Travaux Dirigés de logique n^{o}3

Licence d'informatique

—Logique—

▸ Exercice 1. Quantificateurs

Soient les assertions suivantes :

1. $\exists x \in \mathbb{Z},\ \forall y \in \mathbb{Z},\ x+y>0$
2. $\forall x \in \mathbb{Z},\ \exists y \in \mathbb{Z},\ x+y>0$
3. $\forall x \in \mathbb{Z},\ \forall y \in \mathbb{Z},\ x+y>0$
4. $\exists x \in \mathbb{Z},\ \forall y \in \mathbb{Z},\ y^2>x$
5. $\forall x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, x<y \longrightarrow \exists z, x+z=y$

Ces assertions sont-elles vraies ou fausses ? Donner leurs négations.

▸ Exercice 2. Séquents avec quantificateurs

On introduit de nouveaux séquents pour les connecteurs $\exists$ et $\forall$:

$$G\forall : \frac{\Gamma, A(t), \forall x A(x) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x A(x) \Rightarrow \Delta} \qquad D\forall : \frac{\Gamma \Rightarrow A(a), \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x A(x), \Delta} \quad G\exists : \frac{\Gamma, A(a) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x A(x) \Rightarrow \Delta} \quad D\exists : \frac{\Gamma \Rightarrow A(t), \exists x A(x)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x A(x)}$$

Dériver en calcul des séquents :

1. $\forall x \forall y A(x,y) \longrightarrow \forall y \forall x A(x,y)$
2. $\exists x (A(x) \vee B(x)) \longrightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$
3. $\exists x A(x), \exists x B(x) \longrightarrow \exists x (A(x) \wedge B(x))$

▸ Exercice 3. Méthode de résolution

On représente une clause par l'ensemble de ses littéraux. On écrit donc

$$\{p, \neg q, r\} \qquad \text{au lieu de} \qquad p \vee \neg q \vee r\,.$$

La clause vide est notée $\Box$, sa valeur est toujours 0.

Soit l et $m_1, \ldots, m_p$ et $n_1, \ldots, n_q$ des littéraux. La conjonction des clauses $C_1 = \{\neg l, m_1, \ldots, m_p\}$ et $C_2 = \{l, n_1, \ldots, n_q\}$ est équivalente à la clause $C = \{m_1, \ldots, m_p, n_1, \ldots, n_q\}$. La clause C est appelée **résolvante** de C_1 et C_2. Par exemple, les clauses $\{p,q,r\}$ et $\{\neg r, s\}$ admettent $\{p,q,s\}$ comme résolvante. Les clauses $\{p\}$ et $\{\neg p\}$ admettent la résolvante $\Box$.

Dans la méthode de résolution on cherche à montrer qu'une formule F est une **antilogie**. On construit une liste de clauses que l'on enrichit progressivement en ajoutant toutes les résolvantes. On arrête l'algorithme, soit si l'on trouve la clause $\Box$ (alors la formule est une antilogie) soit parce qu'il n'est plus possible de trouver de nouvelle résolvante.

- Appliquer la méthode de résolution pour trouver lesquelles des formes normales conjonctives du TD précédent sont des antilogies.