbf{S}_A) = |A|$.

Une matrice tassée A sera dite *connexe* si elle ne peut pas s'écrire de manière non triviale sous forme diagonale par blocs (carrés ou non).

Théorème 1 **MQSym** *est librement engendrée par la famille* $\{\phi \mathbf{S}_A\}$ *où* A *parcourt l'ensemble des matrices tassées connexes.*

Soit U un espace vectoriel de dimension N, et soit $T(S^+(U))$ l'algèbre tensorielle de l'idéal d'augmentation $S^+(U)$ de l'algèbre symétrique de U. Soit ρ la représentation naturelle de $GL(U)$ dans $\mathrm{End}(T(S^+(U)))$.

Théorème 2 *Il existe un morphisme canonique*

$$\phi \ : \ \mathbf{MQSym} \longmapsto \mathrm{End}(T(S^+(U)))$$

de **MQSym** *dans* $\mathrm{End}(T(S^+(U)))$ *muni du produit de convolution tel que pour tout entier d, l'image par* ϕ *de* $\mathbf{MQSym}_d$ *soit le commutant de* $\rho(GL(U))$ *dans la composante homogène de degré d de* $\mathrm{End}(T(S^+(U)))$. *De plus* ϕ *est injectif si* $d < N$.

Références

[1] **Carter R.W., 1986**, Representation theory of the 0-Hecke algebra, *J. Algebra*, 15, p. 89–103.

[2] **Duchamp G., Klyachko A., Krob D., Thibon J.-Y., 1997**, Noncommutative symmetric functions III : Deformations of Cauchy and convolution algebras, *Disc. Math. and Theor. Comput. Sci.*, 1, p. 159–216.

[3] **Duchamp G., Krob D., Leclerc B. et Thibon J.-Y., 1996**. Fonctions quasi-symétriques, fonctions symétriques non commutatives, et algèbres de Hecke à $q = 0$, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 322, p. 107-112.

[4] **Gelfand I.M., Krob D., Leclerc B., Lascoux A., Retakh V.-S. et Thibon J.-Y., 1995**. Noncommutative symmetric functions, *Adv. in Math.*, 112, p. 218-348.

[5] **Gessel I., 1984**. Multipartite P-partitions and inner products of skew Schur functions, [dans « Combinatorics and algebra », Greene C. éd.], *Contemporary Mathematics*, 34, p. 289-301.

[6] **Hivert F., 1998** Analogues non-commutatifs et quasi-symétriques des fonctions de Hall-Littlewood, et modules de Demazure d'une algèbre enveloppante quantique dégénérée *C. R. Acad. Sci. Paris*, 326, p. 1–6.

[7] **Lascoux A. et Schützenberger M.-P., 1981**. Le monoïde plaxique, dans Noncommutative structures in algebra and geometric combinatorics, A. de Luca éd., *Quaderni della Ricerca Scientifica del C. N. R.*, Roma.

[8] **A. Lascoux, B. Leclerc et J.-Y. Thibon**. The Plactic monoid, *dans* M. Lothaire, Algebraic combinatorics on words, *à paraître chez Cambridge Univ. Press.*

[9] **Krob D., Leclerc B. et Thibon J.-Y., 1997**. Noncommutative symmetric functions II : Transformations of alphabets, *Int. J. of Alg. and Comput.*, 7, p. 181-264.

[10] **Krob D. et Thibon J.-Y., 1997**. Noncommutative symmetric functions IV : Quantum linear groups and Hecke algebras at $q = 0$, *J. Alg. Comb.*, **6**, p. 339–376.

[11] **Knuth D.E., 1970**. Permutations, matrices and generalized Young tableaux, *Pacific J. Math.*, 34, p. 709–727.

[12] **Loday J.-L. et Ronco M., 1998**. Hopf algebra of the planar binary trees *Adv. in Math.*, 139, p. 293–309.

[13] **Macdonald I.G., 1995**. Symmetric functions and Hall polynomials, *Clarendon Press.*

[14] **Malvenuto C. et Reutenauer C., 1995**. Duality between quasi-symmetric functions and Solomon descent algebra, *J. Algebra*, 177, p. 967-982.

[15] **Norton P.N., 1979**. 0-Hecke algebras, *J. Austral. Math. Soc.*, A, 27, p. 337–357.

[16] **Sweedler M., 1969**. Hopf algebras, *W.A. Bejamin inc.*, New–York.

[17] **Poirier S. et Reutenauer C., 1995**. Algèbre de Hopf des tableaux, *Ann. Sci. Math. Québec*, 19, p. 79–90.

[18] **Thibon J.-Y. et Ung B.-C.-V., 1996**. Quantum quasi-symmetric functions and Hecke algebras, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 29, p. 7337–7348.