# Travaux Dirigés de logique n°2

**Licence d'informatique**

*—Logique—*

## ▸ Exercice 1. Simplifications syntaxiques

| | | |
|---|---|---|
| Règles des constantes | $F \vee 0 = F$ | $F \wedge 0 = 0$ |
| | $F \vee 1 = 1$ | $F \wedge 1 = F$ |
| | $F \rightarrow 1 = F$ | $F \rightarrow 0 = \neg F$ |
| | $0 \rightarrow F = 1$ | $1 \rightarrow F = F$ |
| Idempotence (duplication) | $F \vee F = F$ | $F \wedge F = F$ |
| Complémentation | $F \vee \neg F = 1$ | F∧¬F=0 |
| Commutativité | $F \vee G = G \vee F$ | $F \wedge G = F \wedge G$ |
| Distributivité | $F \vee (G \wedge H) = (F \vee G) \wedge (F \vee H)$ | |
| | $F \wedge (G \vee H) = (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$ | |
| Associativité | $F \vee (G \vee H) = (F \vee G) \vee H = F \vee G \vee H$ | |
| | $F \wedge (G \wedge H) = (F \wedge G) \wedge H = F \wedge G \wedge H$ | |
| Théorèmes de De Morgan | $\neg(F \wedge G) = \neg F \vee \neg G$ | $\neg(F \vee G) = \neg F \wedge \neg G$ |
| Autres Relations | $\neg\neg F = F$ | $(F \vee G) \wedge (F \vee \neg G) = F$ |

À l'aide des règles de simplification données par le tableau, simplifier les formules suivantes :

1. $F \rightarrow F$ ;
2. $(F \wedge G) \rightarrow F$ ;
3. $((F \rightarrow G) \wedge (F \rightarrow H)) \rightarrow (F \rightarrow (G \wedge H))$ ;
4. $((G \rightarrow H) \wedge (F \rightarrow H)) \rightarrow ((F \vee G) \rightarrow H)$ ;
5. $(F \vee G) \rightarrow (F \wedge G)$
6. $F \rightarrow (F \vee G)$ ;
7. $F \rightarrow (G \rightarrow F)$ ;
8. $((F \rightarrow G) \wedge (F \rightarrow H)) \rightarrow ((G \wedge F) \rightarrow H)$ ;
9. $(F \wedge (F \rightarrow G)) \rightarrow G$ ;
10. $(\neg F \vee \neg G \vee \neg H) \rightarrow (F \wedge \neg G \wedge H)$.

## ▸ Exercice 2. Mise d'une formule en forme normale.

- On appelle **littéral** toute formule du type $x$ ou $\neg x$ où $x$ est une variable ;
- On appelle **clause** toute disjonction (OU logique) de littéraux ;
- Une formule est dite sous **forme normale conjonctive** (FNC) si elle est la conjonction (ET logique) de clauses.

On a montré dans un TD précédent que l'on peut construire une FNC pour toute table de vérité. Il existe donc pour toute formule une FNC équivalente. Mais l'on veut justement éviter de passer par la table de vérité...

Pour mettre une formule en forme normale conjonctive on procède en trois étapes :

- on fait descendre les NON le long des branches de l'arbre, à l'aide des règles de De Morgan ;
- puis, par distributivité, on fait descendre les OU ;
- enfin, par associativité, on regroupe les ET d'une part et les OU d'autre part.

Mettre en FNC les formules suivantes :

1. $\neg(F \to F)$ ;
2. $\neg((F \wedge G) \to F)$ ;
3. $\neg((F \to G) \wedge (F \to H)) \to (F \to (G \wedge H))$ ;
4. $\neg((G \to H) \wedge (F \to H)) \to ((F \vee G) \to H)$ ;
5. $\neg((F \vee G) \to (F \wedge G))$ ;
6. $\neg(F \to (F \vee G))$ ;
7. $\neg(F \to (G \to F))$ ;
8. $\neg(((F \to G) \wedge (F \to H)) \to ((G \wedge F) \to H))$ ;
9. $\neg((F \wedge (F \to G)) \to G)$.

▸ **Exercice 3. Valuation.**

- On appelle **valuation** une fonction de l'ensemble des propositions atomiques dans $\{0, 1\}$. Cette notion est étendue aux propositions et aux ensembles de propositions.
- Une proposition $P$ est **satisfaisable** si il existe une valuation $v$ telle que $v(P) = 1$.

Les ensembles de propositions suivants sont-ils satisfaisables ? Si oui, donnez une interprétation qui les satisfait.

1. $\mathcal{H}_1 = \{F \longrightarrow (G \vee H), G \longrightarrow (H \longrightarrow I), \neg I\}$
2. $\mathcal{H}_2 = \{(F \wedge G) \longrightarrow \neg H, \neg I \longrightarrow (G \vee H), (J \wedge \neg K) \longrightarrow \neg(G \wedge H),$
   $(G \vee H) \wedge \neg J \longrightarrow (F \vee I)\}$
3. $\mathcal{H}_3 = \mathcal{H}_2 \cup \{\neg((\neg J \wedge G) \longrightarrow I)\}$

▸ **Exercice 4. Calcul des séquents.** On rappelle les règles du calcul de séquents :
règle d'inférence : $\frac{\text{prémisses}}{\text{conclusion}}$

1. axiomes : séquent $\Sigma \Rightarrow \Delta$ où $\Sigma \cap \Delta \neq \emptyset$
2. 8 règles (gauche et droite pour chaque connecteur)

| | |
|---|---|
| G$\vee$ : $\frac{\Gamma, F \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, G \Rightarrow \Delta}{\Gamma, F \vee G \Rightarrow \Delta}$ | D$\vee$ : $\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, F, G}{\Gamma \Rightarrow \Delta, F \vee G}$ |
| G$\wedge$ : $\frac{\Gamma, F, G \Rightarrow \Delta}{\Gamma, F \wedge G \Rightarrow \Delta}$ | D$\wedge$ : $\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, F \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, G}{\Gamma \Rightarrow \Delta, F \wedge G}$ |
| G$\to$ : $\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, F \quad \Gamma, G \Rightarrow \Delta}{\Gamma, F \to G \Rightarrow \Delta}$ | D$\to$ : $\frac{\Gamma, F \Rightarrow \Delta, G}{\Gamma \Rightarrow \Delta, F \to G}$ |
| G$\neg$ : $\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, F}{\Gamma, \neg F \Rightarrow \Delta}$ | D$\neg$ : $\frac{\Gamma, G \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg G}$ |

Dériver en calcul des séquents :

1. $((F \longrightarrow G) \longrightarrow F) \longrightarrow F$
2. $\neg(F \wedge G) \longrightarrow \neg F \vee \neg G$
3. $((F \longrightarrow G) \longrightarrow H) \longrightarrow ((H \longrightarrow F) \longrightarrow (I \longrightarrow F))$