Travaux Dirigés de logique n°1

Licence d'informatique

—*Logique*—

▸ Exercice 1. Opérateurs logiques n-aires

1. Combien y a-t-il d'opérateurs logiques unaires (à une seule entrée) ? Donner leurs tables de vérité et proposer des noms.
2. Combien y a-t-il d'opérateurs logiques binaires (à deux entrées) ? Donner leurs tables de vérité. Retrouver dans le tableau les connecteurs ET, OU, NON-ET, NON-OU, OU-EXCLUSIF, VRAI et FAUX.
3. Combien y a-t-il d'opérateurs logiques n-aires (à n entrées) ?

On définit le connecteur IMPLIQUE ($\rightarrow$) par sa table de vérité :

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

4. Donnez à l'aide des connecteurs NON et OU une formule ayant la même table de vérité.

▸ Exercice 2. Tables de vérité

1. Donner la table de vérité des formules suivantes :
   (a) $A \rightarrow (\neg B)$
   (b) $A \rightarrow (B \wedge C)$
   (c) $A \rightarrow A$
   (d) $(A \wedge B) \rightarrow A$
   (e) $A \rightarrow (A \vee B)$
   (f) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
   (g) $((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge C))$
   (h) $((B \rightarrow C) \wedge (A \rightarrow C)) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)$
   (i) $(A \vee B) \rightarrow (B \wedge A)$
   (j) $(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$
   (k) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
   (l) $((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)) \rightarrow (B \wedge A) \rightarrow C)$
2. Lesquelles sont des tautologies ?

▸ Exercice 3. Considérons la table de vérité suivante :

A	0	0	0	0	1	1	1	1
B	0	0	1	1	0	0	1	1
C	0	1	0	1	0	1	0	1
?	0	1	0	0	1	0	1	0

1. Trouvez une formule correspondant à cette table.
2. Proposer une méthode générale (même naïve) pour trouver une formule qui réalise une table quelconque.

▸ **Exercice 4. Équivalence de connecteurs**

Dans l'exercice précédent, on a reconstruit n'importe quel opérateur à partir de NON, OU et ET. On dit que l'ensemble de ces trois opérateurs est complet.

1. Peut on se passer de l'un de ces opérateurs ?

Un ensemble complet où tous les opérateurs sont nécessaires est dit minimal.

Nous allons montrer que l'on peut réaliser n'importe quel opérateur logique avec seulement l'opérateur NAND (NON-ET).

2. Donner la table de vérité de l'opérateur NAND.
3. Montrer que l'on peut réaliser les opérateur NON, OU et ET en utilisant seulement des NAND.
4. En déduire que NAND est un connecteur complet.
5. Application : réaliser le XOR en utilisant seulement des NAND.

Soit les tables de vérité suivantes :

A	B	$A * B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

A	B	$A\#B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

6. Les opérateurs $*$ et $\#$ sont-ils des opérateurs complets ?