

UNIVERSITÉ — — PARIS-EST

THÈSE

pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS-EST

Automates cellulaires : dynamiques, simulations, traces

Spécialité **informatique**

École doctorale ICMS

Soutenue publiquement par **Pierre Guillon**

le **24 novembre 2008**

JURY :

Madame Marie-Pierre BÉAL	Université Paris-Est	<i>examinatrice</i>
Madame Valérie BERTHÉ	Université de Montpellier	<i>examinatrice</i>
Monsieur Julien CERVELLE	Université Paris-Est	<i>directeur de thèse</i>
Monsieur Enrico FORMENTI	Université de Nice-Sophia-Antipolis	<i>directeur de thèse</i>
Madame Nataša JONOSKA	University of South Florida (États-Unis)	<i>rapporteuse</i>
Monsieur Luciano MARGARA	Università di Bologna (Italie)	<i>rapporteur</i>
Monsieur Jacques MAZOYER		<i>invité</i>

Je remercie tous ceux qui ont permis cette thèse. Merci à mes encadrants, à mes rapporteurs, aux membres de mon jury. Merci aux professeurs et directeurs de stage qui ont pu m'aiguiller vers ce domaine passionnant.

Je remercie également tous ceux qui ont influencé, plus ou moins consciemment, mon travail. Merci à tous les participants aux rencontres FRAC, à tous les chercheurs français et étrangers avec qui j'ai pu discuter. Merci à tous les membres, de domaines variés, du laboratoire d'informatique Gaspard-Monge, qu'ils m'aient fait part de leurs thématiques, m'aient initié aux sports de roulettes ou m'aient aidé sur des points techniques ou administratifs précis.

Je remercie enfin tous ceux que j'ai pu côtoyer pendant ces trois années et demie. Merci à mes amis de Paris ou d'ailleurs, à ma fanfare, à mes colocataires de trois ans ou d'une semaine. Merci à ma petite famille dont la maison m'a permis des pauses agréables, ainsi qu'à ma famille élargie, pour sa présence à Paris.

Table des matières

Introduction	7
Notations	13
1 Systèmes dynamiques	17
1.1 Systèmes dynamiques discrets	17
1.2 Simulation	18
1.3 Opérations sur les systèmes	20
1.4 Propriétés immédiates	22
1.5 Dynamiques simples	22
1.6 Transitivité, récurrence	24
1.7 Chaînes	26
1.8 Équicontinuité	27
1.9 Expansivités	28
1.10 Ensembles limites	28
1.11 Entropie	32
1.12 Systèmes symboliques	33
2 Décalages	39
2.1 Sous-décalages	39
2.2 Morphismes	41
2.3 Opérations sur les sous-décalages	43
2.4 Soficité	45
2.5 Type fini	48
2.6 Propriété des sous-décalages	51
3 Systèmes symboliques et trace	61
3.1 Automates cellulaires	61
3.2 Simulation cellulaire	62
3.3 Opérations sur les systèmes symboliques	64
3.4 Tracés	65
3.5 Tracés d'automates cellulaires	68
3.6 Classification symbolique	72
3.7 D'autres systèmes symboliques	76
4 Dynamique des systèmes symboliques	79
4.1 Propriétés immédiates	79
4.2 Dynamiques simples	81
4.3 Transitivité, récurrence	85
4.4 Chaînes	86

4.5	Équicontinuité	88
4.6	Expansivités	90
4.7	Ensembles limites	94
4.8	Entropie	100
5	Traçabilité	103
5.1	Polytracés	103
5.2	Tracés partiels	107
5.3	Tracés	110
5.4	Bitracés	116
5.5	Autres sous-décalages remarquables	120
6	Décidabilité	123
6.1	Nilpotence et premières conséquences.	123
6.2	Simulation	126
6.3	Tracés	129
6.4	Décidabilité des systèmes sofiques	131
	Conclusion	137
A	Caractérisations dynamiques	147
A.1	Propriétés symboliques	147
A.2	Propriétés immédiates	148
A.3	Dynamiques stables	149
A.4	Dynamiques chaotiques	150
B	Implications entre notions dynamiques	151
C	Simulations, traces & dynamiques	155
D	English summary	157
D.1	Introduction	157
D.2	Dynamical systems and cellular automata	158
D.3	Traces	159
D.4	Topological dynamics and traces	160
D.5	Traceable subshifts	162
D.6	Decidability	163
D.7	Generalizations... and restrictions	164

Introduction

LES fourmis construisant une fourmilière, les neurones qui se transmettent l'influx nerveux dans le cerveau, les machines connectées par un réseau, les automobilistes se tamponnant dans un embouteillage, sont autant d'éléments petits et stupides qui, malgré la faible portée de leurs interactions, parviennent à former des systèmes très complexes. Comment une telle complexité peut-elle naître d'objets aussi basiques ? Cette question est le point commun entre de nombreux domaines scientifiques : mécanique des fluides, chimie des turbulences, cristallographie, biologie cellulaire, sciences cognitives, dynamique des sociétés, réseaux informatiques. En découlent de nombreux problèmes de modélisation, mais surtout, au-delà, un objet d'étude plus général : la théorie des systèmes complexes.

Automates cellulaires. John von Neumann, tentant de comprendre ces règles primitives qui permettent l'organisation de formes complexes, fut le premier à définir un automate cellulaire à la fin des années quarante [1]. Intéressé par l'idée de l'autoréplication des robots, il adapte l'univers discret dans lequel son collègue Stanisław Ulam modélise la croissance des cristaux. Il en résulte une grille bidimensionnelle dont chaque cellule peut prendre un état parmi vingt-neuf possibles, état qui va évoluer à chaque instant en fonction de l'état de ses plus proches voisines. Cette définition est donc très simple, et le sera encore plus avec les variantes de Codd [2] ou Langton [3]. Elle laisse cependant déjà apparaître des comportements étranges, tel que des motifs particuliers qui sont capables de se reproduire eux-mêmes indéfiniment.

Cette idée d'univers discret conduisit Konrad Zuse à penser en 1967 que les lois de la physique sont régies par un gigantesque automate cellulaire, créant ainsi la physique digitale [4]. Mais c'est surtout dans les années soixante-dix que les automates cellulaires seront popularisés, par le « jeu de la vie » de John Conway [5]. Il consiste en des cellules qui naissent, survivent ou meurent en fonction du nombre de leurs voisines. Avec une règle là encore très simple, on parvient à des structures pouvant avoir une évolution étrange ; ce phénomène sautera rapidement aux yeux de la communauté informatique naissante, sa simplicité en faisant un exercice classique de programmation. Il sera formulé par Stephen Wolfram au début des années quatre-vingts sous la forme d'une classification des automates cellulaires élémentaires. Ce dernier calcule, pour des configurations initiales typiques – en donnant à chaque cellule un état aléatoire – une portion finie mais significative du diagramme espace-temps, qui représente l'évolution de la configuration, et classe son aspect visuel en quatre classes : soit on atteint une configuration particulière en un temps fini, soit on boucle sur un ensemble fini de configurations, soit l'évolution semble aléatoire, soit l'évolution est complexe, mais fait émerger des structures particulières. Cependant, cette caractérisation n'est qu'empirique et souligne l'absence de formalisation.

Fonction globale. Les travaux formels sur les automates cellulaires ont commencé peu après leur définition, notamment en ce qui concerne les propriétés immédiates de la règle comme la surjectivité, caractérisée par Moore et Myhill au début des années soixante [6, 7]. Nous étudierons brièvement ces notions simples dans 4.1. Certains cas très particuliers de règles locales sont déjà très significatives vis-à-vis du type de comportement, comme la permutivité [8] (*cf* section 4.6), l'additivité, qui constitue une classe assez simple, mais très restreinte, dont on atteint peu à peu, avec [9, 10], une grande compréhension.

Un problème assez important est de comprendre si d'autres propriétés, un peu moins évidentes, pourraient être «vues» depuis la table de la règle locale, comme les expansivités, pour lesquelles les configurations distinctes ont toujours des orbites éloignées.

Décidabilité. En effet, la plupart des comportements plus intéressants ne peuvent être algorithmiquement prévus depuis la donnée d'un automate cellulaire. Cette question a été beaucoup développée par Jarkko Kari à partir des années 90 [11]. On s'aperçoit alors que les dynamiques à long terme les plus simples [12], ainsi que jusqu'aux propriétés immédiates pour les automates cellulaires bidimensionnels [13], ne sauraient être prévus en regardant la règle locale. Dans [14], il prouve que l'on ne peut rien prévoir sur la structure à long terme de l'ensemble des configurations. Cependant, ce résultat ne concerne que les configurations elles-mêmes et non leur dynamique. Nous verrons dans le chapitre 6 deux tentatives d'intégrer l'évolution dans les résultats d'indécidabilité sur le comportement à long terme.

D'autre part, l'indécidabilité de l'atteignabilité d'une configuration finie à partir d'une autre a amené une première tentative de formalisation de la classification de Wolfram, par Karel Čulik et Sheng Yu [15]. Suivirent d'autres notions de complexité, qui se focalisent sur divers problèmes de vérification des trajectoires, et qui amènent des notions d'universalité qui, elles, ne sont pas universelles (*cf* [16, 17, 18]).

Calcul. Les problèmes de prédictibilité de la dynamique impliquent un modèle de calcul de référence, la machine de Turing. À l'inverse, les automates cellulaires peuvent être vus, eux aussi, comme un modèle de calcul. La puissance de calcul, déjà sous-entendue par von Neumann, est rapidement formulée comme la possibilité de simuler une machine de Turing universelle, comme pour le jeu de la vie [19]. Néanmoins, cette vision du calcul se démarque, par son caractère parallèle, de celle de Turing, qui correspond à une évolution en une unique cellule. Elle a amené de nombreux travaux algorithmiques, comme le test de primalité de Fischer [20], la reconnaissance de langages [21, 22], mais également des problèmes dont la définition-même implique directement le parallélisme, comme la synchronisation des fusiliers, présentée en 1964 par Moore et Myhill [23], et dont la plus petite solution connue a été trouvée dans [24].

Simulation. Mais au-delà de cette capacité de calcul «classique», apparaît bientôt une notion plus générale, basée sur la comparaison entre les dynamiques de deux automates cellulaires. Cela amène aux définitions de simulation «cellulaire» et d'universalité «intrinsèque», dont les prémisses peuvent être trouvés chez Banks [25], et qui ont été peu à peu simplifiées dans [26, 27], puis utilisées dans le cas du jeu de la vie dans [28]. Ce concept sera vraiment formalisé autour de la notion de «groupage» dans [29, 30, 31]. On voit en particulier que le simulant a au moins la capacité de calcul du simulé. Beaucoup de questions s'ajoutent alors ; en particulier, quels types de dynamiques vont-ils être préservés ? par quels types de simulations ? Nous nous pencherons sur certaines d'entre elles dans le chapitre 4.

Systèmes dynamiques. On peut étudier les dynamiques à long terme sans se baser sur la prédictibilité du comportement, mais en se rattachant à un aspect métrique : on formalise l'éloignement ou le rapprochement relatif des orbites, *i.e.* des déplacements des objets. Gustav Hedlund le premier rattacha, par une caractérisation élégante [32], les automates cellulaires à la théorie des systèmes dynamiques. Celle-ci tente, depuis les travaux d'Henri Poincaré [33], de représenter l'évolution d'objets avec une approche topologique : le principe de base est qu'une petite variation initiale de l'objet ne peut avoir un grand effet sur son évolution à court terme. Les automates cellulaires, dont la règle locale ne peut influencer les cellules trop loin d'elles, rentrent bien dans ce cadre ; le temps comme l'espace sont alors discontinus et l'on définit une distance entre deux configurations : plus un grand nombre de cellules centrales ont des états identiques entre les deux configurations, plus celles-ci sont considérées comme proches.

Ce formalisme a pu, surtout à partir de la fin des années quatre-vingt, être utilisé dans la quête vers une notion pertinente de complexité, motivée notamment par l'informalisme de la classification de Wolfram. Les notions de sensibilité aux conditions initiales, de transitivité, d'expansivité peuvent maintenant être

adaptées d'une manière que nous rappelons dans les chapitres 1 et 4. Karel Čulik, Jan Pacll et Sheng Yu étudient les ensembles limites, qui rassemblent les configurations présentes arbitrairement longtemps lors de l'évolution [34]. Mike Hurley précise ce concept en présentant une classification qui se base sur le nombre d'attracteurs, *i.e.* les zones de l'espace qui attirent les orbites [35]. Gilman introduit une classification dont le point central est l'équicontinuité, mais qui se base sur une mesure [36]. L'idée d'étudier l'évolution des automates cellulaires en munissant l'espace des configurations d'une mesure entraîne une adaptation de la classification de Wolfram pour presque toutes les orbites, par Shin'ichirou Ishii, puis l'introduction progressive d'une approche ergodique [37, 38].

Dynamique topologique. Dans le contexte des systèmes dynamiques, les comportements les plus simples sont la nilpotence (stabilisation en un unique point) ou la pré périodicité, que nous mentionnerons en section 4.2. Nous nous intéresserons ensuite à diverses notions rendant compte d'une grande stabilité, comme l'équicontinuité (*cf* section 4.5), qui impose que des configurations proches aient des orbites proches. Nous considérerons également des concepts ayant trait à un certain chaos du système, comme les transitivités (*cf* section 4.3), qui voient les orbites de n'importe quelle région pouvoir en atteindre n'importe quelle autre, ou encore les expansivités (*cf* section 4.6). Le désordre des configurations peut également être mesuré par une certaine valeur, l'entropie (*cf* section 4.8), ou par le comportement des chaînes (*cf* section 4.4), orbites qui peuvent faire une petite erreur à chaque itération. Enfin, nous considérerons les ensembles limites et asymptotiques, qui rendent compte du comportement à long terme des systèmes. Toutes ces notions admettent des formalisations plus précises dans le cadres des automates cellulaires, qui tirent pleinement partie de la topologie de Cantor et du fait que la proximité de deux configurations peut s'y lire dans l'égalité des états des cellules centrales. Cette remarque a d'ailleurs motivé un nouveau type d'étude, basé sur la dynamique symbolique.

Dynamique symbolique. Dans les années quatre-vingt-dix, Petr Kůrka relie les automates cellulaires à la dynamique symbolique dans [39]. Son approche est basée sur les tracés, séquences d'états qui représentent la succession des ensembles traversés par une orbite, pris dans une partition donnée : on observe l'évolution du système, non plus exactement, mais avec une certaine imprécision, qui peut représenter les erreurs faites par un instrument de mesure.

Ce principe est sans doute né de l'étude des flots géodésiques par Jacques Hadamard à la fin du XIX^{ème} siècle [40]. Réutilisée dans la définition du billard d'Artin dans les années vingt, la «dynamique symbolique» prit son nom avec le livre éponyme de Marston Morse et Gustav Hedlund une quinzaine d'années plus tard [41]. Après l'utilisation des sous-décalages de type fini en théorie de l'information par Claude Shannon, le domaine fut popularisé par la preuve du théorème de Sarkovski. Cette étude des mots infinis et de leurs décalages, qui s'appuie sur la théorie des langages, des automates, des graphes, en gardant un fort ancrage topologique, trouve, à l'aube de l'ère internet, des applications prometteuses dans la théorie des codes, comme souligné par le livre de référence de Douglas Lind et Brian Marcus en 1995 [42].

Tracés. Dans le cas des automates cellulaires vus à travers la topologie de Cantor, un tracé correspond à cacher les cellules qui sont trop éloignées du centre, et à ne regarder évoluer que les cellules centrales. La succession des états pris par ce groupe central de cellules est liée par une factorisation topologique, *i.e.* avancer d'une lettre dans la lecture de ce mot infini correspond à appliquer une étape de notre système. On peut maintenant classifier les automates cellulaires en fonction du langage des motifs finis apparaissant dans le tracé : fini, rationnel ou autre. C'est l'objet de la nouvelle classification de Kůrka, qu'il compare dans [43] avec des versions raffinées de celles de Gilman et de Hurley. En y ajoutant les systèmes de type fini, pour lesquels les tracés sont des ensembles de mots infinis évitant un nombre fini de motifs finis, on obtient un raffinement assez intéressant, ainsi que des généralisations de résultats connus sur les sous-décalages (*cf* section 3.6).

Les tracés sont donc des ensembles de mots infinis ; munis de la fonction de décalage, on peut les voir comme de nouveaux systèmes dynamiques. Comment se comportent-ils en fonction du système de départ ? Certaines propriétés se transmettent aux systèmes tracés : on peut donc les observer, même avec un instrument de mesure imprécis. C'est le cas par exemple des dynamiques simples comme les nilpotences ou les préperiodicités (*cf* section 4.2), mais aussi des propriétés faisant intervenir les orbites partant d'ouverts, les transitivités (*cf* section 4.3).

Tracés d'automates cellulaires. Les automates cellulaires sont basés sur une règle locale : les cellules ne voient qu'un voisinage fini d'un diamètre fixé, en fonction duquel elles vont évoluer. Ce diamètre s'avère être une largeur caractéristique pour l'observation des tracés. En effet, ce tracé lui-même laisse faire apparaître la règle locale. Cette remarque rejoint des travaux de François Blanchard et Alejandro Maass sur les automates cellulaires unilatères [44, 45]. Tous les tracés peuvent en fait être reconstruits à partir de ce tracé particulier en utilisant des chevauchements de sous-décalages, implicitement utilisés dans les résultats de Pietro di Lena [46, 47]. On peut alors se demander si certaines propriétés ne sont pas transmises du tracé à l'automate cellulaire. C'est le cas pour des comportements qui peuvent se ramener à des propriétés simples comme la nilpotence ou la surjectivité, comme nous le verrons dans le chapitre 4. La question reste ouverte pour des liens plus complexes, comme les transitivités, l'entropie, la simulation d'un autre automate cellulaire, comme nous le soulignerons dans la section 3.5.

Plus généralement, on peut déjà se demander si, étant donné un tracé potentiel, il est possible de reconstruire l'automate cellulaire correspondant. En d'autres termes, en partant de l'observation d'un phénomène à travers un instrument de mesure imprécis, peut-on en retrouver un phénomène qui peut l'expliquer ? Une réponse partielle sera apportée dans le chapitre 5.

Dynamique invariante par décalage. La topologie de Cantor présente la particularité qu'un système à la définition aussi simple qu'un décalage de toutes les cellules vérifie les propriétés qu'on rapprocherait du chaos. De nombreux travaux ont tenté d'intégrer l'idée qu'un tel automate cellulaire, dont le diagramme espace-temps ne nous surprend pas, devrait être classé parmi les systèmes simples. [48] adapte la notion de transitivité pour que le décalage ne la vérifie plus. [49, 50] définissent une nouvelle topologie, dite de Besicovitch, qui n'est plus basée sur la différence des états des cellules centrales, mais sur une densité des différences sur l'ensemble de la configuration. Plus récemment, [38] adapte la classification à base d'équicontinuité en raisonnant à composition par le décalage près, ce qui permet d'étudier réellement l'effet d'une règle locale sans se soucier de la cellule où elle est ancrée. De nombreuses questions demeurent sur le comportement de différentes propriétés dans cette vision qui s'abstrait du décalage.

Plan

Le premier chapitre définit les systèmes dynamiques, les systèmes symboliques et donne, dans un cadre très général, les définitions de notions de dynamique et de simulation qui vont guider les chapitres suivants.

Le deuxième chapitre définit les sous-décalages, systèmes symboliques particuliers, insiste sur leur lien avec la théorie des langages et la théorie des graphes ; nous verrons également les notions de simulations et d'universalité correspondantes.

Le troisième chapitre insiste sur les spécificités des systèmes symboliques et en particulier des automates cellulaires ; on y définit notamment les simulations cellulaires, ainsi que les tracés, sous-décalages particuliers correspondant à l'observation des systèmes symboliques, qui amènent aux notions de systèmes sofiques ou de type fini.

Le quatrième chapitre repasse en revue les notions de dynamique topologique vues dans le premier chapitre, en tirant cette fois partie de la particularité des espaces symboliques ou des automates cellulaires. En particulier, on insiste sur les liens avec les traces ou les simulations cellulaires. Au long de cette présentation figurent quelques petites contributions originales, parmi lesquelles un travail sur les ensembles limite et ultime, qui a donné lieu à la publication [51].

Le cinquième chapitre étudie des conditions de traçabilité ; on se pose le problème inverse de la section précédente : étant donné un sous-décalage, est-il le tracé d'un automate cellulaire ? Cette question a donné lieu à la publication [52].

Le sixième chapitre, enfin, passe en revue différents problèmes de décidabilité – surtout d'indécidabilité – sur les automates cellulaires, parmi lesquels un théorème de Rice sur les tracés limites, amélioration de la publication [53].

Notations

Ensembles et fonctions

\mathbb{N}	entiers naturels
\mathbb{N}^*	entiers naturels non nuls $\mathbb{N} \setminus \{0\}$
\mathbb{Z}	entiers relatifs
$\mathfrak{2}$	alphabet binaire $\{0, 1\}$
\mathbb{M}, \mathbb{M}'	monoïdes commutatifs \mathbb{Z} ou \mathbb{N}
A	alphabet fini à au moins deux lettres
$\llbracket i, j \rrbracket$	ensemble des entiers entre i et j inclus
$\llbracket i, j \llbracket$, etc... ..	ensemble des entiers entre i inclus et j exclus
$\langle k \rangle$	ensemble des entiers entre $-k$ et k / entre 0 et k (cf p.35)
Y^C	complémentaire $X \setminus Y$ de Y (X provenant du contexte)
$X \sqcup Y$	union disjointe de X et Y
$ X $	cardinal de l'ensemble X
$\mathfrak{2}^X$	ensemble des parties de l'ensemble X
X^Y	fonctions de Y dans X
id_E	fonction identité sur l'ensemble E
$F _A$	restriction de F au domaine A
FG	composition $x \mapsto F(G(x))$
F^n	$n^{\text{ème}}$ itérée : id si $n = 0$, FF^{n-1} sinon
\log	logarithme binaire
$\text{d}(x, y)$	distance de Cantor (cf p.21)
$\mathcal{B}_\varepsilon(x)$	boule ouverte $\{y \mid \text{d}(x, y) < \varepsilon\}$ (cf p.17)

Langages et configurations

λ	mot vide
A^*	ensemble des mots finis sur l'alphabet A
A^+	ensemble des mots finis non vides sur l'alphabet A
u, v	mots finis de A^*
x, y	configurations de $A^{\mathbb{M}}$ (cf p.36)

$ u $	longueur du mot u , ∞ si $u \in A^{\mathbb{M}}$
u_i, x_i	lettres aux positions i du mot u / de la configuration x
$u \sqsubset w, v \not\sqsubset w$	u est sous-mot de w , pas v (cf p.36)
γu	rotation $u_1 \dots u_{ u } - 1u_0$ du mot u (cf p.109)
$U \oplus V$	enjambement de langages ou mots (cf p.44)
$\Sigma \odot \Sigma'$	chevauchement de langages, mots ou sous-décalages (cf p.44)
$\Sigma^{[l]}$	l -chevauchement (cf p.44)
\mathcal{K}_L	complexité du langage L (cf p.40)
$[W]_k, [W]$	cylindre et cylindre central (cf p.36)
$W^\infty, {}^\infty W, {}^\infty W^\infty$	configurations z telles que $z_{\llbracket ki, k(i+1) \rrbracket} \in W$ (cf p.36)
$x \oplus_i y$	enjambement des configurations (cf p.69)

Décalages

σ	décalage $(x_i)_{i \in \mathbb{M}} \mapsto (x_{i+1})_{i \in \mathbb{M}}$ (cf p.39)
Σ, Γ	sous-décalages
Σ_L	sous-décalage de langage interdit $L : \{z \mid \forall u \in L, u \not\sqsubset z\}$ (cf p.40)
$\mathcal{L}(\Sigma)$	langage de $\Sigma : \{u \mid \exists z \in \Sigma, u \sqsubset z\}$ (cf p.40)
$\mathcal{L}_k(\Sigma)$	langage d'ordre $k \in \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$ de $\Sigma : \{u \mid \exists z \in \Sigma, u \sqsubset z \text{ et } u = k\}$ (cf p.40)
$\mathcal{L}_+(\Sigma)$	langage des motifs non vides de $\Sigma : \{u \mid \exists z \in \Sigma, u \sqsubset z \text{ et } u > 0\}$ (cf p.40)
$u^{-1}\Sigma$	résiduel de u dans $\Sigma : \{z \mid uz \in \mathcal{L}_\infty(\Sigma)\}$ (cf p.40)
\mathcal{G}	graphe (V, E) (cf p.40)
$\Sigma_{\mathcal{G}}, \Gamma_{\mathcal{G}}$	système d'arcs et d'étiquettes de \mathcal{G} (cf p.41)
$E_{\mathcal{G}}, e_{\mathcal{G}}$	fonction d'étiquetage de \mathcal{G} et sa règle locale (cf p.42)
\mathcal{M}_Σ	graphe minimal représentant Σ (cf p.47)
$\pi_j, \pi_{\llbracket j, k \rrbracket}$	projections d'un mot ou d'un sous-décalage (cf p.20)
$\mathcal{A}_k(\Sigma)$	k -approximation de Σ (cf p.48)
\mathcal{C}_n	cycle de longueur $n \in \mathbb{N}^*$ (cf p.51)
$\Omega_\Sigma, \omega_\Sigma$	ensembles limite et asymptotique de (Σ, σ) (cf p.56)

Systèmes et automates cellulaires

F, G	systèmes dynamiques (SDD), symboliques (SS), automates cellulaires (AC)
$F _{A'}$	restriction du SS F au sous-alphabet A'
$\mathcal{O}_F(x), \mathcal{O}_F^+(x)$	orbite et orbite stricte du point x par F (cf p.18)
$\mathcal{O}_F, \mathcal{O}_F^*$	ensemble de toutes les orbites et biorbites par F (cf p.18)
$U \xrightarrow{j} V, U \xrightarrow{j} V$	lien d'orbite entre deux ouverts : $F^j(U) \cap V \neq \emptyset$ (cf p.18)
$F \times G, \prod_{0 \leq i < l} F_i$	système produit (cf p.20)
$F^{(n)}$	puissance $n^{\text{ème}}$ du système : $F \times F \times F \dots \times F$ (cf p.20)

$\pi_j, \pi_{\llbracket j, k \rrbracket}$	projection $j^{\text{ème}}$ / suivant l'intervalle $\llbracket j, k \rrbracket$ d'un espace ou d'un système (cf p.20)
\otimes_{Φ}	produit-extension de l'espace ou du système relativement à la factorisation Φ (cf p.21)
$\bigotimes_{(\Phi_i)_{i \in \mathbb{N}}}$	extension limite d'une suite de systèmes relativement aux factorisations $(\Phi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ (cf p.21)
$k \times (X, F)$	clonage du système (X, F) (cf p.21)
$\Omega_F(X')$	ensemble limite de X' par F (cf p.29)
$\Omega_F, F _{\Omega}$	ensemble et système limites de F (cf p.29)
ω_F	ensemble asymptotique de F (cf p.30)
$\mathcal{A}_l(A, F) = (\mathcal{A}_l^F, \mathcal{A}_l F)$	espace des 2^{-l} -chaînes de (A, F) (cf p.86)
r_k, f_k	rayon et règle du segment de rayon k d'un SS F (cf p.36)
f, g	règles locales des AC F, G (cf p.41)
\boxplus_m, \boxminus_m	mémorisation et groupage de sous-décalage (cf p.43)
$F_{\boxplus_m}, F_{\boxminus_m}$	mémorisé et groupé horizontaux (cf p.64)
F_{\boxplus_n}	mémorisé vertical (cf p.64)
$F_{\boxplus_m, n}, F_{\boxminus_m, n}$	mémorisé et groupé horizontaux et verticaux (cf p.64)
$\boxtimes_h G$	dégroupé de G (cf p.108)
$F_1 +_{\phi} F_2$	ϕ -amalgamé (cf p.65)
$T_F^{\mathcal{P}}, \tau_F^{\mathcal{P}}$	trace et tracé relatifs à la partition \mathcal{P} (cf p.65)
$T_F^{*\mathcal{P}}, \tau_F^{*\mathcal{P}}$	bitrace et bitracé relatifs à la partition \mathcal{P} (cf p.65)
$T_F^{\llbracket i, i+k \rrbracket}, \tau_F^{\llbracket i, i+k \rrbracket}$	factorisation et facteur colonnes relatifs aux cellules $\llbracket i, i+k \rrbracket$ (cf p.68)
T_F, τ_F	trace et tracé relatifs à la cellule centrale (cf p.68)
T_F^k, τ_F^k	trace et tracé relatifs aux cellules $\llbracket 0, k \rrbracket$ (cf p.68)
τ_F^*	bitracé de F (cf p.99)
τ_F^{Ω}	tracé limite de F (cf p.99)
$\overset{\circ}{\tau}_F$	polytracé de F (cf p.104)
$\overset{\circ}{\tau}_F^*$	bipolytracé de F (cf p.119)
$F_{\wedge 0^k}$	automate cellulaire modifié pour que 0^k soit envahissant (cf p.62)
F^*	retourné de F (cf p.92)
$\tilde{d}, \tilde{m}, \tilde{m}'$	diamètre, ancre, anticipation centrés d'un automate cellulaire (cf p.69)
$F + \xi$	prolongement par $\xi : A \rightarrow A$ d'un automate cellulaire $F : A^{\mathbb{M}} \rightarrow A^{\mathbb{M}}$ (cf p.111)
$F + 0^l$	prolongement par 0^l d'un automate cellulaire $F : A^{\mathbb{M}} \rightarrow A^{\mathbb{M}}$ (cf p.111)
$F \otimes_{(0, A_1)} (N, N')$	produit contrôlé d'un amalgamé F par N et N' (cf p.126)

Chapitre 1

Systemes dynamiques

LES systemes dynamiques sont les modelisations mathematiques d'objets evoluant selon des lois precises. On distingue les systemes dynamiques a temps continu, regis par des equations differentielles, et les systemes dynamiques a temps discret, ou l'evolution d'un objet est vue a chaque instant comme dependant de sa position a l'instant precedent. Nous nous interessons ici a ce deuxieme sujet, pour lequel l'evolution a chaque instant est donnee par une fonction continue de l'espace des objets dans lui-meme, que l'on itere pour obtenir leurs trajectoires.

Parmi les systemes dynamiques discrets les plus etudies, on peut citer les fonctions continues de l'intervalle reel $[0, 1]$; en particulier la fonction logistique ou la transformation du boulanger produisent des evolutions etonnantes. On pourra notamment se referer a [54, 55]. Dans ce chapitre, nous donnons les principales definitions relatives aux systemes dynamiques discrets en toute generalite et aux divers comportements qu'ils peuvent faire apparaître, qui guideront notre etude de systemes particuliers dans les chapitres suivants.

1.1 Systemes dynamiques discrets

Definition 1.1.1 (SDD).

- Un **systeme dynamique discret** (SDD) est un couple (X, F) ou X est un espace *metrique compact* non vide, appele **espace des phases** et $F : X \rightarrow X$ une fonction *continue*. Lorsque X peut être compris facilement du contexte, on notera simplement F .
- Un ensemble $Y \subseteq X$ est **F -invariant** (resp. **fortement F -invariant**, **F -rentrant**) si $F(Y) \subseteq Y$ (resp. $F(Y) = Y$, $F(\bar{Y}) \subseteq \overset{\circ}{Y}$). Il est **F -preinvariant** (resp. **fortement F -preinvariant**) si $F^{-1}(Y) \subseteq Y$, ou, de maniere equivalente, Y est F -invariant (resp. $F^{-1}(Y) = Y$, *i.e.* Y et Y^C sont F -invariants).
- $(Y, F|_Y)$ est un **sous-systeme** de (X, F) si $Y \subset X$ est un *ferme F -invariant*. La restriction de F sur l'ensemble Y est alors notee $F|_Y : Y \rightarrow Y$
 $x \mapsto F(x)$. Un SDD (X, F) est **minimal** s'il ne contient aucun sous-systeme strict, *i.e.* tout ferme $Y \subset X$ F -invariant est soit \emptyset , soit X .

Notons que si Y est F -invariant, alors $(\bar{Y}, F|_{\bar{Y}})$ est un *sous-systeme*.

On notera dl la distance definie sur X ; la boule ouverte de centre $x \in X$ et de rayon $\varepsilon > 0$ sera notee $B_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$.

Par la suite, syntaxiquement, un SDD (X, F) heritera des proprietes de sa fonction : par exemple, il est **ouvert** si l'image par F de tout ouvert de X est ouverte. Lorsque cela ne prete pas a confusion, il heritera egalement des proprietes de son espace des phases : par exemple, il est **parfait** si X n'admet aucun point isole, *i.e.* aucun singleton n'est ouvert.

Bien sûr, les itérés (X, F^j) d'un SDD (X, F) , où $j \in \mathbb{N}$, sont également des SDD. On dit alors que F est une **racine** $j^{\text{ème}}$ de F^j . En général, un SDD admet de nombreuses racines $j^{\text{èmes}}$. On rappelle d'autre part que la compacité permet aux SDD *bijectifs* d'être **réversibles**, *i.e.* leur *inverse* est toujours un SDD.

Orbites. Les orbites sont les séquences de points de l'espace des phases qui représentent les trajectoires des objets par le SDD.

Définition 1.1.2 (Orbite). Soit (X, F) un SDD.

- La **F -orbite** du point $x \in X$ est la séquence des points $F^j(x)$ quand la **génération** $j \in \mathbb{N}$ augmente. Par abus de langage, l'orbite désignera également l'ensemble $\mathcal{O}_F(x) = \{F^j(x) \mid j \in \mathbb{N}\}$ correspondant ; on notera $\mathcal{O}_F^+(x) = \{F^j(x) \mid j \in \mathbb{N}^*\}$ l'orbite à partir de la génération 1. $\mathcal{O}_F(Y)$ (resp. $\mathcal{O}_F^+(Y)$) représente l'union $\bigcup_{x \in Y} \mathcal{O}_F(x)$ (resp. $\bigcup_{x \in Y} \mathcal{O}_F^+(x)$) des orbites pour $Y \subset X$ et \mathcal{O}_F l'ensemble de toutes les orbites.
- Si F est surjectif, on définit une **F -biorbite** de $x \in X$ comme étant une séquence $(x^j)_{j \in \mathbb{Z}}$ telle que $x^0 = x$ et pour toute génération $j \in \mathbb{Z}$, $x^{j+1} = F(x^j)$. L'ensemble des F -biorbites sera noté \mathcal{O}_F^* .

Notons que la clôture $\overline{\mathcal{O}_F(x)}$ de l'orbite de tout point x est un *sous-système* de F .

Soit (X, F) un SDD. Si $U, V \subset X$, on note $U \xrightarrow{j} V$, où $j \in \mathbb{N}^*$, si $F^j(U) \cap V \neq \emptyset$, $U \dashrightarrow V$ s'il existe une telle génération $j > 0$. On utilisera des notations semblables pour des points $x, y \in X$ à la place des ensembles U, V .

Actions. Le SDD (X, F) induit une *action* du monoïde \mathbb{N} sur l'espace des phases X par $x \mapsto F^j(x)$ où $j \in \mathbb{N}$. On peut généraliser la notion de SDD à toute action continue d'un monoïde commutatif finiment engendré sur un espace compact, comme dans [56]. Par exemple, dans le cas de SDD *bijectifs*, cette action peut être prolongée à \mathbb{Z} . Toutes les notions définies dans la suite peuvent être adaptées à ce formalisme, mais pour garder un minimum de lisibilité, nous en resterons à la définition ci-dessus.

Avant d'étudier certains systèmes dynamiques plus en détail, on va définir les notions de morphismes, de simulations, ainsi que les constructions qui permettent de les manipuler.

1.2 Simulation

Un SDD représente donc l'évolution d'objets. Mathématiquement parlant, on peut assimiler des objets qui évoluent de manière similaire. Comme en algèbre, la notion de morphisme permet de s'abstraire de l'espace des phases proprement dit et de ne se focaliser que sur sa forme relativement à l'évolution par la fonction. On veut également une notion de simulation d'un SDD par un autre qui rende compte de l'idée que toute évolution visible dans le premier l'est également dans le second.

Cette notion a connu des utilisations très diverses, parfois après avoir été bien formalisée. Les thèses [57, 30, 31] se basent sur une définition symbolique pour les automates cellulaires, à base de coloriage et de sous-alphabet. Nous donnons ici une notion de simulation générale pour les SDD, construite de manière topologique, dans la lignée des [58, 59]. Dans la section 3.2, nous en étudierons une version adaptée aux automates cellulaires, très similaire aux définitions précédemment mentionnées.

Morphismes.

Définition 1.2.1 (Morphisme de SDD).

- Un **morphisme** d'un SDD (X, F) dans un autre (Y, G) est une fonction continue $\Phi : X \rightarrow Y$ telle que $\Phi F = G \Phi$.
- Si le morphisme est *surjectif*, c'est une **factorisation**, (Y, G) est appelé **facteur** de (X, F) et (X, F) **extension** de (Y, G) .

- Si le morphisme est *bijectif*, c'est une **conjugaison** ; (X, F) et (Y, G) sont dits **conjugués**. Lorsqu'un SDD est conjugué à un SDD qui a une certaine propriété, on dira qu'il a **essentiellement** cette propriété (en suivant la terminologie de [60]).
- Une **sous-conjugaison** (resp. **sous-factorisation**) de (X, F) dans (Y, G) est une conjugaison (resp. factorisation) d'un sous-système de (X, F) dans (Y, G) . Ce dernier est alors un **sous-conjugué** (resp. un **sous-facteur**) de (X, F) .
- On appelle **endomorphisme** (resp. **automorphisme**) d'un SDD (X, F) un morphisme (resp. une conjugaison) de (X, F) dans (X, F) ; en particulier, il peut être vu lui-même comme un SDD.
- Si Φ et Ψ sont deux factorisations d'un SDD (X, F) dans des SDD (Y, G) et (Y', G') respectivement, alors Ψ est **décomposable par Φ via (Y, G)** si elle peut s'écrire $\Psi = \Phi' \Phi$, où Φ' est une factorisation de (Y, G) dans (Y', G') . Par surjectivité de Φ , une telle factorisation Φ' est alors unique.

Une conjugaison est un *homéomorphisme*, donc la conjugaison est une relation d'équivalence. Réciproquement, à tout homéomorphisme $\Phi : X \rightarrow Y$ et tout SDD (X, F) , on peut associer le SDD $(Y, G = \Phi F \Phi^{-1})$, conjugué à (X, F) . Si un morphisme Φ est *injectif*, alors $(\Phi(X), G)$ est essentiellement un *sous-système* de (Y, G) .

Bien sûr, en tant qu'applications continues, les factorisations préservent toutes les propriétés topologiques, en particulier les ensembles denses ou résiduels.

Les notions de factorisation, sous-factorisation, conjugaison, sous-conjugaison désignent les morphismes eux-mêmes, mais également les relations qui lient les deux systèmes, qui sont, chacune, transitives et réflexives et représentent donc des préordres. En effet, on peut montrer que la notion de sous-facteur peut être comprise dans deux sens puisque la relation de factorisation et de sous-système peuvent s'invertir.

Proposition 1.2.2 ([58]). *Un SDD (X, F) est sous-facteur d'un SDD (Y, G) si et seulement s'il est sous-système d'un facteur de (Y, G) .*

Fait 1.2.3. *Si Φ est une factorisation (resp. conjugaison) du SDD (X, F) dans (Y, G) , alors pour tout sous-système $(X' \subset X, F)$, $\Phi|_{X'}$ est une factorisation (resp. conjugaison) de (X', F) dans $(\Phi(X'), G)$ et pour tout sous-système $(Y' \subset Y, G)$, $\Phi|_{\Phi^{-1}(Y')}$ est une factorisation (resp. conjugaison) de $(\Phi^{-1}(Y'), F)$ dans (Y', G) .*

Simulations. Si l'on cherche à comprendre la dynamique globale à long terme d'un système, sauter des étapes peut ne pas être très important : l'itéré d'un SDD peut être considéré comme modélisant le même objet physique que le SDD de départ, mais avec une précision temporelle moindre. Ainsi, dans notre tentative de donner une notion de similitude entre les dynamiques de deux SDD, on peut définir les simulations comme des morphismes à itération près des systèmes. En outre, cela permet une grande flexibilité, en nous permettant par exemple, dans la sous-section 3.2, d'avoir un système qui simule toute une famille de systèmes.

Définition 1.2.4 (Simulation de SDD).

- Une **simulation** de **période** $n \in \mathbb{N}^*$ par **pas** de $n' \in \mathbb{N}^*$ (ou (n, n') -**simulation**) par un SDD (X, F) d'un autre (Y, G) est une *sous-factorisation* de (X, F^n) dans $(Y, G^{n'})$.
- La simulation est **directe** si $n = 1$, **totale** si $n' = 1$, **complète** si c'est une factorisation, **exacte** si c'est une sous-conjugaison.
- On dit dans ces cas que (X, F) **simule** (resp. **directement**, **totalement**, **complètement**, **exactement**) (Y, G) .

Cette notion renferme l'idée qu'un système mime le comportement d'un autre. Telle quelle, la définition reste très générale et inclut de nombreuses définitions de simulations étudiées jusqu' alors. Par exemple la «simulation uniforme» de [58] correspond à une simulation directe totale.

Une interprétation peut en être donnée en termes de calcul : si une évolution de (Y, G) représente un calcul dont l'entrée est le point initial, alors il peut être mimé par un calcul sur (X, F) via un codage des points, qui est le morphisme à proprement parler. En particulier, (X, F) a au moins la puissance de calcul de (Y, G) , à condition de rajouter des restrictions sur le morphisme pour ne pas que ce dernier «masque» la complexité du calcul. Par exemple, on pourra demander qu'il soit récursif (**simulation effective**), ou même plutôt récursif primitif (**simulation primitive**). On présentera en section 3.2 une autre restriction, la simulation cellulaire, qui s'avère particulièrement adaptée aux systèmes qui nous intéressent.

Remarque 1.2.5. Grâce à la proposition 1.2.2, on pourra faire commuter les factorisations et les restrictions de simulations composées. On obtient que la *simulation* (resp. *directe*, *totale*, *complète*, *exacte*) est un préordre.

Une généralisation possible serait de faire dépendre le pas de calcul n en fonction de l'entrée x . C'est notamment le choix fait dans [59], où l'«épisimulation» et la «monosimulation» correspondent à des simulations totales, respectivement exacte et complète, mais avec un pas variable. On peut aussi rapprocher cela de l'étude de l'équivalence d'orbites [61].

Dans la suite, on montrera que certaines propriétés sont préservées par simulation ; grâce à la transitivité de la relation, il suffira de montrer qu'elles sont préservées par factorisation, passage au sous-systèmes, itération et passage à la racine.

1.3 Opérations sur les systèmes

Diverses opérations permettent de construire un SDD à partir de SDD existants. Nous avons déjà vu que les itérations d'un SDD ou l'inversion d'un SDD injectif donnaient un nouveau SDD. Nous présentons dans cette section quelques autres constructions.

Produits.

Définition 1.3.1 (Produit et projection de fonctions).

- Si $F : X \rightarrow X'$ et $G : Y \rightarrow Y'$ sont deux fonctions, alors on peut définir leur **produit** :

$$\begin{aligned} F \times G : X \times Y &\rightarrow X' \times Y' \\ (x, y) &\mapsto (F(x), G(y)) . \end{aligned}$$

- Si $(F_i : X_i \rightarrow X'_i)_{0 \leq i < l}$ est une famille finie ou infinie de fonctions, avec $l \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on définit de manière similaire $\prod_{0 \leq i < l} F_i : \prod_{0 \leq i < l} X_i \rightarrow \prod_{0 \leq i < l} X'_i$.
 $(x_i)_{0 \leq i < l} \mapsto (F_i(x_i))_{0 \leq i < l}$.
- En particulier, on peut ainsi définir les **puissances** d'une fonction $F : X \rightarrow Y$ (à ne pas confondre avec ses itérées) : $F^{(1)} = F$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $F^{(n+1)} = F \times F^{(n)}$.
- On définit les **projections** sur $X = \prod_{0 \leq i < l} X_i$ par $\pi_j : X \rightarrow X_j$, pour $0 \leq j < l$. Les **projetés** $\pi_j(X, F) = (X_j, \pi_j(F) = F_j)$, pour $0 \leq j < l$, sont des *facteurs* de (X, F) . On étendra cette notation aux projections $\pi_{\llbracket j, k \rrbracket} : (x_i)_{0 \leq i < l} \mapsto (x_i)_{j \leq i < k}$.

Ces définitions s'appliquent bien sûr aux SDD, pour donner un **système produit**. L'espace des phases produit est alors muni de la *topologie produit* ; les produits sont donc bien des SDD par le théorème de Tychonoff.

Fait 1.3.2. Si Φ est une factorisation (resp. conjugaison, sous-factorisation, sous-conjugaison, simulation) de (X', F') dans (X, F) , alors $\tilde{\Phi} : X' \times Y \rightarrow X \times Y$ est une factorisation (resp. conjugaison, sous-factorisation, sous-conjugaison, simulation) de $(X', F') \times (Y, G)$ dans $(X, F) \times (Y, G)$.
 $(x, y) \mapsto (\Phi(x), y)$

Fait 1.3.3. Si Φ est une factorisation de (Y, G) dans (X, F) , alors (Y, G) est conjugué au système $(X, F) \otimes_{\Phi} (Y, G) = (X \otimes_{\Phi} Y, F \times G)$, où $X \otimes_{\Phi} Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid \Phi(y) = x\}$.

On s'autorisera à substituer la notation \otimes à \otimes_{Φ} lorsque la factorisation Φ sera évidente dans le contexte. Par récurrence, on peut voir que si $(X_i, F_i)_{0 \leq i \leq l}$ est une famille finie de SDD, avec $l \in \mathbb{N}$ et des factorisations $(\Phi_i : X_{i+1} \rightarrow X_i)_{0 \leq i < l}$, alors $\bigotimes_{(\Phi_i)_{0 \leq i < l}} (X_i, F_i) = (X_0, F_0) \otimes_{\Phi_0} \dots \otimes_{\Phi_{l-1}} (X_l, F_l)$ est conjugué à (X_l, F_l) .

Extensions limites. L'extension limite représente une certaine généralisation à l'infini de l'opération \otimes .

Définition 1.3.4 (Extension limite). Si $(X_i, F_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite de SDD, on définit l'**extension limite de base** $(X_i, F_i)_{i \in \mathbb{N}}$ relativement à la famille de factorisations $(\Phi_i : X_{i+1} \rightarrow X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ comme le *sous-système* $\bigotimes_{(\Phi_i)_{i \in \mathbb{N}}} (X_i, F_i) = (\bigotimes_{(\Phi_i)_{i \in \mathbb{N}}} X_i, \prod_{i \in \mathbb{N}} F_i)$ de $\prod_{i \in \mathbb{N}} (X_i, F_i)$ défini par :

$$\bigotimes_{(\Phi_i)_{i \in \mathbb{N}}} X_i = \left\{ (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i \mid \forall i \in \mathbb{N}, \Phi_i(x_{i+1}) = x_i \right\}$$

$$\prod_{i \in \mathbb{N}} F_i : (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \mapsto (F_i(x_i))_{i \in \mathbb{N}} .$$

La terminologie de limite est justifiée par le fait qu'on retrouve (modulo factorisation) la dynamique de n'importe quel SDD de la base dans celle de l'extension limite. Notons que l'on peut manipuler cette notion comme une limite puisqu'elle coïncide essentiellement avec l'extension limite de n'importe quelle sous-suite (en considérant les factorisations composées). Cependant, même si l'on parle abusivement d'extension limite d'une suite de SDD, celle-ci dépend aussi de la suite de factorisations.

Remarque 1.3.5. Chaque SDD (X_i, F_i) est donc *facteur* de l'*extension limite* (X, F) . Inversement, l'*extension limite* est (essentiellement) la plus petite *extension* de tous les systèmes de base compatible avec les factorisations correspondantes : si (X, F) est l'extension limite d'une famille $(X_i, F_i)_{i \in \mathbb{N}}$ relativement à une famille de factorisations $(\Phi_i : X_{i+1} \rightarrow X_i)_{i \in \mathbb{N}}$, (Y, G) un SDD et $(\Psi_i : Y \rightarrow X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille de factorisations vérifiant $\Psi_i = \Phi_i \Psi_{i+1}$ pour $i \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned} \Psi : Y &\rightarrow X \\ y &\mapsto (\Psi_i(y))_{i \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

est une factorisation de (Y, G) dans (X, F) .

Rappelons que l'espace produit $X = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ est muni de la topologie produit, qui est *basée* sur les préimages par les projections π_i d'ouverts des X_i . Si l'on note d_i la distance sur X_i et Φ_i la factorisation de X dans X_i , alors la topologie correspond à la distance suivante :

$$\begin{aligned} d : X &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\mapsto \sup \{ \varepsilon \in]0, 1] \mid \exists i < -\log \varepsilon, d_i(\Phi_i(x), \Phi_i(y)) > \varepsilon \} . \end{aligned}$$

Fait 1.3.6. Si (X, F) est l'extension limite d'une suite $(X_i, F_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de SDD relativement à une suite $(\Phi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de factorisations, alors pour toute famille finie $(U_j)_{0 \leq j < l}$ d'ouverts de X , avec $l \in \mathbb{N}$, il existe un SDD (X_i, F_i) de base, avec $i \in \mathbb{N}$, tel que chaque ouvert U_j est la préimage d'un ouvert par Φ_i pour $0 \leq j < l$.

Clonage. Si (X, F) est un SDD et $k \in \mathbb{N}$, alors le SDD $k \times (X, F) = ([0, k] \times X, \text{id} \times F)$ se comporte comme k clones distinctes du système (X, F) . On voit que $1 \times (X, F)$ est conjugué à (X, F) et pour tout $i < k$, $i \times (X, F)$ est un *facteur* de $k \times (X, F)$.

Groupage. La mémorisation générale d'un SDD est un moyen de voir une partie de l'évolution d'un point dans le point lui-même. Le groupage général permet d'accomplir plusieurs étapes d'évolution en une seule fois.

Définition 1.3.7 (Groupé et mémorisé généraux).

- Pour $n \in \mathbb{N}$, la n -**mémorisation générale** d'un SDD (X, F) est le morphisme injectif de (X, F) dans $(X^n, F^{(n)})$ défini par :

$$\begin{aligned} \square_n F : X &\rightarrow X^n \\ x &\mapsto (F^j(x))_{0 \leq j < n} . \end{aligned}$$

- Le n -**mémorisé général** est son système image $(\square_n F(X), F^{(n)})$.
- Le n -**groupé général** est son itéré $(\square_n F(X), (F^{(n)})^n)$.

Le mémorisé général est donc conjugué au SDD de départ – et le groupé général à son itéré –, l'application inverse étant la projection π_0 .

1.4 Propriétés immédiates

Les propriétés «en une étape» concernent le SDD en tant que fonction, *i.e.* ne font pas intervenir les itérations : la *surjectivité*, l'*injectivité*, l'*ouverture*.

On remarque que ces trois propriétés sont préservées par itération et passage à la racine (et bien sûr par inversion, le cas échéant). De plus, la sous-conjugaison préserve l'injectivité et l'ouverture, mais pas la surjectivité ; la factorisation préserve la surjectivité, mais ni l'injectivité ni l'ouverture.

Fait 1.4.1.

- La surjectivité est préservée par simulation complète.
- L'injectivité et l'ouverture sont préservées par simulation exacte.

Fait 1.4.2. Une extension limite est surjective (*resp.* injective) dès que tous ses systèmes de base le sont.

En revanche, nous verrons dans le chapitre 4 des contre-exemples d'extensions limites injectives d'une suite de systèmes non injectifs.

1.5 Dynamiques simples

Les comportements des SDD présentés dans cette section sont ceux qui peuvent être décrits en termes purement ensemblistes, avant même que la topologie n'intervienne.

Mortalité. Le premier comportement que l'on peut décrire est celui qui voit toutes les points ultimement atteindre un sous-espace donné.

Définition 1.5.1 (SDD mortel). Si (X, F) est un SDD et $U \subset X$, on dit que F est U -**mortel** si toute orbite atteint U : $\forall x \in X, x \dashrightarrow U$.

La compacité nous permet, dans le cas où U est ouvert, de borner la génération où U est atteint : si $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} F^{-j}(U)$ est un recouvrement par ouverts de X , alors on peut en extraire un fini $X = \bigcup_{0 \leq j < J} F^{-j}(U)$, où $J \in \mathbb{N}$.

Fait 1.5.2. Si F est un SDD U -mortel, où U est un ouvert F -invariant, alors il existe une génération $J \in \mathbb{N}$ telle que $F^J(X) \subset U$.

Dans le cas où U est fermé, c'est le théorème de Baire qui peut aider à borner une génération à laquelle il est atteint par un ouvert : si $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} F^{-j}(U)$ a un intérieur non vide, alors un $F^{-j}(U)$ aussi, où $J \in \mathbb{N}$.

Fait 1.5.3. Si F est un SDD U -mortel, où U est un fermé F -invariant, alors il existe une génération $J \in \mathbb{N}$ et un ouvert V tels que $F^J(V) \subset U$.

Nilpotence. Un cas particulier de la mortalité est donné quand U est un singleton invariant : l'évolution du système rassemble tous les points de l'espace des phases vers le même point, qui n'y bougent plus ; quand le temps de ce rassemblement peut être borné, on parle de nilpotence, par analogie avec la théorie des matrices.

Définition 1.5.4 (Point et SDD nilpotents). Soit (X, F) un SDD et $z \in X$ un point.

- Un point $x \in X$ est **z -nilpotent** s'il existe une génération $J \in \mathbb{N}$ telle que pour tout $j \geq J$, $F^j(x) = z$.
- F est **faiblement z -nilpotent** si tous ses points sont z -nilpotents.
- Il est **z -nilpotent** si la génération impliquée est bornée, *i.e.* il existe une génération $J \in \mathbb{N}$ telle que pour tout $j \geq J$, $F^j = \{z\}$.

On voit facilement que si z est tel qu'un point x est z -nilpotent, alors $F(z) = F^{J+1}(x) = z$, donc z est un point fixe par F .

Périodicité.

Définition 1.5.5 (Point et SDD (pré) périodiques). Soit (X, F) un SDD.

- Un point $x \in X$ est **p -périodique** (resp. **(p, q) -prépériodique**), si $F^p(x) = x$ (resp. $F^{p+q}(x) = F^q(x)$), où $p \in \mathbb{N}^*$ est la **période** (resp. et $q \in \mathbb{N}$ la **prépériode**) de x . On dira parfois simplement **p -prépériodique** ou **prépériodique**.
- F est **p -périodique** (resp. **(p, q) -prépériodique**) si tous ses points le sont, *i.e.* $F^p = \text{id}$ (resp. $F^{p+q} = F^q$).
- F est **faiblement périodique** (resp. **faiblement p -prépériodique** avec $p \in \mathbb{N}$, **faiblement prépériodique**) si tous ses points le sont.
- F est **régulier** s'il admet un ensemble *dense* de points *périodiques*.

La pré périodicité est parfois appelée **périodicité ultime**. Évidemment, la périodicité (resp. pré périodicité) d'un SDD est plus forte que sa version faible : la période (resp. et la pré période) peuvent alors être uniformisées. Les SDD périodiques sont les racines de l'identité.

Remarque 1.5.6.

- Un point est *prépériodique* si et seulement si son *orbite* est *finie*.
- Un SDD *fini* est *prépériodique*.

Proposition 1.5.7. Un SDD surjectif prépériodique est périodique.

Preuve. Soit (X, F) un SDD surjectif et (p, q) -prépériodique, avec $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}$, $x \in X$ et $y \in F^{-q}(X)$. $F^{p+q}(y) = F^q(y)$, *i.e.* $F^p(x) = x$. □

Dynamiques simples et simulation. La simplicité de ces définitions leur permet une transmission par les opérations de base sur les SDD. En effet, la périodicité, la pré périodicité et la nilpotence (resp. faible) sont préservées par factorisation, par itération, par passage à la racine et par passage au sous-système.

Fait 1.5.8.

- Toute factorisation transforme un point périodique (resp. prépériodique) en un point périodique (resp. prépériodique) de même période (resp. et même pré période) – mais possiblement une moindre période minimale.
- La périodicité, la pré périodicité (resp. faible), la nilpotence (resp. faible) sont préservées par simulation.

En revanche, ces propriétés ne peuvent se transmettre à une extension limite qu'à condition de borner uniformément les pré période et période éventuelles des systèmes de base.

1.6 Transitivité, récurrence

Dans cette section, on étudie topologiquement le comportement des orbites, en s'intéressant notamment aux ouverts qu'elles traversent.

Transitivités et mélanges. La transitivité est une notion de grande instabilité : tous les ouverts de l'espace des phases, aussi petits soient-ils, sont traversés par l'orbite d'un même point. Ce comportement est à la base de la notion de chaos topologique : il est difficile de prévoir la trajectoire des objets, puisque presque tous se rapprochent infiniment souvent de n'importe quel point.

Définition 1.6.1 (Point et SDD transitifs). Soit (X, F) un SDD.

- Un point $x \in X$ est **transitif** si son orbite est dense : $\overline{\mathcal{O}_F(x)} = X$.
- F est **transitif** si tous ouverts U et V non vides de X sont reliés par une orbite : $U \dashrightarrow V$, ou de manière équivalente, l'orbite de tout ouvert non vide est dense.
- Il est **fortement transitif** si tout ouvert U non vide et tout point y de X sont reliés par une orbite : $U \dashrightarrow y$, ou de manière équivalente, l'orbite de tout ouvert est pleine.
- Il est **faiblement mélangeant** si le produit $F^{(2)}$ est transitif.
- Il est (topologiquement) **mélangeant** si tous ouverts U et V non vides de X sont reliés par une orbite de n'importe quelle longueur suffisamment grande : $\exists n \in \mathbb{N}^*, \forall k \geq n, U \dashrightarrow_k V$.

L'intersection des ouverts U et $F^{-k}(V)$ est ouverte. Dans un système transitif, on peut donc concaténer les liens d'orbites en énumérant les ouverts d'une base jusqu'à obtenir une orbite dense.

Proposition 1.6.2 ([62]). *Tout SDD transitif est surjectif et admet un résiduel de points transitifs.*

Corollaire 1.6.3. *Toute décomposition $X = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} X_j$ d'un SDD transitif (X, F) en sous-systèmes $(X_j, F|_{X_j})_{j \in \mathbb{N}}$ contient le système tout entier $X = X_j$, avec $j \in \mathbb{N}$.*

Preuve. X étant un compact d'intérieur non vide, le théorème de Baire nous dit qu'il y a un $j \in \mathbb{N}$ tel que X_j est d'intérieur non vide. Par la proposition 1.6.2, X_j contient un point x transitif pour (X, F) , i.e. $X_j \supset \overline{\mathcal{O}_F(x)} = X$. □

On a une certaine réciproque de la proposition 1.6.2, à condition de supposer la surjectivité.

Proposition 1.6.4 ([62]). *Si (X, F) est un SDD parfait ou surjectif, alors les propositions suivantes sont équivalentes.*

1. F est transitif.
2. F admet un point transitif.
3. Pour tous ouverts $U, V \subset X$, $U \dashrightarrow V$ ou $V \dashrightarrow U$.

Le point 3 de la proposition précédente permet en particulier de remarquer qu'un SDD bijectif F est transitif si et seulement si son inverse aussi.

Pour plus de remarques et d'exemples sur la transitivité et les propriétés qui lui sont liées, dans les SDD ou les applications sur des espaces non compacts, on pourra se référer à [62].

Minimalité. Les systèmes minimaux sont ceux qui ne peuvent pas être décomposés en systèmes plus petits. Comme montré dans [63], tout SDD contient un système *minimal*. En particulier, ils sont transitifs ; on peut même voir qu'ils ne peuvent avoir que des orbites denses.

Fait 1.6.5. *Un SDD (X, F) est minimal si et seulement si tous ses points sont transitifs, i.e. $X = \overline{\mathcal{O}_F(x)}$, pour tout $x \in X$.*

D'autre part, l'injectivité peut permettre de relier les notions de minimalité et de transitivité forte.

Proposition 1.6.6 ([62]). *Un SDD injectif est minimal si et seulement s'il est fortement transitif.*

Récurrence. La récurrence rend l'idée de points qui sont presque périodiques dans le sens où l'orbite de points du voisinage y reviendra.

Définition 1.6.7 (Point récurrent et SDD autotransitif). Soit (X, F) un SDD.

- Un point $x \in X$ est **récurrent** si pour tout voisinage U de x , $x \dashrightarrow U$.
- Un point x est **autotransitif** si pour tous voisinage U, V de x , $U \dashrightarrow V$.
- F est **autotransitif** si pour tout ouvert non vide U de X , $U \dashrightarrow U$.

De manière équivalente, un point est *autotransitif* si et seulement si pour tout rayon $\varepsilon > 0$, $\mathcal{B}_\varepsilon(x) \dashrightarrow \mathcal{B}_\varepsilon(x)$; un SDD est *autotransitif* si et seulement si tous ses points le sont.

La structure d'un système autotransitif est très contrainte.

Proposition 1.6.8. *Tout point isolé d'un SDD autotransitif est périodique.*

Preuve. Supposons que (X, F) est un SDD autotransitif qui admet un point isolé $x \in X$, *i.e.* il existe un rayon $\varepsilon > 0$ tel que $\mathcal{B}_\varepsilon(x) = \{x\}$. Par définition, il existe une génération $p \in \mathbb{N}^*$ et un point $y \in \mathcal{B}_\varepsilon(x)$ tels que $F^p(y) \in \mathcal{B}_\varepsilon(x)$, *i.e.* x est p -périodique. \square

Les systèmes transitifs sont un cas particulier de systèmes autotransitifs.

Corollaire 1.6.9. *Tout SDD transitif est soit cyclique soit parfait.*

Preuve. Si (X, F) est un SDD transitif qui admet un point x isolé, alors par la proposition 1.6.2, x a une orbite dense et par la proposition 1.6.8, il est périodique de période $p \in \mathbb{N}^*$. Autrement dit, $X = \overline{\mathcal{O}_F(x)} = \{F^j(x) \mid 0 \leq j < p\}$. \square

On remarque que les points *périodiques*, ainsi que les points *transitifs*, sont *récurrents* et que les points de la clôture de l'ensemble des points *récurrents* sont *autotransitifs*. Il s'agit même d'une équivalence.

Proposition 1.6.10. *L'ensemble des points récurrents d'un SDD est un résiduel de son ensemble de points autotransitifs.*

Preuve. Soit (X, F) un SDD. L'ensemble des points récurrents peut s'écrire $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{R}_n$, avec pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{R}_n = \{x \in X \mid \exists j \in \mathbb{N}^*, d(F^j(x), x) < \frac{1}{n}\}$. \mathcal{R}_n est ouvert. De plus, si x est autotransitif et $\varepsilon = \frac{1}{2n}$, on sait par définition qu'il existe un point $y \in \mathcal{B}_\varepsilon(x)$ et une génération $j \in \mathbb{N}^*$ tels que $F^j(y) \in \mathcal{B}_\varepsilon(x)$; en particulier, $y \in \mathcal{R}_n$. L'intersection $\mathcal{R} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{R}_n$ est donc un résiduel de l'ensemble des points autotransitifs, qui est compact. On conclut donc par le théorème de Baire. \square

Pour aller plus loin dans les diverses relations qui unissent les points et les ouverts de l'espace des phases, on pourra se référer à [63].

Transitivité, récurrence et simulation. Les factorisations et les restrictions à des sous-systèmes préservent bien sûr toutes les propriétés topologiques (et ensemblistes). En particulier, par un morphisme Φ d'un SDD (X, F) à un SDD (Y, G) , les liens $U \dashrightarrow V$ par F sont transformés en liens équivalents $\Phi(U) \dashrightarrow \Phi(V)$ par G .

Au niveau des SDD, la transitivité (resp. forte), le mélange faible, la minimalité, l'autotransitivité, sont préservés par factorisation et par passage à la racine.

Fait 1.6.11. *Les transitivités, le mélange faible, la minimalité, l'autotransitivité sont préservés par simulation directe complète.*

On ne peut rien dire en général pour une simulation qui ne serait pas directe; par exemple la fonction

$$\begin{array}{ccc} \neg : \mathbb{2} & \rightarrow & \mathbb{2} \\ \varepsilon & \mapsto & 1 - \varepsilon \end{array}$$

représente un SDD transitif, mais son itérée seconde ne l'est pas.

Inversement, le mélange, qui fait intervenir toutes les générations suffisamment grandes, est préservé par itération. On peut en fait montrer, grâce à la surjectivité, qu'il est également préservé par passage à la racine (*cf* [64]).

Fait 1.6.12. *Le mélange est préservé par simulation complète.*

Les propriétés définies par des liens entre ouverts passent à l'extension limite, grâce à la topologie produit, puisque chaque ouvert peut être vu sur un système de base.

Fait 1.6.13. *Une extension limite est transitive (resp. minimale, autotransitive, mélangeante, faiblement mélangeante) si et seulement si c'est le cas pour tous ses systèmes de base.*

La transitivité forte ne rentre pas dans ce cadre puisque, contrairement à un ouvert, la configuration à atteindre ne peut être «vue» dans un des systèmes de base.

1.7 Chaînes

Les chaînes correspondent à des orbites qui peuvent faire une petite erreur à chaque étape, comme par exemple lors de la simulation d'un SDD par une machine qui ne peut pas encoder la valeur exacte de chaque point, et effectue donc un arrondi avant chaque itération. On obtient ainsi une autre notion de transitivité correspondant à des orbites pouvant aller dans tout ouvert en faisant des erreurs d'approximation.

Définition 1.7.1 (Chaîne et SDD chaîne-transitifs).

- Soit (X, F) un SDD et $\delta > 0$. Une δ -**chaîne** est une séquence $(x_j)_{j \in I}$, où I est un intervalle de \mathbb{Z} , telle que pour $j, j + 1 \in I$, $d(F(x_j), x_{j+1}) < \delta$.
- F est **chaîne-transitif** si pour tout $\delta > 0$, tous points $x, y \in X$ sont reliés par une δ -chaîne $(x_j)_{0 \leq j \leq l}$, avec $l \in \mathbb{N}$, $x_0 = x$, $x_l = y$.
- Un sous-ensemble $Y \subset X$ est **chaîne-invariant** si pour tout point $y \in Y$, tous les points $x \in X$ qui sont reliés à y par des δ -chaînes pour tout $\delta > 0$ sont dans Y .

En particulier, les SDD *transitifs* sont *chaîne-transitifs*. D'autre part, les SDD *chaîne-transitifs* sont *surjectifs*.

Pistage.

Définition 1.7.2 (Propriété de pistage).

- Soit (X, F) un SDD et $\varepsilon > 0$. Un point $x \in X$ ε -**piste** une séquence $(x_j)_{j \in I}$ où I est un intervalle de \mathbb{Z} , si pour tout $j \in I$, $d(F^j(x), x_j) < \varepsilon$.
- F a la propriété de ε -**pistage** s'il existe $\delta > 0$ tel que toute δ -chaîne finie est ε -pistée par un point $x \in X$.
- F a la propriété de **pistage** s'il a la propriété de ε -pistage pour tout $\varepsilon > 0$.

La propriété de pistage a été particulièrement étudiée dans [65]. Elle peut être vue comme une certaine stabilité vis-à-vis d'erreurs de mesure : toute observation avec une erreur d'au plus δ à chaque étape permet d'obtenir, à moins de ε près, une véritable orbite du SDD, qui ne correspond pas forcément à celle du point dont on était parti, mais d'un point de son voisinage.

Remarque 1.7.3. Si $\varepsilon > 0$, un SDD a la propriété de ε -pistage si et seulement s'il existe $\delta > 0$ tel que toute δ -chaîne infinie à droite est ε -pistée par un point $x \in X$.

La propriété de pistage représente une telle stabilité que la chaîne-transitivité peut alors se ramener à la transitivité.

Proposition 1.7.4 ([43]). *Un SDD qui a la propriété de pistage est transitif si et seulement s'il est chaîne-transitif.*

Chaînes et simulation. La continuité uniforme permet aux chaînes d'être préservées par morphisme. Il en résulte que, tout comme la transitivité, la chaîne-transitivité se transmet par factorisation et passage à la racine, mais pas par itération.

Fait 1.7.5. *La chaîne-transitivité est préservée par simulation directe complète.*

Similairement au fait 1.6.13, on peut voir qu'une extension limite est chaîne-transitive si et seulement si ses systèmes de base le sont.

La propriété de pistage, quant à elle, ne se transmet pas par factorisation, ni par sous-conjugaison, mais par passage à la racine, ainsi que par itération puisque les chaînes de F^j correspondent à des chaînes de F .

Fait 1.7.6. *La propriété de pistage est préservée par simulation exacte complète.*

Nous verrons dans le chapitre 4 un cadre dans lequel cette propriété se transmet à l'extension limite, mais ce n'est a priori pas le cas en général.

1.8 Équicontinuité

L'équicontinuité est une notion représentant une grande stabilité : en jouant sur l'erreur d'observation du point initial, on peut imposer une erreur maximale arbitrairement petite pour l'observation de toute son orbite.

Définition 1.8.1 (Point et SDD équicontinuis). Soit (X, F) un SDD.

- Si $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, un point $x \in X$ est ε -**instable** si pour tout rayon $\delta > 0$, il y a un point $y \in B_\delta(x)$ et une génération $j \in \mathbb{N}$ pour laquelle $d(F^j(x), F^j(y)) > \varepsilon$. Il est ε -**stable** sinon.
- x est **équicontinu** s'il est ε -stable pour tout $\varepsilon > 0$.
- Le SDD F est ε -**sensible** (aux conditions initiales) si tous ses points sont ε -instables, avec $\varepsilon > 0$.
- Il est **équicontinu** si pour tout rayon $\varepsilon > 0$, il existe un rayon $\delta > 0$ tel que pour tous points $x, y \in X$ avec $d(x, y) < \delta$ et toute génération $j \in \mathbb{N}$ on a $d(F^j(x), F^j(y)) < \varepsilon$.
- Il est **quasi-équicontinu** s'il admet un point *équicontinu*.
- Il est **presque équicontinu** si l'ensemble de ses points *équicontinuis* est un *résiduel*.

On peut voir facilement que l'ensemble des points *équicontinuis* est *préinvariant*.

La compacité nous permet l'inversion des deux quantificateurs.

Fait 1.8.2. *Un SDD est équicontinu si et seulement si tous ses points sont équicontinuis.*

La classes des SDD équicontinuis inclut notamment ceux qui sont prépériodiques, puisque leur comportement à l'infini est dicté par le début de leur orbite.

Proposition 1.8.3. *Un SDD prépériodique est équicontinu.*

Preuve. Soit (X, F) un SDD (p, q) -prépériodique avec $q \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$. Alors tous les itérés F^j , pour $j \in \mathbb{N}$, sont uniformément continus, *i.e.* il existe $\delta_j > 0$ tel que pour tous points $x, y \in X$ avec $d(x, y) < \delta_j$, on a $d(F^j(x), F^j(y)) < \varepsilon$. Puisque $F^j = F^{q+(j-q) \bmod p}$, on peut poser $\delta = \min_{0 \leq j < p+q} \delta_j$, de sorte que pour toute génération $j \in \mathbb{N}$ et tous points $x, y \in X$ avec $d(x, y) < \delta$, on a $d(F^j(x), F^j(y)) < \varepsilon$. \square

Sensibilité. Par définition, on voit que les systèmes sensibles sont parfaits.

Il existe des SDD qui ne sont ni sensibles, ni quasi-équicontinuis (*cf* [66]). On verra dans la suite qu'en revanche, ces deux classes partitionnent certaines familles de systèmes. C'est par exemple le cas des SDD transitifs.

Théorème 1.8.4 (Akin, Auslander, Berg). *Un SDD transitif est sensible ou presque équicontinu.*

Le mélange est encore plus restrictif, puisqu'il implique la sensibilité – sauf dans le cas dégénéré d'un singleton.

Proposition 1.8.5 ([63]). *Tout SDD mélangeant avec au moins deux points est sensible.*

Équicontinuité et simulation. Grâce à la continuité uniforme, les points d'équicontinuité sont préservés par itération et par passage à la racine ; c'est également le cas de la sensibilité. L'équicontinuité d'un système passe également aux sous-systèmes, ce qui n'est évidemment pas le cas de l'existence ni de la densité de points équicontinus.

Fait 1.8.6.

- L'équicontinuité est préservée par simulation exacte.
- La presque équicontinuité, la quasi-équicontinuité et la sensibilité sont préservées par simulation complète exacte.

Si un point d'une extension limite n'est pas stable, on peut voir que son image par une des factorisations de base ne le sera pas non plus. On peut donc en déduire que la propriété d'équicontinuité d'un point passe à l'extension limite.

Fait 1.8.7. *Une extension limite est équicontinue (resp. presque équicontinue, quasi-équicontinue) si et seulement si tous ses systèmes de base le sont.*

1.9 Expansivités

L'expansivité représente une version d'instabilité très forte, puisque la moindre différence entre deux points quelconques finira inexorablement par en amener une grosse dans leur évolution.

Définition 1.9.1 (SDD expansif). Soit (X, F) un SDD.

- F est **positivement ε -expansif**, avec $\varepsilon > 0$, si pour tous points $x \neq y \in X$, il existe une génération $j \in \mathbb{N}$ pour laquelle $d(F^j(x), F^j(y)) > \varepsilon$.
- Il est **ε -expansif**, avec $\varepsilon > 0$, s'il est *bijectif* et pour tous points $x \neq y \in X$, il existe une génération $j \in \mathbb{Z}$ pour laquelle $d(F^j(x), F^j(y)) > \varepsilon$.

La notion d'expansivité peut en fait être étendue à tous les SDD surjectifs, mais au prix d'une certaine lourdeur d'utilisation, que nous éviterons ici.

Proposition 1.9.2 ([63]).

- Un SDD positivement expansif est sensible ou quasi-équicontinu.
- Un SDD parfait positivement expansif est sensible.

Expansivité et simulation. Sa définition beaucoup plus précise que celle de la sensibilité permet à l'expansivité (resp. positive) d'être préservée par itération et par passage à la racine. Elle est évidemment préservée aussi par passage à un sous-système, mais pas par factorisation ; encore moins par extension limite.

Fait 1.9.3. *L'expansivité (resp. positive) est préservée par simulation exacte.*

1.10 Ensembles limites

Attracteurs. Un autre point de vue pour étudier la dynamique des SDD est celui des attracteurs, *i.e.* les ensembles qui attirent les orbites des points.

Définition 1.10.1 (Attracteur). Soit (X, F) un SDD.

- L'**ensemble limite** d'un sous-espace $X' \subset X$ est $\Omega_F(X') = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \overline{\mathcal{O}_F(F^j(X'))}$.
- Un **attracteur** est l'*ensemble limite* d'un ensemble *rentrant*.
- Un point $z \in X$ est **attractif** si le singleton $\{z\}$ est un *attracteur*.
- Un **quasi-attracteur** est une intersection d'*attracteurs* qui n'en est pas un.

En tant qu'intersections de fermés emboîtés, les ensembles limites de fermés non vides sont des fermés non vides. Si X' est un fermé F -invariant, la définition se simplifie en $\Omega_F(X') = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} F^j(X')$.

Hurley a été le premier à proposer, dans [35], une classification des automates cellulaires basée sur la structure de l'ensemble des attracteurs (*cf* section 4.7). Celle-ci a été raffinée par Kůrka dans [43] et généralisée aux SDD, les séparant en cinq grandes classes, basées sur le fait qu'une union de deux attracteurs en est un et qu'une intersection non vide de deux attracteurs en contient un.

La terminologie d'«attracteur» vient de ce qu'ils attirent vers eux les points de leur voisinage; on a ainsi une caractérisation métrique.

Proposition 1.10.2 ([67]). Soit (X, F) un SDD et $Y \subseteq X$. Alors Y est un attracteur si et seulement s'il est non vide, fermé, F -invariant et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout point $x \in X$ avec $d(x, Y) < \delta$, on a $\lim_{j \rightarrow \infty} d(F^j(x), Y) = 0$ et pour toute génération $j \in \mathbb{N}$, $d(F^j(x), Y) < \varepsilon$.

La notion d'attracteur est fortement liée à la chaîne-transitivité.

Proposition 1.10.3 ([67]).

- Un attracteur est minimal si et seulement s'il est chaîne-transitif.
- Les SDD surjectifs sont chaîne-transitifs ou admettent deux attracteurs disjoints.

Remarque 1.10.4. Bien sûr, un attracteur est son propre ensemble limite.

$$\begin{aligned} \Omega_F(X') &= \Omega_F(F^j(X')) \text{ pour } j \in \mathbb{N} \\ &= \Omega_F(\Omega_F(X')) . \end{aligned}$$

Ensemble limite.

Définition 1.10.5 (Ensemble limite).

- L'**ensemble limite** du SDD (X, F) est l'*attracteur maximal* $\Omega_F = \Omega_F(X) = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} F^j(X)$; le **système limite** est le sous-système $F|_{\Omega}$ induit.
- (X, F) est **stable** s'il existe une génération $j \in \mathbb{N}$ telle que $F^j(X) = \Omega_F$.
- (X, F) est **z -limite-nilpotent**, avec $z \in X$, si Ω_F est réduit au singleton $\{z\}$.
- (X, F) est **p -limite-périodique**, avec $p \in \mathbb{N}^*$, si $F|_{\Omega}$ est *p -périodique*.

Notons que $F|_{\Omega}$ est un *sous-système surjectif* et que $\Omega_F(X) = X$ si et seulement si F est *surjectif*. Le système limite représente donc le plus grand sous-système surjectif de X .

C'est également le plus petit ensemble $Y \subset X$ tel que $\max_{x \in X} d(F^j(x), Y) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$. Tout voisinage de l'attracteur est donc atteint en temps fini.

Grâce à la proposition 1.10.3, on peut caractériser les systèmes dont l'ensemble limite est l'unique attracteur.

Fait 1.10.6.

- Un SDD (X, F) admet un unique attracteur $X = \Omega_F$ plein si et seulement s'il est chaîne-transitif.
- Il admet un unique attracteur Ω_F si et seulement s'il est **limite-chaîne-transitif**, i.e. son système limite $F|_{\Omega}$ est chaîne-transitif.

C'est en particulier le cas lorsque le système (resp. le *système limite*) est *transitif*.

Nilpotence limite. La nilpotence limite n'est pas toujours équivalente à la nilpotence, mais représente néanmoins une très grande stabilité.

Proposition 1.10.7. *Tout SDD limite-nilpotent est équicontinu.*

Preuve. Soit (X, F) un SDD z -limite-nilpotent, avec $z \in X$, et $\varepsilon > 0$. Il existe une génération $J \in \mathbb{N}$ telle que $\forall j \geq J, \max_{x \in X} d(F^j(x), z) < \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, pour tout point $x \in X$ et tout point y de l'ouvert $\bigcap_{0 \leq j < J} F^{-j}(\mathcal{B}_\varepsilon(F^j(x)))$, on a par construction $d(F^j(x), F^j(y)) < \varepsilon$ pour $j < J$ et $d(F^j(x), F^j(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$. Il résulte donc que x est ε -stable. \square

Remarque 1.10.8. Bien sûr, si un SDD (X, F) est *nilpotent* (resp. *préperiodique*), alors tout *sous-système* $(F^j(X), F)$ l'est également, pour $j \in \mathbb{N}$, et F est *limite-nilpotent* (resp. *limite-périodique*).

Notons qu'un système est p -limite-périodique si et seulement si son ensemble limite est l'ensemble de ses points p -périodiques.

Ensemble asymptotique.

Définition 1.10.9 (Ensemble asymptotique). L'**ensemble asymptotique** (appelé **ensemble ultime** dans [68, 51]) d'un ensemble $X' \subset X$ est l'ensemble $\omega_F(X') = \bigcup_{x \in X'} \Omega_F(\{x\})$ des *valeurs d'adhérence* d'orbites. On utilisera, là aussi, le raccourci $\omega_F = \omega_F(X)$.

Pour $X' \neq \emptyset$, $\omega_F(X')$ n'est jamais vide, puisque chaque $\Omega_F(\{x\})$ ne l'est pas ; il est F -invariant, mais pas toujours fermé. La définition nous donne $\omega_F(X') \subset \Omega_F(X')$.

Comme l'ensemble limite, l'ensemble asymptotique peut être caractérisé métriquement : c'est le plus petit ensemble $Y \subset X$ tel que pour tout $x \in X$, $d(F^j(x), Y) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$.

Fait 1.10.10. *Si (X, F) est un SDD, alors pour tout voisinage U de ω_F et tout point $x \in X$, il existe une génération $J \in \mathbb{N}$ telle que l'orbite est aspirée : $\forall j \geq J, F^j(x) \in U$.*

On peut voir facilement que l'ensemble asymptotique contient tous les points périodiques, dont les points de l'orbite sont tous des valeurs d'adhérence. La proposition suivante va même plus loin.

Proposition 1.10.11. *x est un point récurrent du SDD F si et seulement si x est valeur d'adhérence de sa propre orbite $\mathcal{O}_F(x)$.*

Preuve.

- Soit x un point récurrent de F , i.e. il existe une suite $(k_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}^*\mathbb{N}$ de générations telles que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $d(F^{k_j}(x), x) \leq \frac{1}{j}$, de telle sorte que la suite $(F^{k_j}(x))_{j \in \mathbb{N}}$ tend vers x . Si cette suite est bornée par $J \in \mathbb{N}$, alors $(F^{k_j}(x))_{j < J}$ est un compact et contient donc x , qui est alors un point périodique. Sinon, on peut en extraire une sous-suite croissante et on obtient le résultat.
- La réciproque est immédiate. \square

L'ensemble asymptotique contient donc tous les points récurrents, mais peut éventuellement en contenir d'autres. En revanche, ils sont tous autotransitifs.

Proposition 1.10.12. *Tout point de l'ensemble asymptotique d'un SDD est autotransitif.*

Preuve. Soit (X, F) un SDD, $\varepsilon > 0$ et $x \in \omega_F$, i.e. il existe un point $y \in X$ dont l'orbite admet x comme valeur d'adhérence ; en particulier elle passe une infinité de fois dans la boule $\mathcal{B}_\varepsilon(x)$. On a bien $\mathcal{B}_\varepsilon(x) \dashrightarrow \mathcal{B}_\varepsilon(x)$. \square

En particulier, on note que l'ensemble des points autotransitifs contient la clôture de l'ensemble asymptotique.

On déduit de la proposition 1.6.10 une caractérisation de l'autotransitivité.

Corollaire 1.10.13. *Un SDD (X, F) est autotransitif si et seulement si son ensemble asymptotique ω_F est un résiduel de X .*

Nilpotence et périodicité asymptotiques. L'ensemble asymptotique est un objet qui représente ce vers quoi tendent les orbites à l'infini. Les orbites vont donc avoir tendance à ressembler de plus en plus à celles des points asymptotiques. À ce titre, il peut s'avérer pertinent de s'intéresser à son comportement vis-à-vis du système.

Définition 1.10.14 (SDD asymptotiquement nilpotent).

- Un SDD (X, F) est **asymptotiquement z -nilpotent** si toutes ses orbites convergent vers la même limite $z \in X$, i.e. $\omega_F = \{z\}$.
- Un SDD (X, F) est **asymptotiquement p -périodique**, avec $p \in \mathbb{N}^*$, si $F|_{\omega_F}$ est une fonction p -périodique.

Remarque 1.10.15. Tout comme pour la z -nilpotence, la z -nilpotence asymptotique impose à z d'être un point fixe de F , puisque ω_F est F -invariant ; en particulier, F est asymptotiquement périodique.

La nilpotence asymptotique est une propriété très particulière : chaque orbite converge vers le même point et l'on peut borner le temps qu'elle met pour s'en rapprocher à une distance donnée.

Proposition 1.10.16. *Si (X, F) est un SDD asymptotiquement z -nilpotent, avec $z \in X$, et $\varepsilon > 0$, alors il existe une génération $J \in \mathbb{N}$ telle que pour tout point $x \in X$, $\exists j < J, \mathfrak{d}(F^j(x), z) < \varepsilon$.*

Preuve. Cela découle directement du fait 1.5.2, puisque $\mathcal{B}_\varepsilon(z)$ est un ouvert mortel. □

On peut donc déduire de la caractérisation métrique des attracteurs le corollaire suivant.

Corollaire 1.10.17. *Si (X, F) est un SDD asymptotiquement z -nilpotent, avec $z \in X$ attractif, alors $\Omega_F = \{z\}$.*

Bien sûr, les SDD faiblement nilpotents sont asymptotiquement nilpotents ; la réciproque est fausse. Un exemple simple est la division par 2 sur l'intervalle $[0, 1]$. En revanche, les SDD asymptotiquement nilpotents ne peuvent pas non plus présenter de grande instabilité, comme nous le montre la proposition suivante.

Proposition 1.10.18. *Un SDD asymptotiquement nilpotent n'est pas sensible.*

Preuve. Soit (X, F) un SDD asymptotiquement z -nilpotent, avec $z \in X$ et $\varepsilon > 0$. Par définition, l'espace X , d'intérieur non vide, peut s'écrire sous forme d'une union $\bigcup_{J \in \mathbb{N}} \bigcap_{j > J} F^{-j}(\mathcal{B}_{\varepsilon/2}(z))$ de fermés. Par le théorème de Baire, il existe une génération $J \in \mathbb{N}$ telle que le fermé $\bigcap_{j > J} F^{-j}(\mathcal{B}_{\varepsilon/2}(z))$ contient un ouvert U d'intérieur non vide. Soit $x \in U$. L'intersection finie $U \cap \bigcap_{j \leq J} F^{-j}(\mathcal{B}_\varepsilon(F^j(x)))$ est alors un ouvert contenant x ; par conséquent, elle contient une boule ouverte $\mathcal{B}_\delta(x)$, avec $\delta > 0$. Pour tout point $y \in \mathcal{B}_\delta(x)$ et toute génération $j \leq J$, on a bien par construction $\mathfrak{d}(F^j(x), F^j(y)) \leq \varepsilon$; pour toute génération $j > J$, on a l'inégalité triangulaire $\mathfrak{d}(F^j(x), F^j(y)) \leq \mathfrak{d}(F^j(x), z) + \mathfrak{d}(z, F^j(y)) \leq \varepsilon$. On en déduit que le point x est ε -stable. □

Ensembles limites et simulation. Les attracteurs et l'ensemble asymptotique sont très robustes : ils sont préservés par itération (donc passage à la racine) et par factorisation.

Proposition 1.10.19. *Soit $\Phi : X \rightarrow Y$ une simulation complète par un SDD (X, F) d'un autre (Y, G) . Alors $\Phi(\Omega_F(X)) = \Omega_G(Y)$ et $\Phi(\omega_F(X)) = \omega_G(Y)$.*

Preuve. Supposons que Φ est une factorisation.

- Pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\Phi F^j(X) = G^j(Y)$, donc $\Phi(\bigcap_{j \in \mathbb{N}} F^j(X)) = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} G^j(Y)$ car c'est une intersection décroissante ; donc $\Phi(\Omega_F) = \Omega_G$.
- Soit $x \in \omega_G$, i.e. x est la limite d'une suite $(G^{k_j} \Phi(y))_{j \in \mathbb{N}}$ où $(k_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est une suite d'entiers croissante. Alors $(F^{k_j}(y))_{j \in \mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence z , qui a pour image $\Phi(z) = x$. Donc $x \in \Phi(\omega_F)$. La réciproque est immédiate.

Montrons maintenant que tout SDD F^k a les mêmes ensembles limite et asymptotique que F , pour $k \in \mathbb{N}^*$, ce qui achèvera la preuve.

- Clairement, par décroissance de la suite, on a $\Omega_{F^k} = \Omega_F$ et $\omega_{F^k} \subset \omega_F$.
- Soit $x \in \omega_F$, i.e. x est la limite d'une suite $(F^{k_j}(y))_{j \in \mathbb{N}}$ où $(k_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est une suite d'entiers croissante. Il existe un entier $r < k$ tel que $J = \{j \in \mathbb{N} \mid k_j \bmod k = r\}$ est infini. On voit alors que $(F^{k_j-r}(y))_{j \in J}$ est une sous-suite de l'orbite de $F^r(y)$ par F^k qui a x pour valeur d'adhérence. Donc $x \in \omega_{F^k}$. \square

Les ensembles limite et asymptotique d'un sous-système sont contenus dans les ensembles limite et asymptotique du système global. En particulier, tout comme la nilpotence et la périodicité, les *nilpotences* et *périodicités limites* et *asymptotiques* se transmettent par toutes les *simulations*.

1.11 Entropie

L'entropie topologique d'un SDD, définie initialement dans [69], est une mesure du désordre apparaissant dans son évolution. Elle décompte en quelque sorte le nombre de possibilités qu'a le SDD d'évoluer en une étape étant donnée l'observation des étapes précédentes avec une certaine précision, représentée par un recouvrement d'ouverts. Nous verrons dans la section 4.8 que, dans le cas qui nous intéresse, elle admet une formalisation plus amicale que la définition ci-dessous.

Définition 1.11.1 (Entropie).

- On définit l'**entropie** d'un SDD relativement à un recouvrement d'ouverts \mathcal{P} par :

$$\mathcal{H}_{\mathcal{P}}(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \left| \left\{ U = \bigcap_{0 \leq j < n} F^{-j}(u_j) \mid (u_j)_{0 \leq i < n} \in \mathcal{P}^n \text{ et } U \neq \emptyset \right\} \right|}{n} .$$

- L'**entropie** (topologique) d'un SDD est :

$$\mathcal{H}(F) = \sup \{ \mathcal{H}_{\mathcal{P}}(F) \mid \mathcal{P} \text{ est un recouvrement d'ouverts de } X \} .$$

Selon cette notion, les systèmes les plus complexes ont une entropie infinie et les plus simples ont une entropie nulle ; c'est le cas notamment des systèmes *dénombrables*.

On a déjà une expression plus simple lorsque l'on considère des recouvrements de plus en plus fins.

Proposition 1.11.2 ([69, 63]). *Si $(\mathcal{P}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de recouvrements d'ouverts de X de diamètre tendant vers 0, alors l'entropie s'écrit :*

$$\mathcal{H}(F) = \lim_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_{\mathcal{P}_k}(F) .$$

Dans le cas d'un SDD positivement expansif, l'évolution grossira toutes les différences entre points initiaux jusqu'à une certaine précision ; on peut donc restreindre le diamètre du recouvrement relativement auquel on regarde l'entropie.

Proposition 1.11.3. *Soit (X, F) un SDD positivement ε -expansif. Alors son entropie égale son entropie relativement à tout recouvrement par boules de rayon ε' , où $\varepsilon' = \varepsilon$ si X est un espace ultramétrique, $\frac{\varepsilon}{2}$ dans le cas général.*

Preuve. Soit \mathcal{P} un recouvrement par boules de rayon ε' ; on définit alors, pour $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{P}_k = \left\{ \bigcap_{0 \leq j < k} F^{-j}(u_j) \mid u \in \mathcal{P}^k \right\} .$$

Le diamètre de \mathcal{P}_k tend vers 0 quand $k \rightarrow \infty$. En effet, si l'on a un $\delta > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un mot $u \in \mathcal{P}^k$ pour lequel le diamètre de $\bigcap_{0 \leq j < k} F^{-j}(u_j)$ est supérieur à δ , alors la compacité

de $\mathcal{P}^{\mathbb{N}}$ nous donne un mot $z \in \mathcal{P}^{\mathbb{N}}$ pour lequel le diamètre de l'ensemble $\bigcap_{j \in \mathbb{N}} F^{-j}(u_j)$ est supérieur à $\delta > 0$; il contient donc deux points x et y tels que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $F^j(x)$ et $F^j(y)$ sont dans l'ensemble u_j , donc leur distance est inférieure à ε , ce qui contredit l'hypothèse d'expansivité positive.

La proposition 1.11.2 permet que l'entropie de F vaille $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{H}_{\mathcal{P}_k}(F)$. Si $k, n \in \mathbb{N}$, on peut voir que :

$$\left| \left\{ u \in \mathcal{P}_k^n \mid \bigcap_{0 \leq j < n} F^{-j}(u_j) \neq \emptyset \right\} \right| = \left| \left\{ u \in \mathcal{P}^{n+k} \mid \bigcap_{0 \leq j < n+k} F^{-j}(u_j) \neq \emptyset \right\} \right|.$$

On en déduit que les entropies relativement à \mathcal{P} et à \mathcal{P}_k sont identiques. Le résultat vient donc du fait que la limite est prise sur une suite stationnaire. \square

Entropie et simulation. Par la définition, on voit que l'entropie d'un produit de SDD est la somme des entropies. L'entropie d'un facteur ou d'un sous-système d'un SDD F est inférieure ou égale à celle de F . On en déduit que l'entropie est un invariant de conjugaison. De plus, elle ne varie pas par inversion d'un SDD bijectif. Enfin, l'entropie d'un itéré F^n est n fois celle de F . En particulier, l'entropie de chaque itéré de F est au moins égale à celle de F , ce qui nous donne le résultat suivant.

Proposition 1.11.4. *L'entropie de tout système simulé directement par F est au plus égale à celle de F .*

Pour les preuves des résultats précédents, souvent directes mais calculatoires, on se référera à [69].

De plus, par la proposition 1.11.2 et un procédé diagonal sur des recouvrements d'ouverts de plus en plus fins des systèmes de base, on voit que l'entropie d'une extension limite est la limite de leurs entropies, résultat qui nous sera bien utile en section 4.8.

Proposition 1.11.5. *L'entropie de l'extension limite de $(X_i, F_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est la limite quand $i \rightarrow \infty$ des entropies des (X_i, F_i) .*

Preuve. Puisqu'il s'agit d'une suite de facteurs, on sait déjà que la suite des entropies correspondantes est croissante et admet donc une limite $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{H}(F_i) = \sup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{H}(F_i)$. Cette limite peut aussi s'écrire :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{H}(F_i) = \sup_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ \mathcal{P}_i \text{ recouvre } X_i}} \mathcal{H}_{\mathcal{P}_i}(F_i).$$

D'après la définition de l'entropie relative à un recouvrement, on voit que $\mathcal{H}_{\pi_i^{-1}\mathcal{P}_i}(F) = \mathcal{H}_{\mathcal{P}_i}(F_i)$. De plus, par le fait 1.3.6, les recouvrements de X correspondent tous à des recouvrements d'un X_i , avec $x \in \mathbb{N}$. On obtient :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{H}(F_i) = \sup_{\mathcal{P}_i \text{ recouvre } X_i} \mathcal{H}_{\mathcal{P}_i}(F) = \mathcal{H}(F). \quad \square$$

1.12 Systèmes symboliques

Nous allons nous restreindre maintenant à un espace discontinu : après avoir discrétisé le temps, on discrétise également l'univers sur lequel sont disposés des objets de base qui interagissent ; chaque point de l'espace des phases est constitué d'une infinité de ces objets de base.

1.12.1 Espaces symboliques

Un espace symbolique va être construit à partir de suites de symboles, mais pourra admettre une caractérisation par la **discontinuité totale**, *i.e.* le fait que tout singleton est ouvert, ou par une base d'ouverts fermés, *i.e.* d'ouverts fermés, à partir desquels tout ouvert peut être décomposé.

Définition 1.12.1 (Espace symbolique).

- Un **espace symbolique** est un espace du type $A^{\mathbb{M}}$, où A est un alphabet fini et $(\mathbb{M}, +)$ (ou simplement \mathbb{M}) est un monoïde commutatif finiment engendré. On le munit de la **topologie prodiscrète**, *i.e.* produit de la *topologie discrète* sur A . Cet espace est *compact* par le théorème de Tychonoff.
- Un **sous-espace symbolique** est un sous-espace *fermé* d'un *espace symbolique*, muni de la *topologie restreinte*.

Théorème 1.12.2. *Si X est un espace métrique, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. X est compact, parfait, totalement discontinu.
2. X est homéomorphe à un espace symbolique infini.
3. X est homéomorphe au produit $\mathbb{2}^{\mathbb{N}}$.
4. X est homéomorphe à l'ensemble triadique de Cantor $\{\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i 3^{-i} \mid (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{2}^{\mathbb{N}}\}$, muni de la topologie induite par la topologie usuelle sur \mathbb{R} .

Notons que les espaces symboliques infinis sont les $A^{\mathbb{M}}$ avec au moins deux lettres dans l'alphabet A et \mathbb{M} un monoïde infini.

Fait 1.12.3. *Un produit dénombrable d'espaces symboliques infinis est toujours homéomorphe à un espace symbolique, puisque la topologie produit est alors totalement discontinue, parfaite et compacte.*

Théorème 1.12.4. *Si X est un espace métrique compact, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. Les boules ouvertes de X sont fermées.
2. X admet une base dénombrable d'ouverts.
3. X est totalement discontinu.
4. X est homéomorphe à un sous-espace symbolique.
5. X est homéomorphe à un sous-espace d'un produit infini $\prod_{i \in \mathbb{N}} A_i$, où les A_i sont des alphabets finis.

Bases.

Fait 1.12.5.

- L'ultramétrie à la propriété suivante : pour tout rayon $\varepsilon > 0$ et tous points $x, y \in X$ tels que $y \in \mathcal{B}_\varepsilon(x)$, on a $\mathcal{B}_\varepsilon(y) \subset \mathcal{B}_\varepsilon(x)$. Il n'y a donc qu'un seul recouvrement en boules de rayon ε , qui est une partition.
- Pour tout ouvert U d'un espace symbolique X , il existe un rayon $\varepsilon > 0$ tel que pour tout point $x \in U$, la boule $\mathcal{B}_\varepsilon(x)$ est incluse dans U , puisqu'on peut le recouvrir par un nombre fini de boules contenues dedans.

Définition 1.12.6 (Base de partitions). Une **base** de partitions d'un sous-espace symbolique X est une famille dénombrable $(\mathcal{P}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de partitions en ouverts telle que pour toute partition en ouverts \mathcal{P} de X , il existe une partition \mathcal{P}_i , avec $i \in \mathbb{N}$, qui lui est plus fine.

Les espaces symboliques admettent une caractérisation plus simple de cette notion de base.

Proposition 1.12.7. *$(\mathcal{P}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une base de partitions d'un sous-espace symbolique (métrique) X , si et seulement si $\inf_{i \in \mathbb{N}} \text{diam } \mathcal{P}_i = 0$.*

Preuve .

- Si c'est une base, alors pour toute partition de diamètre inférieur $\varepsilon > 0$, il existe une partition \mathcal{P}_i qui lui est plus fine, donc de diamètre inférieur à ε . Par conséquent, $\inf_{i \in \mathbb{N}} \text{diam } \mathcal{P}_i = 0$.

- Réciproquement, soient \mathcal{P} une partition en ouverts et $\varepsilon > 0$ un rayon tel que pour tout ouvert $U \in \mathcal{P}$ et tout point $x \in U$, la boule $\mathcal{B}_\varepsilon(x)$ est incluse dans U (cf fait 1.12.5). Supposons qu'il existe un indice $i \in \mathbb{N}$ tel que \mathcal{P}_i a un diamètre inférieur à ε . Alors \mathcal{P}_i est plus fine que \mathcal{P} puisque chacun de ses ouverts est inclus dans une boule $\mathcal{B}_\varepsilon(x)$ pour un point $x \in X$, donc dans un des ouverts de \mathcal{P} . \square

Dans cette définition de base, on peut imposer que les partitions soient distinctes, à condition qu'elles soient en nombre infini. Le cas contraire peut se réduire à une famille finie $(\mathcal{P}_i)_{0 \leq i < l}$ – il n'arrive que dans le cas dégénéré d'un espace fini.

Proposition 1.12.8. *Un sous-espace symbolique X admet une base finie $(\mathcal{P}_i)_{0 \leq i < l}$ de partitions, avec $l \in \mathbb{N}$, si et seulement s'il existe $i \in \llbracket 0, l \rrbracket$ tel que*

$$\begin{array}{l} X \rightarrow \mathcal{P}_i \\ x \mapsto \mathcal{P}_i(x) \end{array} \text{ est un homéomorphisme.}$$

Preuve.

- Si X a une base finie, alors il a un nombre fini d'ouverts, qui sont les unions et intersections finies de ceux qui apparaissent dans les partitions de la base. Chaque singleton, en tant qu'intersection des boules qui y sont centrées, est un ouvert, donc la topologie est discrète.
- Réciproquement, si X est fini, alors la partition discrète $\mathcal{P} = \{\{x\} \mid x \in X\}$ forme une base à elle toute seule. \square

Systèmes symboliques.

Définition 1.12.9 (Système symbolique). Un **système symbolique** (SS) est un SDD sur un *sous-espace symbolique*.

Les SS sont liés aux SDD sur l'intervalle puisqu'ils peuvent être vus sur le Cantor.

Corollaire 1.12.10. *Tout SS est sous-conjugué d'un SDD sur $[0, 1]$.*

Preuve. Un SS est conjugué à un sous-système d'un SDD sur l'ensemble triadique de Cantor, qui est un fermé de $[0, 1]$. On peut donc facilement le prolonger par continuité sur $[0, 1]$. \square

L'étude des SS est donc fondamentale pour la théorie des systèmes dynamiques discrets, puisqu'ils peuvent tous s'y ramener.

Théorème 1.12.11 ([70]). *Tout SDD est facteur d'un SS.*

Corollaire 1.12.12. *Tout SDD est sous-facteur d'un SDD sur l'intervalle $[0, 1]$.*

Remarque 1.12.13. Par le fait 1.12.3, un *produit* ou une *extension limite* de SS est toujours un SS.

1.12.2 Configurations

Nous avons donc vu que, topologiquement, tout espace symbolique peut se ramener au Cantor, sous-ensemble de l'intervalle, et que tous les SDD peuvent se ramener par factorisation à un SS. La structure topologique des espaces symboliques est donc toujours la même. En revanche, leur structure algébrique, à laquelle nous allons nous intéresser maintenant, va dépendre du monoïde \mathbb{M} choisi.

Dans la suite de la thèse, en l'absence de précision supplémentaire, nous prendrons A un alphabet d'au moins deux lettres et $\mathbb{M} = \prod_{0 \leq m < l} \mathbb{M}_m$, où $l \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{M}_m = \mathbb{N}$ ou \mathbb{Z} pour $0 \leq m < l$. Chaque élément du monoïde sera appelé **cellule**. On notera $|i| = \max_{0 \leq m < l} |i_m|$ et $\langle k \rangle = \{i \in \mathbb{M} \mid |i| \leq k\}$. Par exemple, quand on considère $\mathbb{M} = \mathbb{Z}$, $A^{\langle k \rangle}$ dénotera l'ensemble des mots $(u_i)_{-k \leq i \leq k}$, dont les lettres sont indexées entre $-k$ et k . La *topologie produit* correspond alors à l'*ultramétrie* suivante :

$$\begin{aligned} \mathfrak{d} : A^{\mathbb{M}} \times A^{\mathbb{M}} &\rightarrow [0, 1] \\ (x, y) &\mapsto 2^{-\min_{i \neq j} |i|} . \end{aligned}$$

On se limitera, dans la suite, au cas de monoïdes \mathbb{M}, \mathbb{M}' égaux à \mathbb{N} ou à \mathbb{Z} . Même si certains résultats restent vrais pour des monoïdes plus complexes, cette restriction permet une meilleure intuition des résultats.

Définition 1.12.14 (Configuration).

- Une **configuration** est une famille $x = (x_i)_{i \in \mathbb{M}}$ de lettres ordonnée par le monoïde \mathbb{M} . Chaque lettre x_i peut être vue comme l'**état** de la cellule i . Pour une configuration dans $A^{\mathbb{N}}$ (resp. $A^{\mathbb{Z}}$), on parlera également de **mot infini** (resp. **biinfini**).
- Si I et J sont deux intervalles de \mathbb{Z} , avec $I \subset J$ et $x = (x_i)_{i \in J} \in A^J$ un mot (fini, infini ou biinfini), alors $x_I = (x_i)_{i \in I} \in A^I$ est un *sous-mot* de x . On note $x_I \sqsubset x$.

Le théorème de Heine sur les systèmes symboliques a une expression particulière, puisque chaque cellule ne voit alors qu'un nombre fini de cellules dans son voisinage.

Théorème 1.12.15 (Heine). *Soit une application continue F d'un sous-espace symbolique $\Lambda \subset A^{\mathbb{M}}$ dans un autre $\Sigma \subset B^{\mathbb{M}'}$. Alors F est uniformément continue, i.e. pour tout rayon $k \in \mathbb{N}$, il existe un rayon $r_k \in \mathbb{N}$ et une règle $f_k : A^{\langle r_k \rangle} \rightarrow A^{\langle k \rangle}$ tels que pour tout $x \in \Lambda$, $F(x)_{\langle k \rangle} = f_k(x_{\langle r_k \rangle})$.*

On peut aussi voir un SS F comme l'application simultanée de règles locales (distinctes) \tilde{f}_i en chaque cellule $i \in \mathbb{M}$, définies par :

$$\begin{aligned} \tilde{f}_i : A^{\langle r_{|i|} \rangle} &\rightarrow A \\ u &\mapsto f_{|i|}(u)_i . \end{aligned}$$

L'orbite d'une configuration $x \in A^{\mathbb{M}}$ par un SS F peut être représentée sous la forme d'un **diagramme espace-temps**, i.e. la superposition $(F^j(x_i))_{\substack{i \in \mathbb{M} \\ j \in \mathbb{N}}}$ de configurations, où les cellules $i \in \mathbb{M}$ sont vues horizontalement, et les générations $j \in \mathbb{N}$ verticalement, généralement de bas en haut.

Remarquons que si F est un SS sur $\Lambda \subset A^{\mathbb{M}}$, alors tout sous-alphabet $A' \subset A$ induit un *sous-système* de F , que l'on notera $F|_{A'} = F|_{A' \cap A^{\mathbb{M}}}$.

Cylindres.

Définition 1.12.16 (Cylindre).

- Soit $k \in \mathbb{N}$ et $W \subset A^{\langle k \rangle}$ un code. Le **cylindre central** de code W est le sous-ensemble $[W] = \{x \in A^{\mathbb{Z}} \mid x_{\langle k \rangle} \in W\}$ de configurations.
- Soit $l \in \mathbb{N}$ et $W \subset A^l$ un code. Le **cylindre** de code W à la cellule $k \in \mathbb{M}$ est le sous-ensemble $[W]_k = \{x \in A^{\mathbb{Z}} \mid x_{\llbracket k, k+l \rrbracket} \in W\}$ des configurations ayant un sous-mot dans W à la position k . Si W est un singleton $\{w\}$ d'un seul motif, on le notera également $[w]_k$.

Un cylindre est ouvert en tant qu'union de boules ; il est même ouvert puisque son complémentaire est un autre cylindre. Les *cylindres centraux* $[w]$ pour $w \in A^*$ forment une *base dénombrable d'ouverts*.

On s'autorise à juxtaposer une notation de cylindre avec un ou deux mots ou ensembles de mots infinis. Par exemple, si $k \in \mathbb{N}$, $K \subset A^{-\mathbb{N}}$, $W \subset A^{\langle k \rangle}$ et $L \subset A^{\mathbb{N}}$, alors $K[W]L$ est l'ensemble des configurations $x \in A^{\mathbb{Z}}$ telles que $x_{\llbracket -\infty, -k \rrbracket} \in K$, $x_{\langle k \rangle} \in W$ et $x_{\llbracket k, \infty \rrbracket} \in L$. On notera, de plus, si $i \in \mathbb{M}$, $K]_i = \{x \in A^{\mathbb{Z}} \mid x_{\llbracket -\infty, i \rrbracket} \in K\}$ et ${}_i[L = \{x \in A^{\mathbb{Z}} \mid x_{\llbracket i, \infty \rrbracket} \in L\}$.

Configurations périodiques. Si $k \in \mathbb{N}^+$ et $W \subset A^k$, on notera W^∞ l'ensemble de mots infinis $z \in A^{\mathbb{N}}$ tels que $z_{\llbracket ki, k(i+1) \rrbracket} \in W$ pour tous $i \in \mathbb{N}$, ${}^\infty W$ l'ensemble de séquence infinies $z \in A^{-\mathbb{N}}$ telles que $z_{\llbracket -ki, -k(i+1) \rrbracket} \in W$ pour tous $i \in \mathbb{N}$ et ${}^\infty W^\infty$ l'ensemble de configurations $x \in A^{\mathbb{M}}$ telles que $x_{\llbracket ki, k(i+1) \rrbracket} \in W$ pour tous $i \in \mathbb{M}$ – cela coïncide avec W^∞ quand $\mathbb{M} = \mathbb{N}$.

Définition 1.12.17 (Configurations périodique et finie).

- Si $u \in A^+$, on dit que ${}^\infty u^\infty$ est une **configuration périodique** de **période** $|u|$.
- Une **configuration apériodique** est une configuration qui n'est pas périodique.

- Si $0 \in A$, alors ${}^\infty 0^\infty$ est la **configuration 0-uniforme**.
- Une configuration $x \in A^{\mathbb{M}}$ est **0-finie** si $|i| > k \Rightarrow x_i = 0$, avec $k \in \mathbb{N}$, **0-semifinie droite** si $i > k \Rightarrow x_i = 0$, avec $k \in \mathbb{M}$, et **0-semifinie gauche** si $i < k \Rightarrow x_i = 0$, avec $k \in \mathbb{M}$.

Remarquons que l'ensemble \mathcal{F}_0 des configurations 0-finies et l'ensemble \mathcal{P} des configurations périodiques sont denses, puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$, tout mot fini $u \in A^{(k)}$ peut être étendu en ${}^\infty 0[u]0^\infty$ (resp. $[u]0^\infty$) ou en ${}^\infty u[u]u^\infty$ (resp. u^∞). Dans le contexte des configurations, on veillera à ce que la terminologie de périodicité n'interfère pas avec les configurations F -périodiques où F est un SS.

Conclusion

Nous avons catalogué dans ce chapitre de nombreuses notions permettant de cerner l'idée de chaos ou de simplicité pour les systèmes dynamiques, en nous basant principalement sur une approche topologique. Parmi celles-ci, les concepts liés aux ensembles limites, sur lesquels nous avons insisté en fin de chapitre, comme la périodicité asymptotique, demeurent largement incompris.

Ces différentes propriétés, définies en toute généralité, vont organiser notre étude de systèmes particuliers : les sous-décalages dans le chapitre 2, les systèmes symboliques et les automates cellulaires dans le chapitre 4. Nous avons également défini la notion de simulation, qui représente des liens entre SDD de manière très générale et que nous concrétiserons dans le chapitre 3.

Chapitre 2

Décalages

LES décalages sont des systèmes dynamiques particuliers, définis très simplement comme des suites de lettres que l'on décale une par une. Ils peuvent être vus de plusieurs points de vue. D'un point de vue symbolique d'abord, on peut s'intéresser au langage correspondant, défini comme l'ensemble des motifs finis apparaissant dans les configurations, et à sa complexité; d'un point de vue graphique ensuite, on peut regarder l'ensemble des étiquettes de chemins infinis sur un graphe, en fonction de la forme du graphe; d'un point de vue topologique enfin, on peut utiliser les notions vues dans le chapitre précédent. Dans ce chapitre, nous nous intéressons donc aux décalages en reliant ces trois approches, au niveau des comportements dynamiques eux-mêmes, mais également au niveau des morphismes et des simulations.

2.1 Sous-décalages

Définition 2.1.1 (Décalage).

- Pour $m \in \mathbb{M}$, le m -**décalage** $\sigma^m : A^{\mathbb{M}} \rightarrow A^{\mathbb{M}}$ est défini pour toute configuration $x \in A^{\mathbb{M}}$ et toute cellule $i \in \mathbb{M}$ par $\sigma^m(x)_i = x_{i+m}$. Cette fonction induit un SS $(A^{\mathbb{M}}, \sigma^m)$, pour $m \in \mathbb{M}$. On peut se restreindre à l'étude des σ^{m_k} où $(m_k)_{0 \leq k < l}$ est une famille génératrice du monoïde \mathbb{M} , puisque les autres en sont des compositions. En particulier, dans les cas $A^{\mathbb{Z}}$ et $A^{\mathbb{N}}$, on se contentera d'étudier σ^1 , que l'on note σ . Cette même lettre représente donc deux SS très différents suivant que $\mathbb{M} = \mathbb{N}$ ou \mathbb{Z} ; le contexte permettra de les différencier.
- Un **sous-décalage unilatère** est un SS (Σ, σ) (ou simplement Σ), où Σ est un *fermé σ -invariant* de $A^{\mathbb{N}}$.
- Un **sous-décalage bilatère** est un SS (Σ, σ) (ou simplement Σ), où Σ est un *fermé fortement σ -invariant* de $A^{\mathbb{Z}}$.

La définition des sous-décalages bilatères, par rapport à celle des unilatères, fait donc intervenir une condition supplémentaire de surjectivité. Cela vient du fait que l'on peut définir un sous-décalage pour un monoïde \mathbb{M} quelconque comme un sous-système dynamique de σ , vu en tant qu'action continue du monoïde \mathbb{M} sur $A^{\mathbb{M}}$. Cette définition requiert donc que l'ensemble Σ soit σ^m -invariant pour tout $m \in \mathbb{M}$. En particulier, pour $\mathbb{M} = \mathbb{Z}$, on demande la σ -invariance, mais aussi la σ^{-1} -invariance. Pour $\mathbb{M} = \mathbb{Z}^2$, la définition correspond à un pavage régi par des contraintes locales; elle inclut notamment le formalisme des pavages de Wang, défini en 1961 dans [71] par des contraintes relatives aux plus proches voisins. Dans la suite de ce chapitre, on restreindra néanmoins notre étude aux sous-décalages unidimensionnels, *i.e.* avec $\mathbb{M} = \mathbb{N}$ ou \mathbb{Z} .

Remarque 2.1.2. Si $\Sigma \subset A^{\mathbb{N}}$ est un sous-décalage *unilatère surjectif*, on peut lui associer canoniquement un sous-décalage *bilatère* $\tilde{\Sigma} = \{z \in A^{\mathbb{Z}} \mid \forall i \in \mathbb{Z}, z_{[i, \infty[} \in \Sigma\}$.

Remarque 2.1.3. Si $U \subset A^{\mathbb{M}}$, alors $\bigcap_{j \in \mathbb{M}} \sigma^j(U)$ est le plus grand sous-décalage inclus dans U .

Langages. La théorie des sous-décalages est reliée à la théorie des langages formels par la remarque suivante : si $L \subset A^*$ est un langage, alors $\Sigma_L = \{z \in A^{\mathbb{M}} \mid \forall u \in L, u \not\sqsubset z\}$ est un sous-décalage. Inversement, on peut associer à tout sous-décalage son langage des sous-mots.

Définition 2.1.4 (Langage et langage interdit d'un sous-décalage).

- Le **langage** d'un sous-décalage Σ est l'ensemble $\mathcal{L}(\Sigma) = \{u \in A^* \mid \exists z \in \Sigma, u \sqsubset z\}$ des mots finis apparaissant comme sous-mots d'une configuration de Σ . Pour toute longueur $k \in \mathbb{N}$, le **langage d'ordre k** de Σ est le code $\mathcal{L}_k(\Sigma) = \mathcal{L}(\Sigma) \cap A^k$ des sous-mots de longueur k de configurations de Σ . On notera $\mathcal{L}_+(\Sigma) = \mathcal{L}(\Sigma) \setminus \{\lambda\}$.
- Un **langage interdit** d'un sous-décalage Σ est un langage $L \subset A^*$ tel que $\Sigma = \Sigma_L$.
- Un langage $L \subset A^*$ est **extensible** (resp. **biextensible**) s'il est stable par passage au sous-mot et si tous ses mots sont prolongeables à droite (resp. et à gauche), *i.e.* :

$$\forall u \in L, \begin{cases} \forall v \sqsubset u, v \in L \\ \exists a \in A, ua \in L \text{ (resp. et } \exists b \in A, bu \in L) \end{cases} .$$

- La **complexité** d'un langage $L \subset A^*$ est la fonction :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_L : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ n &\mapsto |L \cap A^n| . \end{aligned}$$

Remarquons qu'un sous-décalage Σ admet toujours \mathcal{L}_Σ^C comme *langage interdit*. D'autre part, remarquons que $\mathcal{L}_k(\Sigma) = \{z_{\llbracket 0, k \rrbracket} \mid z \in \Sigma\}$; dans le cas d'un sous-décalage unilatère, le langage est l'ensemble des préfixes finis. Par convention, on étendra également la notation à $\mathcal{L}_\infty(\Sigma) = \{x_{\llbracket 0, \infty \rrbracket} \mid x \in \Sigma\}$, qui coïncide avec Σ dans le cas unilatère.

Remarque 2.1.5. Les langages de sous-décalages *unilatères* (resp. *bilatères*) sont les langages *extensibles* (resp. *biextensibles*).

Résiduels.

Définition 2.1.6 (Résiduel).

- Si $\Sigma \subset A^{\mathbb{M}}$ est un sous-décalage et $u \in A^*$, on note $u^{-1}\Sigma = \{z \in A^{\mathbb{N}} \mid uz \in \mathcal{L}_\infty(\Sigma)\}$ le **résiduel** de u .
- Si $\Sigma \subset A^{\mathbb{Z}}$ est un sous-décalage bilatère et $w \in A^{-\mathbb{N}^*}$, on note $w^{-1}\Sigma = \{z \in A^{\mathbb{N}} \mid wz \in \Sigma\}$ le **résiduel** de w .

On remarque que $\lambda^{-1}\Sigma = \Sigma$ et que $u^{-1}\Sigma = \emptyset$ si et seulement si $u \notin \mathcal{L}(\Sigma)$.

Graphes.

Définition 2.1.7 (Graphe).

- On appellera **graphe** (arc-étiqueté) sur l'alphabet A un couple $\mathcal{G} = (V, E)$ où V est l'ensemble fini des **sommets**, $E \subset V \times V \times A$ l'ensemble fini des **arcs**; si $(v, w, a) \in E$ alors v est le sommet **initial** de l'arc, w son sommet **terminal** et a son **étiquette**.
- Un **chemin** est une séquence $(v_j, w_j, a_j)_{j \in I} \in E^I$ d'arcs, où I est un intervalle de \mathbb{M} , telle que $v_{j+1} = w_j$ si $j, j+1 \in I$. La **longueur** du chemin est le diamètre de I et son **étiquette** est $(a_j)_{j \in I}$.
- Un graphe est **fortement connexe** si tous sommets $v, w \in V$ peuvent être reliés par un chemin fini $(v_j, w_j, a_j)_{0 \leq j < l}$, avec $l \in \mathbb{N}$, $v_0 = v$ et $w_{l-1} = w$ (par convention, tout sommet v est la double extrémité d'un chemin vide).
- Un **cycle** est un chemin fini $(v_j, w_j, a_j)_{0 \leq j < l}$, où $l \in \mathbb{N}$ et $v_0 = w_{l-1}$.
- Un graphe **pâquerette** est un graphe dans lequel de chaque sommet part exactement un arc.

Ce qui nous intéresse ici sont les chemins infinis du graphe. On peut donc imposer que le graphe n'ait que des sommets **coaccessibles**, *i.e.* d'où part au moins un arc. Dans le cas bilatère, on peut aussi imposer que les sommets soient tous **accessibles**, *i.e.* qu'au moins un arc y arrive.

Nous serons parfois amenés à considérer les composantes fortement connexes des graphes. La relation de liaison par un chemin induit un ordre partiel sur les composantes fortement connexes ; il y a donc des composantes connexes maximales et minimales.

Définition 2.1.8 (Sous-décalages d'un graphe).

- Le **système d'arcs unilatère** (resp. **bilatère**) du graphe $\mathcal{G} = (V, E)$ est le sous-décalage $\Sigma_{\mathcal{G}} = \{(v_j, w_j, a_j)_{j \in \mathbb{M}} \in E^{\mathbb{M}} \mid \forall j \in \mathbb{M}, v_{j+1} = w_j\}$ de ses *chemins infinis* (resp. *biinfinis*).
- Le **système d'étiquettes unilatère** (resp. **bilatère**) du graphe $\mathcal{G} = (V, E)$ sur A est le sous-décalage $\Gamma_{\mathcal{G}} = \{(a_j)_{j \in \mathbb{N}} \mid (v_j, w_j, a_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \Sigma_{\mathcal{G}}\}$ des *étiquettes* de ses chemins infinis (resp. biinfinis).
- Nous dirons que deux graphes sont **équivalents** s'ils ont même *système d'étiquettes*.
- Un sous-décalage est **sofique** s'il est le *système d'étiquettes* d'un graphe.
- Un sous-décalage est **markovien** s'il est, à renommage de lettres près, le *système d'arcs* d'un graphe.

Un sous-décalage markovien peut également être vu comme le système d'étiquettes d'un graphe dont les arcs ont tous des étiquettes distinctes.

2.2 Morphismes

Règles locales. On a vu dans le chapitre précédent que les fonctions continues d'un espace symbolique dans un autre consistent en l'application parallèle de règles locales en chaque cellule. Une condition supplémentaire de préservation de tous les décalages impose alors que ces règles locales soient identiques. Même si le résultat reste vrai pour des sous-décalages plus complexes (*cf* notamment une généralisation intéressante aux espaces uniformes dans [72]), on se restreint toujours ici à $\mathbb{M} = \mathbb{Z}$ ou \mathbb{N} .

Théorème 2.2.1 (Curtis-Hedlund-Lyndon [32]). *Soient $\Sigma \subset A^{\mathbb{M}}$ et $\Gamma \subset B^{\mathbb{M}'}$ deux sous-décalages et Φ un morphisme de Σ dans Γ . Alors il existe un **diamètre** $d \in \mathbb{N}$, une **ancree** $m \in \mathbb{N}$ et une **règle locale** $\phi : \mathcal{L}_d(\Sigma) \rightarrow B$ tels que pour toute configuration $x \in \Sigma$, en toute cellule $i \in \mathbb{M}$, $\Phi(x)_i = \phi(x_{\llbracket i-m, i-m+d \rrbracket})$.*

Preuve. Nous avons vu par le théorème de Heine que pour toute cellule $i \in \mathbb{M}$, il existe un rayon $r_{|i|} \in \mathbb{N}$ et une règle locale $\phi_i : A^{\langle r_{|i|} \rangle} \rightarrow A$ telle que pour toute configuration $x \in A^{\mathbb{M}}$, $\Phi(x)_i = \phi_i(x_{\langle r_{|i|} \rangle})$. D'autre part, $\Phi(x)_i = \sigma^i \Phi(x)_0 = \Phi \sigma^i(x)_0$ par hypothèse. On en déduit $\Phi(x)_i = \phi_0(\sigma^i(x)_{\langle r_0 \rangle})$. Si $\mathbb{M} = \mathbb{Z}$, il suffit donc de prendre $d = 2r_0 + 1$ et $m = r_0$; si $\mathbb{M} = \mathbb{N}$, il suffit de prendre $d = r_0 + 1$ et $m = 0$. \square

Le diamètre, l'ancree et la règle locale ne sont pas uniques, mais le deviennent si l'on requiert un diamètre minimal. La quantité $m' = d - 1 - m$ est appelée **anticipation**. Le **voisinage** d'une cellule i est l'ensemble $\llbracket i - m, i + m' \rrbracket$ des cellules qui lui sont «visibles» via la règle locale. Lorsque $\mathbb{M} = \mathbb{N}$, on a forcément $\mathbb{M}' = \mathbb{N}$ et $m \geq 0$. On peut alors imposer $m = 0$; on appelle alors $r = m' = d - 1$ le **rayon**. Lorsque $\mathbb{M} = \mathbb{Z}$, on peut imposer $d = 2m + 1$; on appelle alors $r = m = m'$ le **rayon**. Dans ces deux cas, on a toujours unicité de la règle locale si l'on requiert d minimal. La conséquence suivante nous autorise à restreindre notre étude aux seuls morphismes entre sous-décalages sur le même monoïde $\mathbb{M} = \mathbb{N}$ ou \mathbb{Z} .

Corollaire 2.2.2. *Tout morphisme Φ d'un sous-décalage bilatère $\Sigma \subset A^{\mathbb{Z}}$ dans un sous-décalage unilatère $\Gamma \subset B^{\mathbb{N}}$ est décomposable par une fonction de coupure*

$$\begin{array}{ccc} A^{\mathbb{Z}} & \rightarrow & A^{\mathbb{N}} \\ x & \mapsto & x_{\llbracket m, \infty \rrbracket} \end{array} \quad \text{pour une ancree } m \in \mathbb{N}.$$

Le théorème de Hedlund justifie qu'on appelle un morphisme de sous-décalage une fonction **bloc à lettre**. On dira que le morphisme est **lettre à lettre** si l'on peut prendre un diamètre 1 ; son sous-décalage image est alors un **facteur lettre à lettre** du sous-décalage domaine. On voit par exemple qu'un *renommage* (bijectif) de lettres est une *conjugaison lettre à lettre* dont l'inverse est *lettre à lettre*.

Par abus de langage, on s'autorise à étendre toute *règle locale* $\phi : A^d \rightarrow A$ sur les mots de toutes longueurs de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{L}(\Sigma) &\rightarrow \mathcal{L}(\Gamma) \\ u &\mapsto (\phi(u_{[i, i+d]})_{0 \leq i < |u| - d} . \end{aligned}$$

En particulier, $\phi(u) = \lambda$ si $|u| < d$.

La terminologie de rayon du morphisme ne doit pas être confondue avec celle du rayon d'une boule ; il est lié au coefficient de Lipschitz de la fonction.

Proposition 2.2.3. *Un morphisme de sous-décalages de rayon r est 2^{-r} -lipschitzien. De plus, pour tout $k \in \mathbb{M}$, $r_k = k + r$, i.e. pour tout mot $u \in A^{(k+r)}$, $F([u]) \subset [v]$, où $v \in A^{(k)}$.*

Résolubilité.

Définition 2.2.4 (Morphisme résoluble). Soit Φ un *morphisme* d'un sous-décalage $\Sigma \subset A^{\mathbb{M}}$ dans $B^{\mathbb{M}}$, de diamètre $d \in \mathbb{N}^*$ et de règle locale $\phi : \mathcal{L}_d(\Sigma) \rightarrow B$.

- Il est **permutif à droite** si pour tout mot $u \in A^{d-1}$, l'application

$$\begin{aligned} \{a \in A \mid ua \in \mathcal{L}(\Sigma)\} &\rightarrow B \\ a &\mapsto \phi(ua) \end{aligned}$$

est injective. On définit de manière symétrique la **permutivité à gauche** (par $\phi(au)$).

- Il est **bipermutif** s'il est *permutif à droite et à gauche*.
- Il est **résoluble à droite** (resp. **à gauche**) s'il est *lettre à lettre* et pour toute lettre $b \in A$, la restriction $\phi|_{\{a \in A \mid ba \in \mathcal{L}(\Sigma)\}}$ (resp. $\phi|_{\{a \in A \mid ab \in \mathcal{L}(\Sigma)\}}$) est injective, i.e. il est *permutif à droite* (resp. *à gauche*) quand il est vu comme morphisme de diamètre 2 et d'ancre 1 (resp. 0). Dans ce cas, on dit que $\Phi(\Sigma)$ est **facteur résoluble** de Σ .

Si un morphisme est résoluble, on voit en itérant que chaque mot infini a au plus un antécédent z pour une première lettre z_0 fixée.

Graphes et morphismes.

Remarque 2.2.5.

- Remarquons que l'**étiquetage** $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$ des chemins infinis (resp. biinfinis) d'un graphe \mathcal{G} est une *factorisation lettre à lettre* du *système d'arcs* $\Gamma_{\mathcal{G}}$ dans le *système d'étiquettes* $\Sigma_{\mathcal{G}}$, de règle locale : $e_{\mathcal{G}} : (v, w, a) \mapsto a$.
- Réciproquement, toute *factorisation lettre à lettre* d'un sous-décalage *markovien* Γ dans un sous-décalage Σ peut être vue comme l'*étiquetage* dans un graphe dont Γ et Σ sont respectivement les *systèmes d'arcs*, à renommage des lettres près, et *d'étiquettes*.
- En particulier, on voit que tout sous-décalage *markovien* est *sofique*, en prenant comme étiquetage le renommage des lettres en question.

Fait 2.2.6. *Si $\mathcal{G} = (V, E)$ est un graphe sur A et $\Phi : \Sigma_{\mathcal{G}} \rightarrow B^{\mathbb{M}}$ un morphisme de sous-décalages de règle locale $\phi : A \rightarrow B$ et de diamètre $d \in \mathbb{N}$, alors $\Phi(\Sigma_{\mathcal{G}})$ est le système d'étiquettes du **graphe de Bruijn** $\Phi(\mathcal{G}) = (V, E')$ sur B , défini par :*

$$E' = \{ (v_0, w_{d-1}, \phi((a_j)_{0 \leq j < d})) \mid (v_j, w_j, a_j)_{0 \leq j < d} \in E^d \text{ et } \forall j \in [0, d-1], v_{j+1} = w_j \} .$$

On déduit du fait précédent que tout sous-décalage *facteur* d'un sous-décalage *sofique* est *sofique*.

Les morphismes de sous-décalages *sofiques*, vus sur les graphes, peuvent eux-mêmes être représentés par des **systèmes textiles**, qui sont en quelque sorte des graphes de graphes, définis par Nasu dans [60].

2.3 Opérations sur les sous-décalages

Produits. Nous allons voir qu'un produit de sous-décalages est essentiellement un sous-décalage.

Soient $l \in \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$, $(A_i)_{0 \leq i < l}$ une famille d'alphabets, I un intervalle de \mathbb{M} et $z = ((z_i^j)_{0 \leq i < l})_{j \in \mathbb{M}} \in (\prod_{0 \leq i < l} A_i)^I$ un mot (fini, infini ou biinfini) sur leur alphabet produit. Alors on définit, pour $0 \leq i < l$, son **projeté** $\pi_i(z)$ comme le mot $(z_i^j)_{j \in I}$ correspondant sur l'alphabet A_i ; de même, si $i \leq k \leq l-1$, on définit le projeté $\pi_{\llbracket i, k \rrbracket}(z) = (z_{\llbracket i, k \rrbracket}^j)_{j \in I}$.

Soient maintenant $(\Sigma_i \subset A_i^{\mathbb{M}})_{0 \leq i < l}$ une famille de sous-décalages et $\Sigma = (\prod_{0 \leq i < l} \Sigma_i, \sigma^{(i)})$ leur produit – la notation $\sigma^{(i)}$ est un raccourci de langage, puisqu'il s'agit d'un produit de systèmes dynamiques différents. Alors Σ est *conjugué* de façon évidente à $(\{z \in (\prod_{0 \leq i < l} A_i)^{\mathbb{M}} \mid \forall i \in \llbracket 0, l \rrbracket, \pi_i(z) \in \Sigma_i\}, \sigma)$ – qui est un sous-décalage quand $l < \infty$. On ne se privera donc pas de l'abus de langage consistant à identifier ces deux SS.

Si $k \in \mathbb{N}$, le *langage* d'ordre k du *produit* est le *produit* des *langages* d'ordre k ; de même pour le *projeté*.

Fait 2.3.1. Si $l \in \mathbb{N}$ et $(\mathcal{G}_j = (V_j, E_j))_{0 \leq j < l}$ est une famille finie de graphes, alors le produit $\prod_{0 \leq j < l} \Sigma_{\mathcal{G}_j}$ des systèmes d'étiquettes est le système d'étiquettes du **graphe produit** $\prod_{0 \leq j < l} \mathcal{G}_j = (V, E)$, défini par :

$$V = \prod_{0 \leq j < l} V_j$$

$$E = \{((v_j)_{0 \leq j < l}, (w_j)_{0 \leq j < l}, (a_j)_{0 \leq j < l}) \mid \forall j \in \llbracket 0, l \rrbracket, (v_j, w_j, a_j) \in E_j\} .$$

Le fait 2.2.6 permet de construire également le graphe correspondant à une projection d'un sous-décalage sofique produit donné.

Groupages. Les mémorisation et groupage généraux d'un SDD «mémorisaient» les m derniers points de l'orbite. Dans le cas d'un sous-décalage, une interversion d'indices – comme pour le produit – permet de retrouver un sous-décalage, ce qui amène aux définitions suivantes.

Définition 2.3.2 (Groupage).

– La **m -mémorisation** du sous-décalage $(\Sigma \subset A^{\mathbb{M}}, \sigma)$ est le *morphisme injectif* défini par :

$$\begin{aligned} \boxminus_m : \Sigma &\rightarrow (A^m)^{\mathbb{M}} \\ x &\mapsto (x_{\llbracket i, i+m \rrbracket})_{i \in \mathbb{M}} . \end{aligned}$$

– Le **m -mémorisé** est son système image $(\boxminus_m(\Sigma), \sigma)$. On dira que Σ en est son **m -démémorisé**.
 – Le **m -groupage** est le *morphisme injectif* de l'itéré $(\Sigma \subset A^{\mathbb{M}}, \sigma^m)$ vers le sous-décalage $((A^m)^{\mathbb{M}}, \sigma)$ défini par :

$$\begin{aligned} \boxplus_m : \Sigma &\rightarrow (A^m)^{\mathbb{M}} \\ x &\mapsto (x_{\llbracket mi, m(i+1) \rrbracket})_{i \in \mathbb{M}} . \end{aligned}$$

– Le **m -groupé** est son système image $(\boxplus_m(\Sigma), \sigma)$. On dira que Σ en est son **m -dégroué**.

Le m -mémorisé de Σ est donc *conjugué* à Σ , et son m -groupé est essentiellement l'itéré $m^{\text{ème}}$ de Σ , vu comme un décalage de blocs de longueur m . Son *langage* correspond donc à un découpage de $\mathcal{L}(\Sigma)$ par blocs de m . D'autre part par construction, pour $0 \leq i < m$, on a $\pi_i \boxminus_m = \sigma^i$.

La mémorisation permet de transformer un facteur en facteur lettre à lettre.

Fait 2.3.3. Si $d \in \mathbb{N}$ et $\phi : \mathcal{L}_d(\Sigma) \rightarrow B$ sont le diamètre et la règle locale d'une factorisation d'un sous-décalage $\Sigma \subset A^{\mathbb{M}}$ dans un autre $\Gamma \subset B^{\mathbb{M}}$, alors ϕ induit également une factorisation lettre à lettre du mémorisé $\boxplus_r(\Sigma)$ dans Γ .

En tant que conjugés aux sous-décalages groupés, les itérés de sous-décalages vérifient un analogue du théorème de Hedlund.

Fait 2.3.4. Soit $\Phi : \Gamma \rightarrow \Sigma$ un morphisme entre les itérés de sous-décalages (Γ, σ^m) et $(\Sigma, \sigma^{m'})$, avec $m, m' \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe un diamètre $d \in \mathbb{N}$, une ancre $n \in \mathbb{M}$ et une règle locale $\phi : \mathcal{L}_{dm}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{L}_{m'}(\Sigma)$ telles que pour toute configuration $x \in \Gamma$ et toute cellule $i \in \mathbb{M}$, $\Phi(x)_{\llbracket im', (i+1)m' \rrbracket} = \phi(x_{\llbracket (i-n)m, (i+d-n)m \rrbracket})$.

Si $d = 1$, on dira que Φ est **hors-contexte**; il s'agit d'une généralisation de la notion de «lettre à lettre» aux morphismes d'itérés de sous-décalages. On parlera en particulier de **simulation hors-contexte** lorsque le morphisme impliqué est lettre à lettre. On notera alors que la relation de *simulation hors-contexte* est un préordre.

Étant donné un sous-décalage sofique, on peut construire un graphe correspondant à un mémorisé donné, ou à un groupé donné : puisqu'il s'agit là de facteurs, ceci peut être réalisé par le fait 2.2.6. Inversement, si l'on a le graphe du mémorisé, on peut retrouver un graphe du sous-décalage de départ, puisqu'il est facteur de son mémorisé. C'est également le cas pour le groupé : on peut retrouver un graphe du sous-décalage m -dégrouper en remplaçant chaque arc d'étiquette $(a_i)_{0 \leq i < m}$ par m arcs a_i (en ajoutant $m - 1$ sommets) dont la succession des étiquettes correspond.

Chevauchements. La notion de chevauchement concerne les sous-décalages d'un produit qui partagent certaines colonnes; elle nous sera très utile, notamment dans la section 3.5.

Définition 2.3.5 (Chevauchement).

- Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et u, v deux mots de longueur k . Si $u_{\llbracket 1, k \rrbracket} = v_{\llbracket 0, k-1 \rrbracket}$, alors on dit que u et v sont **enjambants** et on définit leur **enjambement** comme le mot $u \oplus v = u_0 v = uv_{k-1}$, de longueur $k + 1$.
- On définit également l'**enjambement** de deux sous-codes U et V de A^k comme étant le code $U \oplus V = \{u \oplus v \mid u \in U, v \in V \text{ et } u_{\llbracket 1, k \rrbracket} = v_{\llbracket 0, k-1 \rrbracket}\}$ de l'ensemble des *enjambements* possibles entre les deux.
- Soient $k \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle de \mathbb{M} et $z = (z^i)_{i \in I}, z' = (z'^i)_{i \in I}$ deux mots (finis, infinis, ou biinfinis) sur l'alphabet A^k . Si $\pi_{\llbracket 1, k \rrbracket}(z^i) = \pi_{\llbracket 0, k-1 \rrbracket}(z'^i)$, alors on dit que ces mots sont **chevauchants** et on définit leur **chevauchement** comme le mot $z \odot z' = (z^i \oplus z'^i)_{i \in I}$.
- Si Σ et Σ' sont deux sous-ensembles de $(A^k)^I$, on définit leur **chevauchement** $\Sigma \odot \Sigma' = \{z \odot z' \mid z \in \Sigma, z' \in \Sigma' \text{ et } \pi_{\llbracket 1, k \rrbracket}(z^i) = \pi_{\llbracket 0, k-1 \rrbracket}(z'^i)\}$.
- Si $l \in \mathbb{N}$, on définit le l -**chevauchement** de $\Sigma \subset (A^k)^I$ par récurrence : $\Sigma^{[0]} = \Sigma$ et pour $l \geq 0$, $\Sigma^{[l+1]} = \Sigma^{[l]} \odot \Sigma^{[l]}$.
- On dit que $\Sigma \subset (A^k)^I$ est **autochevauchant** s'il est égal aux projections $\pi_{\llbracket i, i+k \rrbracket}(\Sigma^{[1]})$ de son 1 -chevauchement pour $0 \leq i \leq 1$.

Les opération d'enjambement et de chevauchement sont associatives, ce qui permet de bien pouvoir manipuler. Notamment pour une famille de mots $(u_i)_{0 \leq i \leq l} \in (A^k)^{l+1}$, avec $k \in \mathbb{N}^*$, $l \in \mathbb{N}$ telle que u_i et u_{i+1} sont enjambants pour $0 \leq i < l$, on pourra écrire $\bigoplus_{0 \leq i \leq l} u_i$ l'enjambement $u_0 \oplus \dots \oplus u_l \in A^{k+l}$. D'autre part, on remarque que si $l, l' \in \mathbb{N}$ et $\Sigma \subset (A^k)^I$, alors $(\Sigma^{[l]})^{[l']} = \Sigma^{[l+l']}$.

Remarque 2.3.6. Si $k \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle de \mathbb{M} et $\Sigma \subset (A^k)^I$, alors $\Sigma^{[l]}$ est le plus grand ensemble $\Gamma \subset (A^{k+l})^I$ tel que pour tout $i \in \llbracket 0, l \rrbracket$, $\pi_{\llbracket i, i+k \rrbracket}(\Gamma) \subset \Sigma$, *i.e.* :

$$\Sigma^{[l]} = \{u \in (A^{k+l-1})^I \mid \forall i \in \llbracket 0, l \rrbracket, \pi_{\llbracket i, i+k \rrbracket}(u) \in \Sigma\} .$$

Remarque 2.3.7. Le chevauchement est croissant : si $\Sigma \subset \Gamma$, alors pour tout $l \in \mathbb{N}$, $\Sigma^{[l]} \subset \Gamma^{[l]}$.

Nous allons maintenant voir que l'autochevauchement est transmis par chevauchement...

Lemme 2.3.8. Si $k \in \mathbb{N}^*$, I est un intervalle de \mathbb{M} et $\Sigma \subset (A^k)^I$ est autochevauchant, alors son 1 -chevauchement $\Sigma^{[1]}$ l'est également.

Preuve. On veut montrer que $\pi_{\llbracket 0, k \rrbracket}(\Sigma^{[2]}) = \pi_{\llbracket 1, k+1 \rrbracket}(\Sigma^{[2]}) = \Sigma^{[1]}$. Par définition, on a déjà l'inclusion. Réciproquement, soit $z \in \Sigma^{[1]}$; montrons que $z \in \pi_{\llbracket 0, k \rrbracket}(\Sigma^{[2]})$ (l'autre projection s'obtient par symétrie).

Notons que, par définition, $\pi_{\llbracket 1, k \rrbracket}(z)$ est un mot de Σ , donc par hypothèse de $\pi_{\llbracket 0, k \rrbracket}(\Sigma^{[1]})$: il existe $z' \in \Sigma^{[1]}$ tel que $\pi_{\llbracket 0, k \rrbracket}(z') = \pi_{\llbracket 1, k \rrbracket}(z)$. Donc $z \odot z' \in (\Sigma^{[1]})^{[1]}$; z est bien une projection de $\Sigma^{[2]}$. \square

Proposition 2.3.9. *Soient $k \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle de \mathbb{M} et $l \in \mathbb{N}$. Si $\Sigma \subset (A^k)^I$ est autochevauchant, alors il est égal aux projections $\pi_{\llbracket i, i+k \rrbracket}(\Sigma^{[l]})$ de son l -chevauchement, pour $0 \leq i \leq l$.*

Preuve. Montrons cette propriété par récurrence sur $l \in \mathbb{N}$. Le cas $l = 0$ est trivial. Soit donc $l \geq 0$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $\Sigma \subset A^k$ qui soit autochevauchant ; montrons que $\Sigma = \pi_{\llbracket i, i+k \rrbracket}(\Sigma^{[l+1]})$ pour $0 \leq i \leq l+1$. Par le lemme 2.3.8, on sait que $\Sigma^{[1]}$ est autochevauchant ; on peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence : $\Sigma^{[1]} = \pi_{\llbracket i, i+k+1 \rrbracket}(\Sigma^{[l+1]})$, pour $0 \leq i \leq l+1$. Mais puisque Σ égale toutes les projections de largeur k de $\Sigma^{[1]}$, il égale aussi toutes celles de $\Sigma^{[l+1]}$. \square

Puisque l'on a gardé, dans les notations, toute généralité au niveau de la finitude et de l'infinitude des mots considérés, on peut voir que le *langage* du *chevauchement* de deux sous-décalages est le *chevauchement* de leurs *langages* et qu'un sous-décalage est *autochevauchant* si et seulement si son *langage* aussi.

On peut également montrer que le chevauchement de deux sous-décalages sofiques est encore sofique.

Fait 2.3.10. *Si $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{G}_0 = (V_0, E_0)$ et $\mathcal{G}_1 = (V_1, E_1)$ deux graphes sur A^k , alors le chevauchement $\Sigma_{\mathcal{G}_0} \odot \Sigma_{\mathcal{G}_1}$ est le système d'étiquettes du graphe $\mathcal{G}_0 \odot \mathcal{G}_1 = (V, E)$ sur A^{k+1} défini par :*

$$\begin{aligned} V &= V_0 \times V_1 \\ E &= \{((v_0, v_1), (w_0, w_1), u_0 \oplus u_1) \mid \forall i \in \mathfrak{Z}, (v_i, w_i, u_i) \in E_i \text{ et } u_0 \text{ et } u_1 \text{ sont enjambants}\} . \end{aligned}$$

On peut étendre par récurrence cette construction aux sous-décalages $\Sigma^{[l]}$ pour $l \in \mathbb{N}^*$.

2.4 Soficité

Remarque 2.4.1. On peut voir que l'ensemble des étiquettes de chemins finis d'un *graphe* $\mathcal{G} = (V, E)$ sur A est exactement le *langage* de son *système d'étiquettes*. Le graphe peut donc être vu comme un automate fini reconnaissant le langage du sous-décalage, où les sommets représentent des états qui sont tous initiaux et terminaux. On peut construire l'*automate non déterministe* suivant (A, Q, δ, Q_0, Q_F) , où :

$$\begin{aligned} Q &= Q_0 = Q_F = V \text{ est l'ensemble des états,} \\ \delta : Q \times A &\rightarrow \mathfrak{Z}^Q \\ (v, a) &\mapsto \{w \mid (v, w, a) \in E\} \end{aligned} \quad \text{est la règle de transition.}$$

Réciproquement, si l'on se donne un *automate non déterministe* (A, Q, δ, Q_0, Q_F) , alors on peut construire un graphe (V, E) sur A dont les chemins finis sont étiquetés par les mots reconnus :

$$\begin{aligned} V &= Q \\ E &= \{(v, w, a) \mid w \in \delta(v, a)\} . \end{aligned}$$

On en déduit qu'un sous-décalage est *sofique* si et seulement si son *langage* est *rationnel*.

Contre-exemple 2.4.2. Il y a bien sûr de nombreux sous-décalages *non sofiques*, comme :

$$\overline{\mathcal{O}_\sigma(\{a^k b^k a^\infty \mid k \in \mathbb{N}\})} .$$

2.4.1 Résolubilité

Le déterminisme d'un automate fini se traduit sur les graphes par la condition suivante.

Définition 2.4.3 (Graphe résoluble).

- Un graphe \mathcal{G} est **résoluble à droite** (resp. **à gauche**) si le morphisme d'étiquetage $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$ est *résoluble à droite* (resp. *à gauche*), i.e. les arcs partant d'un (resp. arrivant à un) même sommet ont des étiquettes différentes.
- Il est **fortement résoluble** s'il est *résoluble à droite* et admet un sommet w_0 dit **initial**, tel que tout chemin infini a la même étiquette qu'un chemin infini partant de w_0 .

Remarque 2.4.4. Similairement à la remarque 2.2.5, on peut voir que toute *factorisation résoluble* d'un sous-décalage *markovien* Γ dans un sous-décalage Σ peut être vue comme l'*étiquetage* dans un graphe résoluble dont Γ et Σ sont les *systèmes d'arcs*, à renommage des lettres près, et *d'étiquettes*.

Une adaptation de la détermination d'automate nous donne l'existence d'un graphe résoluble pour chaque système d'étiquettes.

Fait 2.4.5. *Tout* graphe $\mathcal{G} = (V, E)$ est équivalent au graphe fortement résoluble $\mathcal{G}' = (V', E')$ de sommet initial W_0 , définis par :

$$\begin{aligned} V' &= 2^V \\ E' &= \{(U, W, a) \mid W = \{w \mid \exists v \in U, (v, w, a) \in E\}\} \\ W_0 &= V . \end{aligned}$$

De façon équivalente, on peut exprimer cette «détermination» en termes de factorisations de sous-décalages.

Corollaire 2.4.6. *Tout* sous-décalage *sofique* est *facteur* d'un sous-décalage *markovien* via une factorisation résoluble.

Remarque 2.4.7. Considérons le graphe *fortement résoluble* $\mathcal{G} = (V, E)$ de sommet initial w_0 et $u \in \mathcal{L}(\Sigma_{\mathcal{G}})$, i.e. il existe un unique chemin $(v_j, w_j, u_j)_{1 \leq j \leq l}$, avec $v_j = w_{j-1}$ pour tout $j \in \llbracket 1, l \rrbracket$. Alors le *résiduel* de u est l'ensemble des chemins infinis à droite qu'on peut lui accoler, i.e. ceux qui partent du sommet w_l : $u^{-1}\Sigma_{\mathcal{G}} = \{z \in \Sigma_{\mathcal{G}} \mid \exists (w_j)_{j>l} \in V^{\mathbb{N}}, \forall j > l, (w_{j-1}, w_j, z_j) \in E\}$. Il ne dépend donc que du sommet w_l . On en déduit que le nombre $|\{u^{-1}\Sigma_{\mathcal{G}} \mid u \in \mathcal{L}(\Sigma_{\mathcal{G}})\}|$ de résiduels distincts est borné par $|V|$. On peut tenir exactement le même raisonnement pour les sous-décalages bilatères. En utilisant le fait 2.4.5, on en déduit que tous les sous-décalages *sofiques* ont un nombre *fini* de *résiduels* distincts.

De la remarque précédente on déduit l'équivalent d'une variante déterministe du lemme de l'étoile.

Proposition 2.4.8. *Si* un sous-décalage Σ est le système d'étiquettes d'un graphe résoluble à n sommets, alors tout mot $z \in \Sigma$ a un préfixe uv de longueur $|uv| < n$ tel que $u \in A^*$, $v \in A^+$ et pour tout mot $uw \in \Sigma$ de même préfixe, $uv^*w \subset \Sigma$.

Preuve. Puisque Σ admet moins de n résiduels distincts, par le principe des tiroirs, on peut voir que parmi les $n + 1$ premiers préfixes d'un mot infini z , deux ont même résiduel. On définit u comme le plus court des deux, de sorte que l'autre soit de la forme uv . Donc si $w \in u^{-1}\Sigma$, alors $uvw \in \Sigma$; par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, on peut voir que $uv^k w \in \Sigma$. \square

En particulier, le mot périodique ${}^{\infty}v^{\infty}$ est bien dans Σ .

Corollaire 2.4.9. *Tout* sous-décalage *sofique* admet une configuration périodique.

On remarque que les constructions présentées du produit (cf fait 2.3.1) et du chevauchement (cf fait 2.3.10) préservent la résolubilité. En revanche, elle n'est en général pas préservée par les projections, ni par le dégroupage.

2.4.2 Minimisation

En continuant à utiliser la théorie des automates, on peut obtenir un graphe minimal représentant un sous-décalage donné. L'adaptation est simple car on requiert la résolubilité forte – ce qui est très différent de la notion de présentation minimale présentée par exemple dans [42, 73].

Définition 2.4.10 (Graphe minimal). Un graphe est (résoluble) **minimal** s'il est *fortement résoluble* et a *au plus autant* de sommets que tout graphe fortement résoluble équivalent.

À l'instar de l'automate minimal, pour chaque système d'étiquettes, un tel graphe existe et est unique à renommage des sommets, des arcs ou des étiquettes près.

Remarque 2.4.11. Supposons que $\Sigma \subset A^{\mathbb{N}}$ est un sous-décalage unilatère avec un nombre fini de résiduels distincts. Alors c'est le *système d'étiquettes* du graphe $\mathcal{M}_{\Sigma} = (V, E)$ défini par :

$$\begin{aligned} V &= \{ u^{-1}\Sigma \mid u \in \mathcal{L}_+(\Sigma) \} \\ E &= \{ (U, W, a) \mid W = (ua)^{-1}\Sigma \text{ où } u \text{ est tel que } U = u^{-1}\Sigma \text{ et } ua \in \mathcal{L}(\Sigma) \} . \end{aligned}$$

Le graphe \mathcal{M}_{Σ} est *fortement résoluble* ; il est même *minimal* puisque son nombre $|V|$ de sommets est le nombre de *résiduels* distincts $u^{-1}\Sigma$ pour $u \in \mathcal{L}_+(\Sigma)$ (cf remarque 2.4.7).

En combinant les dernières remarques, on obtient l'équivalence suivante, raffinement du théorème de Weiss (cf [74]).

Théorème 2.4.12. *Si Σ est un sous-décalage, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. Σ est sofique.
2. Σ admet un nombre fini de résiduels distincts.
3. Σ est le système d'étiquettes d'un graphe minimal.
4. Σ est facteur résoluble à droite d'un sous-décalage markovien.
5. Σ est facteur d'un sofique.

Preuve .

1 \Rightarrow 2: par la remarque 2.4.7.

2 \Rightarrow 3: par la remarque 2.4.11.

3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5 : par la remarque 2.2.5.

5 \Rightarrow 1: par le fait 2.2.6. □

Remarque 2.4.13. Dans un graphe *minimal*, pour tout sommet v , il existe un mot u du langage du système d'étiquettes telle que tous les chemins étiquetés par u passent par v .

En effet, si un sommet ne vérifiait pas cette condition, on pourrait l'ôter ainsi que les arcs adjacents et obtenir un graphe, toujours résoluble, avec un sommet de moins et le même système d'étiquettes.

On peut montrer que le graphe minimal est minimal au sens de la factorisation également : toute autre extension lettre à lettre résoluble markovienne du système d'étiquettes est une extension du système d'arcs.

Proposition 2.4.14. *Soit \mathcal{G} un graphe fortement résoluble et Σ son système d'étiquettes. Alors on a une décomposition $E_{\mathcal{G}} = \mathcal{E}_{\mathcal{M}_{\Sigma}}\Psi$, où Ψ est une factorisation résoluble entre les systèmes d'ars $\Gamma_{\mathcal{G}}$ et $\Gamma_{\mathcal{M}_{\Sigma}}$.*

Preuve. Notons $\mathcal{M}_{\Sigma} = (V, E)$, $\mathcal{G} = (V', E')$ et v_0 son sommet initial. Nous avons vu avec la remarque 2.4.7 que tous les mots étiquetant un chemin depuis v_0 et arrivant à un même sommet ont le même résiduel. On peut donc associer à chaque sommet v du graphe l'unique résiduel $\tilde{\psi}(v) = u^{-1}\Sigma$ de tous les mots finis u étiquetant un chemin de v_0 à v . Par définition, l'ensemble V de sommets du graphe minimal (construit à la remarque 2.4.11) est l'ensemble de ces résiduels. De plus, dans \mathcal{M}_{Σ} , un arc d'étiquette

a relie deux sommets $w, w' \in V$ si et seulement s'il existe un mot u et une lettre a tels que $w = u^{-1}\Sigma$ et $w' = (ua)^{-1}\Sigma$, *i.e.* si et seulement s'il existe deux sommets $v, v' \in V'$ dont les images par $\tilde{\psi}$ sont w et w' et qui sont reliés par un arc d'étiquette a . En d'autres termes, il y a une factorisation Ψ entre les systèmes d'arcs de \mathcal{G} et de \mathcal{M}_Σ , induite par la règle locale :

$$\begin{aligned} \psi : \quad E' &\rightarrow E \\ (v, w, a) &\mapsto (\tilde{\psi}(v), \tilde{\psi}(w), a) . \end{aligned}$$

Cette factorisation est résoluble car le graphe \mathcal{G} est résoluble. □

En appliquant la proposition précédente à deux graphes minimaux de même système d'étiquettes, on voit qu'une factorisation lettre à lettre relie leurs deux systèmes d'arcs.

Corollaire 2.4.15. *Le système d'arcs de graphes minimaux ayant un système d'étiquettes donné est essentiellement unique.*

On parlera donc du **graphe minimal** d'un sous-décalage sofique donné.

Le contre-exemple suivant nous montre que la condition de résolubilité forte est indispensable.

Contre-exemple 2.4.16. Le sous-décalage $1^*0(0^\infty + 1^\infty)$ admet 4 résiduels distincts (le sous-décalage tout entier, $0^\infty + 1^\infty$, 0^∞ et 1^∞) reliés par 5 arcs dans le graphe minimal. Or il est le système d'étiquettes d'un graphe à 3 sommets et 6 arcs : ($\llbracket 0, 2 \rrbracket, \{(0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 2, 0), (1, 1, 0), (2, 2, 1)\}$). Il ne peut donc pas y avoir de factorisation lettre à lettre du système d'arcs de ce dernier dans celui du graphe minimal.

2.5 Type fini

Les sous-décalages de type fini représentent une sous-classe des sous-décalages soifiques qui, comme eux, admettent plusieurs caractérisations.

Caractérisations symboliques.

Définition 2.5.1 (Sous-décalage de type fini).

- Un sous-décalage est de **type fini** (STF) s'il admet un *langage interdit fini*. Il est de **type infini** sinon.
- Il est **d'ordre k** (k -STF), où $k \in \mathbb{N}$, s'il admet un *langage interdit* $L \subset A^k$. De manière équivalente, c'est un STF et k est la longueur maximale des mots d'un langage interdit.
- La **k -approximation** d'un sous-décalage $\Sigma \subset A^{\mathbb{M}}$ est le plus grand sous-décalage dont le langage d'ordre k est $\mathcal{L}_k(\Sigma)$:

$$\mathcal{A}_k(\Sigma) = \{ z \in A^{\mathbb{M}} \mid \forall i \in \mathbb{M}, z_{\llbracket i, i+k \rrbracket} \in \mathcal{L}_k(\Sigma) \} .$$

Remarquons qu'une configuration appartient à un k -STF si et seulement si tous ses facteurs de longueur k sont dans le langage correspondant. La k -approximation de Σ est donc le plus petit k -STF contenant Σ .

Théorème 2.5.2. *Si Σ est un sous-décalage et $k \in \mathbb{N}^*$, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. Σ est de type fini d'ordre k .
2. L'enjambement $u \oplus v$ de tous mots enjambants $u, v \in \mathcal{L}_k(\Sigma)$ est dans $\mathcal{L}_{k+1}(\Sigma)$.
3. Pour tous mots $u, v, w \in A^+$ tels que $|u| = k$ et $vu, uw \in \mathcal{L}(\Sigma)$, on a $vuw \in \mathcal{L}(\Sigma)$.
4. Σ coïncide avec sa k -approximation.

Nous verrons avec le corollaire 2.6.8 que la notion de type fini englobe les sous-décalages finis, mais cette inclusion est stricte, comme on le voit dans l'exemple suivant.

Exemple 2.5.3. Le sous-décalage $\Sigma = 1^*0^\infty$ sur l'alphabet $\mathbb{2}$ est appelé **compteur unaire**. Il est *infini* et d'ordre 2, puisque $\{01\}$ en est un *langage interdit*.

Remarquons qu'en dimension supérieure, si la généralisation des sous-décalages sofiques paraît peu évidente (cf [75]), on peut en revanche facilement se représenter un **STF** en considérant l'ensemble des configurations où l'on interdit un nombre fini de motifs finis.

Caractérisations topologiques.

Remarque 2.5.4. Un sous-décalage Σ est un STF si et seulement s'il est le plus grand sous-décalage inclus dans un ouvert $U : \Sigma = \bigcap_{j \in \mathbb{M}} \sigma^j(U)$.

En effet, la k -*approximation* d'un sous-décalage Γ est le plus grand sous-décalage dont le *langage d'ordre* k est dans $\mathcal{L}_k(\Gamma)$, i.e. inclus dans $U = [\mathcal{L}_k(\Gamma)]$.

Nous verrons avec la proposition 2.6.19 une caractérisation supplémentaire des STF par la propriété de pistage.

Dans le cas unilatère, on a encore une autre caractérisation des STF, en tant qu'uniques sous-décalages ouverts. Elle n'est pas généralisable aux sous-décalages bilatères, qui sont tous injectifs et donc ouverts.

Théorème 2.5.5 ([76]). *Un sous-décalage unilatère est de type fini si et seulement s'il est ouvert.*

Caractérisations graphiques.

Remarque 2.5.6. Le *système d'arcs* $\Gamma_{\mathcal{G}}$ d'un graphe $\mathcal{G} = (V, E)$ est un *2-STF* puisqu'une configuration $(v_j, w_j, a_j)_{j \in \mathbb{M}}$ lui appartient si et seulement si $v_{j+1} = w_j$ pour tout $j \in \mathbb{M}$.

Le synchronisme d'un graphe est une propriété qui correspond à la possibilité de retrouver le chemin parcouru après avoir lu un nombre fini d'étiquettes.

Définition 2.5.7 (Graphe synchronisant). Un graphe est k -**synchronisant**, où $k \in \mathbb{N}^*$ est l'**ordre** du synchronisme, si deux chemins de longueur k ayant la même étiquette arrivent sur le même sommet.

Autrement dit, un graphe \mathcal{G} est synchronisant si l'*étiquetage* des chemins infinis est une *conjugaison* entre les systèmes d'arcs et d'étiquettes bilatères. L'*ordre* du synchronisme k égale alors le *diamètre* de la conjugaison inverse $E_{\mathcal{G}}^{-1}$. On peut dire plus que cela : le *système d'arcs* est, à renommage près, le k -*mémorisé* du *système d'étiquettes* ; en particulier, la *conjugaison* en question est *bipermutative* – elle est même *permutative* en chaque variable – et d'inverse *lettre à lettre*.

Dans un graphe k -*synchronisant*, les *systèmes d'arcs* et d'*étiquettes* unilatères peuvent ne pas être *conjugués*. C'est le cas par exemple pour le sous-décalage 1^*0^∞ .

Fait 2.5.8. *Si Σ est un sous-décalage et $k \in \mathbb{N}^*$, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. Σ est un STF d'ordre k .
2. Le résiduel de tout mot u de longueur au moins k vaut $u^{-1}\Sigma = u_{\llbracket |u| - k, |u| \rrbracket}^{-1}\Sigma$.
3. Σ est le système d'étiquettes d'un graphe minimal k -synchronisant.
4. Il y a une conjugaison de diamètre k de Σ dans un sous-décalage markovien.
5. Le mémorisé $\boxplus_k(\Sigma)$ est un sous-décalage markovien.

On voit en particulier que, si le type fini est un invariant de conjugaison, l'ordre en revanche ne l'est pas puisque tous les STF sont conjugués à un STF d'ordre 2. On peut d'ailleurs déduire de cela et du théorème 2.4.12la formulation originelle du théorème de Weiss (cf [74]) : les sous-décalages sofiques sont les sous-décalages facteurs de STF.

Remarque 2.5.9. Si $\Sigma \subset A^{\mathbb{Z}}$ est un STF bilatère d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$, alors le sous-décalage unilatère $\tilde{\Sigma} \subset A^{\mathbb{N}}$ correspondant (de même langage) est un k -STF. Il y a donc une conjugaison bipermutive unidirectionnelle et d'inverse lettre à lettre (la mémorisation) de $\tilde{\Sigma}$ dans le système unilatère d'arcs d'un graphe k -synchronisant ; le graphe n'admettant alors que des sommets accessibles, cette conjugaison peut être vue comme une conjugaison de Σ dans le système bilatère d'arcs de ce graphe. De façon symétrique, il existe une autre conjugaison bipermutive, unidirectionnelle à gauche et d'inverse lettre à lettre de Σ dans un système bilatère d'arcs.

Graphe réduit. Nous allons voir ici, dans le cas des STF, un autre type de minimisation que celui présenté dans la section précédente. Un graphe (V, E) est dit **réduit à gauche** (resp. **à droite**) s'il n'admet pas un couple de sommets distincts qui ont même voisinage entrant (resp. sortant), *i.e.* tel que les sommets initiaux des arcs arrivant à (resp. partant de) chacun de ces deux sommets sont identiques.

Proposition 2.5.10. *Si Σ est un STF bilatère, alors il existe un graphe réduit à gauche \mathcal{G} et une conjugaison Φ de Σ dans $\Sigma_{\mathcal{G}}$ tels que Φ et Φ^{-1} soient permutives à gauche.*

Preuve. Par la remarque 2.5.9, il existe déjà une conjugaison unidirectionnelle à gauche et d'inverse lettre à lettre de Σ dans le système d'arcs $\Sigma_{\mathcal{G}}$ d'un graphe $\mathcal{G} = (V, E)$ dont les étiquettes des arcs peuvent être supposées distinctes. Supposons que \mathcal{G} n'est pas réduit à gauche, *i.e.* il admet deux sommets $v, w \in V$ tels que tout voisin entrant de v est un voisin entrant de w . On peut alors construire un graphe en fusionnant les sommets v et w et leurs arcs entrants deux à deux :

$$\mathcal{G}' = (V' = V \setminus \{w\}, (E \cap V \times V \times A) \cup \{(v, u, a) \mid (w, u, a) \in E\}) .$$

La conjugaison lettre à lettre de $\Sigma_{\mathcal{G}}$ dans $\Sigma_{\mathcal{G}'}$ définie par la transformation de w en v a une inverse permutive à gauche, d'ancre 1, de diamètre 2 et de règle locale (bien définie grâce au fait que les étiquettes de \mathcal{G} sont distinctes) :

$$\phi : \begin{array}{ccc} E'^2 & \rightarrow & E \\ ((v_0, w_0, a_0), (w_0, w_1, a_1)) & \mapsto & \begin{cases} (v_0, w, b) & \text{si } w_0 = v \text{ et } (v_0, w, b), (w, w_1, a_1) \in E \\ (w, w_0, a_0) & \text{si } (w, w_0, a_0) \in E \\ (v_0, w_0, a_0) & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

On ne peut itérer cette transformation de \mathcal{G} en \mathcal{G}' qu'un nombre fini de fois, puisque le nombre (naturel) de sommets décroît ; on parvient donc forcément à un graphe réduit. La composition des conjugaisons permutives à gauche impliquées reste alors permutive à gauche. \square

Prolongement de morphisme. Les STF sont tout à fait adaptés au caractère local conféré aux morphismes de sous-décalages par le théorème de Hedlund : de fait, la règle locale peut toujours être vue comme agissant sur un STF.

Fait 2.5.11. *Tout morphisme Φ de diamètre d d'un sous-décalage Σ dans un autre peut être prolongé, de façon unique, à l'approximation $\mathcal{A}_d(\Sigma)$ en gardant mêmes diamètre, ancre et règle locale.*

Si l'image du morphisme de départ est un STF, on peut s'arranger pour que le prolongement garde la même image.

Proposition 2.5.12. *Si Φ est un morphisme de diamètre $d \in \mathbb{N}$ d'un STF Σ d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$ dans un sous-décalage Γ , alors l'image inverse par Φ de tout STF $\Gamma' \subset \Gamma$ d'ordre $l \in \mathbb{N}^*$ est un STF d'ordre $h = \max(k, d + l - 1)$.*

Preuve. Soit $m \in \mathbb{M}$ l'ancre de Φ , $\Sigma' = \Phi^{-1}(\Gamma')$ et $z \in \mathcal{A}_h(\Sigma')$; montrons que $z \in \Sigma'$. On sait déjà que z est dans Σ , qui est d'ordre $k \leq h$. Pour tout $i \in \mathbb{M}$, $z_{\llbracket i, i+d+l-1 \rrbracket} \in \mathcal{L}_{d+l-1}(\Sigma')$, donc $\Phi(z)_{\llbracket i+m, i+l+m \rrbracket} = \phi(z_{\llbracket i, i+d+l-1 \rrbracket}) \in \mathcal{L}_l(\Gamma')$; puisque Γ est un l -STF, on en déduit que $\Phi(z) \in \Gamma$, donc $z \in \Sigma'$. \square

Par exemple, pour un *morphisme lettre à lettre* défini sur un STF d'ordre au plus $k \in \mathbb{N}^*$, l'image de la k -*approximation* d'un sous-décalage est incluse dans la k -*approximation* de son image.

En appliquant la proposition précédente au prolongement obtenu dans le fait 2.5.11, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 2.5.13. *Toute factorisation Φ de diamètre $d \in \mathbb{N}$ d'un sous-décalage Σ dans un STF Γ d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$ peut être prolongée à l'approximation $\mathcal{A}_{k+d-1}(\Sigma)$ en gardant même diamètre, ancre, règle locale et image Γ .*

D'autre part, la proposition 2.5.12 permet de prouver que deux extensions d'un même sous-décalage admettent une extension commune, qui est de type fini si les sous-décalages de départ le sont.

Proposition 2.5.14. *Soient Σ, Γ, Γ' trois sous-décalages liés par deux factorisations $\Phi : \Sigma \rightarrow \Gamma$ et $\Psi : \Gamma' \rightarrow \Gamma$. Alors le sous-décalage $\Sigma' = \{(z, z') \in \Sigma \times \Gamma' \mid \Phi(z) = \Psi(z')\}$ est une extension de Σ par la factorisation π_0 , de Γ' par la factorisation π_1 et de Γ par la factorisation $\Phi\pi_0 = \Psi\pi_1$. Si les factorisations Φ et Ψ sont de diamètre $k \in \mathbb{N}^*$, alors $\Phi\pi_0 = \Psi\pi_1$ l'est aussi. Si de plus Σ et Γ' sont d'ordre k , alors Σ' aussi.*

Preuve. Seule la dernière assertion mérite une preuve : Σ' est l'ensemble des configurations $z \in A^{\mathbb{M}}$ telles que pour toute cellule $i \in \mathbb{M}$, $\pi_0(z)_{\llbracket i, i+k \rrbracket} \in \mathcal{L}_k(\Sigma)$ et $\pi_1(z)_{\llbracket i, i+k \rrbracket} \in \mathcal{L}_k(\Gamma')$ et $\phi(\pi_0(z)_{\llbracket i, i+k \rrbracket}) = \psi(\pi_1(z)_{\llbracket i, i+k \rrbracket})$, si ϕ et ψ sont les règles locales de Φ et Ψ ; cela représente bien une condition locale d'appartenance. \square

Type fini et simulation. Nous avons déjà vu que les facteurs – en particulier les groupés – de sofiques sont sofiques, leurs dégroupés également.

De plus, les constructions présentées dans les faits 2.3.1 et 2.3.10 préservent le *synchronisme*. En conséquence, un *produit* ou un *chevauchement* de STF est un STF de même ordre. En revanche, ceci est faux en général pour les facteurs, et même les projections (puisque, par le théorème de Weiss, tous les sofiques sont une projection d'un STF). On peut tout de même voir, en les caractérisant par le langage, qu'un sous-décalage est de type fini si et seulement si chacun de ses groupés (resp. mémorisés) l'est également. D'autre part, un sous-système d'un sous-décalage sofique (resp. de type fini) peut bien sûr ne pas l'être; par exemple, tous les sous-décalages sont des sous-systèmes d'un décalage complet, qui est bien sûr de type fini.

Les *simulations complètes* préservent donc la *soficité* et les *simulations complètes exactes* préservent la *type fini*. De plus, les *simulations* de période $m \in \mathbb{N}^*$ par pas de $m' \in \mathbb{N}^*$ d'un sous-décalage Σ dans un autre Γ sont essentiellement les *sous-factorisations* entre les groupés $\boxplus_m(\Sigma)$ et $\boxplus_{m'}(\Gamma)$.

2.6 Propriété des sous-décalages

2.6.1 Sous-décalages simples

Cycles. Soit \mathcal{C}_n le n -*cycle*, i.e. le SDD $(\llbracket 0, n \rrbracket, \text{succ}_n : i \mapsto i + 1 \bmod n)$, où $\llbracket 0, n \rrbracket$ est muni de la *topologie discrète*.

Proposition 2.6.1. *Un cycle \mathcal{C}_m est facteur d'un cycle \mathcal{C}_n , avec $m, n \in \mathbb{N}$, si et seulement si m divise n .*

Preuve.

- Si m divise n , alors
$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}_n & \rightarrow & \mathcal{C}_m \\ i & \mapsto & i \bmod m \end{array}$$
 est une factorisation lettre à lettre.
- Réciproquement, s'il existe une factorisation de \mathcal{C}_n dans \mathcal{C}_m , alors le fait 1.5.8 nous dit que tous les points de l'image doivent être n -périodiques, donc n est multiple de m . \square

On peut montrer une caractérisation des cycles à conjugaison près, comme seuls sous-décalages transitifs dont toutes les configurations sont périodiques.

Fait 2.6.2. *Si Σ est un sous-décalage, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. Σ est essentiellement un cycle.
2. Σ est réduit à une seule orbite périodique.
3. Σ est le système d'étiquettes d'un graphe cyclique.

La transitivité d'un sous-décalage est très restrictive, comme nous le verrons avec le fait 2.6.16, et permet une caractérisation un peu plus précise des cycles.

Fait 2.6.3. *Si Σ est un sous-décalage transitif, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. Σ est essentiellement un cycle.
2. Σ est faiblement périodique.
3. Σ est dénombrable.
4. Σ n'est pas sensible.

Par injectivité, on peut remarquer que les configurations *prépériodiques* d'un sous-décalage bilatère sont *périodiques* ; en particulier les sous-décalages bilatères *prépériodiques* (resp. *faiblement*) sont *périodiques* (resp. *faiblement*).

Sous-décalages finis. Tous les SDD finis sont essentiellement des sous-décalages, puisqu'on peut dessiner le graphe pâquerette dont les sommets sont les points de l'espace des phases et les arcs représentent l'application du SDD. On a, de plus, des caractérisations symbolique, topologique et graphique de la finitude d'un sous-décalage.

Fait 2.6.4. *Si Σ est un sous-décalage, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. Σ est fini.
2. $\exists n \in \mathbb{N}, \mathcal{K}_{\mathcal{L}(\Sigma)}(n) \leq n$.
3. Σ est équicontinu.
4. Il y a un $k \in \mathbb{N}$ tel que l'application de sous-mot central $z \mapsto z_{(k)}$ est injective.
5. Σ est prépériodique (donc périodique dans le cas bilatère).
6. Σ est le système d'étiquettes d'un graphe pâquerette.
7. Σ est essentiellement le système d'arcs d'un graphe pâquerette.

Un sous-décalage sofique dont toutes les configurations sont périodiques peut en quelque sorte être décomposé en cycles ; la caractérisation du fait 2.6.3 nous permet alors d'en déduire la propriété suivante.

Fait 2.6.5. *Tout sous-décalage sofique faiblement périodique est fini.*

On peut donc uniformiser la période des configurations dans le cas sofique. Cela nous donne une caractérisation : les sous-décalages bilatères *sofiques* sont *finis* si et seulement s'ils sont *faiblement périodiques*. On a une caractérisation similaire dans le cas unilatère : un sous-décalage sofique est *fini* si et seulement s'il existe une prépériode $q \in \mathbb{N}$ telle que pour toute configuration $x \in \Sigma$, $F^q(x)$ est *prépériodique*. En revanche, on ne peut pas uniformiser la prépériode, comme le montre le contre-exemple suivant – nous verrons dans le théorème 2.6.40 une autre caractérisation de la faible prépériodicité.

Contre-exemple 2.6.6. Le sous-décalage $\overline{\mathcal{O}_\sigma(0^*1^\infty)}$ est *faiblement prépériodique*, sofique et *infini*.

Tous les sous-décalages bilatères sont injectifs, mais dans le cas unilatère sofique, cette propriété est si rare qu'elle impose la finitude.

Fait 2.6.7. *Un sous-décalage unilatère sofique est injectif si et seulement s'il est périodique.*

En particulier, les seuls à être en même temps injectifs et transitifs sont les cycles.

Dans le fait 2.6.4, la caractérisation en termes de système d'arcs nous donne l'implication suivante.

Corollaire 2.6.8. *Les sous-décalages finis sont de type fini.*

Déterminisme. Un sous-décalage Σ est **déterministe** sur A si pour toute lettre $a \in A$, il existe une unique lettre $b \in A$ telle que $ab \in \mathcal{L}(\Sigma)$ (en particulier, il s'agit d'un sous-décalage *markovien*). De manière équivalente, dans le cas unilatère (resp. bilatère), il existe un SDD ξ (resp. bijectif) sur l'espace discret A , tel que Σ contient $\mathcal{O}_\xi = \{\mathcal{O}_\xi(a) \mid a \in A\}$ (resp. \mathcal{O}_ξ^*). En particulier, un sous-décalage *déterministe* est (p, q) -*préperiodique*, avec $p + q \leq |A|$. Notons qu'un sous-décalage déterministe n'a rien à voir avec un automate déterministe – si ce n'est qu'il est le système d'arcs d'un graphe résoluble dont tous les arcs ont la même étiquette.

Proposition 2.6.9. *Tout sous-décalage markovien Σ contient un sous-décalage déterministe sur l'alphabet $\mathcal{L}_1(\Sigma)$.*

Preuve. En effet, si Σ est un sous-décalage markovien et $A = \mathcal{L}_1(\Sigma)$, alors pour toute lettre $a \in A$, il existe un mot $z \in \Sigma$ tel que $z_0 = a$. On peut définir $\xi(a) = z_1$; on obtient alors une fonction $\xi : A \rightarrow A$ telle que pour tout mot $u \in \mathcal{L}_2(\mathcal{O}_\xi)$, $ab \in \mathcal{L}_2(\Sigma)$, donc puisque Σ est un STF d'ordre 2, on a bien $\mathcal{O}_\xi \subset \Sigma$. \square

Fait 2.6.10. *Si $\Sigma = \mathcal{O}_\xi$ est un sous-décalage déterministe, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. Σ est nilpotent.
2. Σ est faiblement nilpotent.
3. ξ est nilpotent.
4. $\forall a, b \in A, \exists j \in \mathbb{N}, \xi^j(a) = \xi^j(b)$.

Notons qu'un sous-décalage *déterministe surjectif* (en particulier bilatère) peut s'écrire comme une union $\bigcup_{0 \leq i < l} \mathcal{O}_\sigma(u^i)$ de cycles, où $l \in \mathbb{N}$ et $\{\{u_j^i \mid 0 \leq j < |u^i|\} \mid 0 \leq i < l\}$ est une partition de l'alphabet A . Le cas particulier du mélange devient alors trivial.

Fait 2.6.11. *Un sous-décalage déterministe mélangeant est réduit à une configuration (uniforme).*

2.6.2 Dynamique topologique

On peut faire une remarque topologique fondamentale sur les sous-décalages unilatères : par construction, toute différence entre deux mots infinis va apparaître au préfixe après un certain nombre d'étapes de décalage ; en raisonnant de manière similaire pour les sous-décalages bilatères, on parvient au résultat suivant – avant que le théorème 4.6.1 n'en fasse une caractérisation.

Proposition 2.6.12. *Les sous-décalages bilatères (resp. unilatères) sont expansifs (resp. positivement).*

Preuve. Si $x, y \in A^{\mathbb{M}}$ sont deux configurations distinctes, alors $\exists i \in \mathbb{M}, x_i \neq y_i$, donc $d(\sigma^i(x), \sigma^i(y)) = 2^0$; cela prouve la 1-expansivité (resp. positive). \square

Sensibilité. Le décalage est un système dans lequel la structure de l'espace est directement liée à la dynamique ; on en déduit une caractérisation de la sensibilité.

Remarque 2.6.13. Une configuration z d'un sous-décalage Σ est 2^{-k} -*stable* si et seulement si elle est la seule configuration à avoir $z_{\langle k \rangle}$ comme sous-mot central. La *stabilité* est donc équivalente à l'*isolement*.

Proposition 2.6.14. *Si Σ est un sous-décalage, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. Σ est 1-sensible.
2. Σ n'est pas quasi-équicontinu.
3. Σ est parfait.
4. Tout mot fini $u \in \mathcal{L}(\Sigma)$ est extensible de deux manières, i.e. il existe v, w distincts et de même longueur tels que $uv, uw \in \mathcal{L}(\Sigma)$ ou $vu, wu \in \mathcal{L}(\Sigma)$.

Preuve .

1 \Rightarrow 2: trivial.

2 \Rightarrow 3: Supposons que Σ est un sous-décalage avec un point isolé z , i.e. il est seul dans la boule ouverte $\mathcal{B}_\delta(z)$, avec $\delta > 0$. En particulier, pour tout $\varepsilon > 0$, tout point y de $\mathcal{B}_\delta(z)$ et toute génération $j \in \mathbb{N}$, la distance $d(\sigma^j(y), \sigma^j(x))$ est $0 < \varepsilon$, donc z est ε -stable.

3 \Rightarrow 4: Soit u un mot de $\mathcal{L}(\Sigma)$, i.e. un sous-mot central $z_{\langle k \rangle}$ d'une configuration $z \in \Sigma$, avec $k \in \mathbb{N}$. Si z n'est pas isolé, alors il existe $z' \in \mathcal{B}_{2^{-k}}(z) \setminus \{z\}$, i.e. $z'_{\langle k \rangle} = z_{\langle k \rangle}$ mais $z'_i \neq z_i$ avec $|i| > k$. Si $i > k$, alors on prend $v = z_{\llbracket k, i \rrbracket}$ et $w = z'_{\llbracket k, i \rrbracket}$; on raisonne symétriquement si $i < -k$.

4 \Rightarrow 1: Soit $z \in \Sigma$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, le sous-mot central $z_{\langle k \rangle}$ est extensible de deux manières : il existe alors $z' \neq z$ tel que $z'_{\langle k \rangle} = z_{\langle k \rangle}$, donc $d(z, z') < 2^{-k}$ mais il y a un $j \in \mathbb{N}$ pour lequel $z'_j \neq z_j$ donc $d(\sigma^j(z), \sigma^j(z')) = 1$: z est 1-instable. \square

En particulier, on voit que le système d'étiquettes d'un graphe résoluble est sensible si et seulement si de tout sommet partent deux chemins distincts de même longueur.

Fait 2.6.15. Un sous-décalage sofique est quasi-équicontinu si et seulement s'il est le système d'étiquettes d'un graphe admettant une composante fortement connexe minimale réduite à un cycle. Les configurations équicontinues sont alors les étiquettes des chemins infinis qui bouclent ultimement dans un tel cycle.

Inversement, les sous-décalages soifiques sensibles sont ceux dont le graphe minimal n'a aucune composante connexe minimale réduite à un cycle.

Notons également qu'un sous-décalage sensible a un langage à complexité exponentielle et est donc indénombrable. Les sous-décalages dénombrables sont donc quasi-équicontinus. Dans le cas sofique, on peut caractériser leur ensemble d'équicontinuité de la façon suivante.

Transitivité. Le fait que les cylindres centraux forment une base de la topologie de Cantor permet de récrire en termes de mots finis les propriétés faisant intervenir des ouverts. Un sous-décalage Σ est transitif si et seulement si $\forall u, v \in \mathcal{L}(\Sigma), \exists w \in A^*, uvw \in \mathcal{L}(\Sigma)$. Il est mélangeant si et seulement si de plus w peut être de n'importe quelle longueur suffisamment grande. En particulier, ces propriétés ne varient pas entre sous-décalages bilatère et unilatère correspondants.

Un sous-décalage est transitif si et seulement si tous les motifs de son langage se retrouvent dans une même configuration – qui est transitive. Il est autotransitif si et seulement si chaque motif de son langage se retrouve une infinité de fois dans une même configuration.

Fait 2.6.16. Si Σ est un sous-décalage sofique, les assertions suivantes sont équivalentes.

1. Σ est transitif.
2. Le graphe minimal de Σ est fortement connexe.
3. Σ est le système d'étiquettes d'un graphe fortement connexe.

Dans le cas unilatère, la transitivité est également équivalente à la transitivité forte. Nous verrons dans le théorème 2.6.40 qu'un sous-décalage sofique transitif est soit périodique, soit indénombrable.

Fait 2.6.17. Si Σ est un sous-décalage sofique, les assertions suivantes sont équivalentes.

1. Σ est régulier.

2. Σ est autotransitif.
3. Σ est l'union disjointe de sous-décalages transitifs.

On dit qu'un graphe est **apériodique** si les longueurs de ses cycles sont premières dans leur ensemble.

Fait 2.6.18. *Si Σ est un sous-décalage sofique, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. Σ est mélangeant.
2. Σ est faiblement mélangeant.
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'itéré (Σ, σ^k) est transitif.
4. Le graphe minimal de Σ est fortement connexe et apériodique.
5. Σ est le système d'étiquettes d'un graphe fortement connexe apériodique.

Cette caractérisation non plus ne dépend pas du monoïde $\mathbb{M} = \mathbb{Z}$ ou \mathbb{N} .

Pour d'autres remarques sur les liens entre la connexité du graphe et les propriétés topologiques de son système d'étiquettes, on se référera à [77].

Chaînes. Si Σ est un sous-décalage et $l \in \mathbb{N}$, alors une 2^{-l} -chaîne est une séquence $(x^j)_{j \in I} \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ de configurations, où I est un intervalle de \mathbb{Z} et pour tout $j, j+1 \in I$, $x_{[0, l-1]}^{j+1} = x_{[1, l]}^j$. On peut lui associer son projeté $\pi_0(x)$, qui a la propriété d'avoir tous ses facteurs de longueur l dans $\mathcal{L}_l(\Sigma)$. Réciproquement, si $z \in \mathcal{A}_l(\Sigma)$, alors $(\sigma^j(z))_{j \in \mathbb{N}}$ est une 2^{-l} -chaîne de Σ .

Proposition 2.6.19 (Walters [78]). *Si Σ est un sous-décalage, $l \in \mathbb{N}$, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. Il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que toute 2^{-l} -chaîne est 2^{-k} -pistée.
2. Il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout mot $z \in \mathcal{A}_l(\Sigma)$, il existe un mot $w \in \Sigma$ tel que pour toute génération $j \in \mathbb{N}$, $w_{[j, j+k]} = z_{[j, j+k]}$, i.e. $w = z$.
3. Σ est un l -STF.

Fait 2.6.20. *Un sous-décalage Σ est chaîne-transitif si et seulement si pour tout $l \in \mathbb{N}$, l'approximation $\mathcal{A}_l(\Sigma)$ est transitive.*

En termes graphiques, la chaîne-transitivité peut se lire sur les cycles présents dans les différentes composantes fortement connexes extrémales.

Fait 2.6.21. *Si Σ est un sous-décalage sofique, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. Σ est chaîne-transitif.
2. Pour tous mots $u, v \in \mathcal{L}(\Sigma)$ tels que $v^* \subset \mathcal{L}(\Sigma)$, il existe un mot w tel que $uvw^* \subset \mathcal{L}(\Sigma)$.
3. Le graphe minimal de Σ admet un cycle commun entre chaque composante fortement connexe minimale et chaque composante fortement connexe maximale.
4. Σ est le système d'étiquettes d'un graphe dont chaque composante fortement connexe minimale admet un cycle commun avec chaque composante fortement connexe maximale.

Un exemple de sous-décalages chaîne-transitifs qui ne sont pas transitifs est donné par les sous-décalage surjectifs asymptotiquement nilpotents; ceux-ci sont transitifs si et seulement s'ils sont réduits à un singleton (cf remarque 2.6.34).

Ensembles limites. On s'intéresse ici aux ensembles limite et asymptotique de sous-décalages Σ , que nous noterons $\Omega_\Sigma = \Omega_\sigma(\Sigma)$ et $\omega_\Sigma = \omega_\sigma(\Sigma)$.

Le système limite est le sous-système surjectif maximal. Dans le cas des sous-décalages bilatères, il s'agit donc du sous-décalage tout entier ; dans le cas des sous-décalages unilatères, il peut être vu comme un sous-décalage bilatère. Pour le système d'étiquettes d'un graphe, il peut être lu en ôtant les sommets non accessibles (jusqu'à ce qu'il n'y en ait plus).

Fait 2.6.22. *L'ensemble limite du système d'étiquettes d'un graphe donné est le sous-graphe composé des sommets accessibles par un chemin infini.*

De plus, la minimalité du graphe est préservée en passant à ce sous-graphe.

En particulier, les sous-décalages sofiqes sont *stables*.

Si l'ensemble limite est un STF, on peut montrer qu'il est atteint en temps fini.

Proposition 2.6.23. *Tout sous-décalage ayant un ensemble limite de type fini est stable.*

Preuve. Soit Σ un sous-décalage tel que Ω_Σ est un STF d'ordre $k \in \mathbb{N}$. Alors $\bigcap_{j \in \mathbb{N}} \sigma^j(\Sigma) \setminus [\mathcal{L}_k(\Omega_\Sigma)] = \emptyset$ est une intersection décroissante vide de compacts, donc il existe une génération $j \in \mathbb{N}$ à laquelle $\sigma^j(\Sigma) \setminus [\mathcal{L}_k(\Omega_\Sigma)] = \emptyset$. Ω_σ est inclus dans $\sigma^j(\Sigma)$, lui-même inclus dans $[\mathcal{L}_k(\Omega_\Sigma)]$, donc dans $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \sigma^k([\mathcal{L}_k(\Omega_\Sigma)])$ puisque c'est un sous-décalage, qui est égal à Ω_Σ puisque c'est un STF d'ordre k . On obtient donc $\sigma^j(\Sigma) = \Omega_\Sigma$. \square

Corollaire 2.6.24. *Un sous-décalage est fini (resp. de type fini) si et seulement si son ensemble limite aussi.*

Preuve. Soit $\Sigma \subset A^{\mathbb{M}}$ un sous-décalage tel que Ω_Σ est un STF d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$. Par la proposition 2.6.23, il existe une génération $j \in \mathbb{N}$ telle que $\sigma^j(\Sigma) = \Omega_\Sigma$. Il est alors immédiat que Σ est un $(k+j)$ -STF et que $|\Sigma| \leq |A^j| |\Omega_\Sigma|$. La réciproque est immédiate par le fait 2.6.22. \square

Autrement dit, les sous-décalages *limite-périodiques* sont exactement les sous-décalages *pré-périodiques*. On ne peut pas en revanche pas généraliser ce raisonnement aux sous-décalages sofiqes.

Exemple 2.6.25. Le sous-décalage $\{0^k 1^l 0^\infty \mid k \leq l\} + 0^* 1^\infty$ n'est pas sofique. Pourtant, son ensemble limite $1^* 0^\infty + 0^* 1^\infty$ l'est.

Ensemble asymptotique. L'ensemble asymptotique, quant à lui, peut être vu dans l'ensemble limite du système d'étiquettes d'un graphe en ôtant également les liaisons entre composantes fortement connexes.

Fait 2.6.26. *L'ensemble asymptotique d'un sous-décalage sofique est l'union disjointe de ses sous-systèmes transitifs maximaux.*

On peut en déduire, dans le cas unilatère, que l'ensemble asymptotique est atteint par chaque orbite.

Corollaire 2.6.27. *Soit Σ un sous-décalage sofique unilatère et $z \in \Sigma$. Alors il existe une génération $j \in \mathbb{N}$ telle que $\sigma^j(z) \in \omega_\Sigma$.*

Nilpotence et périodicité asymptotiques. Si les configurations d'un sous-décalage sofique convergent toutes vers une même configuration, alors cette configuration est uniforme (cf remarque 1.10.15) et le sous-décalage peut être vu comme le système d'étiquettes d'un graphe dont tous les cycles ont la même étiquette.

Fait 2.6.28. *Un sous-décalage sofique Σ est asymptotiquement nilpotent si et seulement s'il contient une unique configuration périodique. Celle-ci est alors uniforme.*

Fait 2.6.29. *Un sous-décalage sofique Σ est asymptotiquement périodique (resp. asymptotiquement nilpotent) si et seulement s'il est le système d'étiquettes d'un graphe dont toutes les composantes fortement connexes sont des cycles (resp. réduits à un seul arc de même étiquette).*

Dans le cas de sous-décalages unilatères soifiques, le corollaire 2.6.27 nous montre que les nilpotence et périodicité asymptotiques sont équivalentes aux nilpotence et prépériodicité faible. Nous pouvons en fait généraliser à tous les sous-décalages unilatères.

Proposition 2.6.30. *Un sous-décalage unilatère est asymptotiquement nilpotent (resp. asymptotiquement périodique) si et seulement s'il est faiblement nilpotent (resp. faiblement prépériodique).*

Preuve.

- Soit $\Sigma \subset A^{\mathbb{N}}$ un sous-décalage asymptotiquement périodique de période $p \in \mathbb{N}^*$. L'ouvert $U = \{x \in \Sigma \mid x_0 = x_p\}$ contient alors ω_{Σ} ; par le fait 1.10.10, chaque orbite y est aspirée : pour toute configuration $x \in \Sigma$, il y a une génération $J \in \mathbb{N}$ telle que pour tout $j \geq J$, $\sigma^j(x)_0 = \sigma^j(x)_p$, i.e. x est (J, p) -prépériodique.
- Dans le cas particulier où $p = 1$, on obtient que Σ est faiblement nilpotent.
- La réciproque est immédiate. □

Corollaire 2.6.31. *Tout sous-décalage unilatère asymptotiquement périodique est quasi-équicontinu.*

Preuve. Soit Σ un sous-décalage unilatère asymptotiquement périodique de période $p \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$. Par la proposition 2.6.30, F est mortel relativement au fermé $\bigcap_{j \in \mathbb{N}} \{x \in \Sigma \mid x_j = x_{j+p}\}$. Par le fait 1.5.3, celui-ci est atteint en un temps fini $J \in \mathbb{N}$ par un ouvert U . Si $x \in U$, alors l'intersection $V = U \cap \bigcap_{0 \leq j < J+p} \sigma^{-j}(\mathcal{B}_{\varepsilon}(\sigma^j(x)))$ est toujours ouverte. Pour tout $y \in V$ et toute génération $j \in \mathbb{N}$, on a $F^j(y) = F^{J+(j-J \bmod p)}(y)$ et $F^j(x) = F^{J+(j-J \bmod p)}(x)$ et, par construction, leur distance est inférieure à ε . On a donc montré que x était ε -stable. □

Remarque 2.6.32. Comme dans le cas faiblement périodique, on peut uniformiser la période d'un sous-décalage sofique *asymptotiquement périodique*. En particulier, si $\mathbb{M} = \mathbb{N}$, alors il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que toute configuration x admette une prépériode $q \in \mathbb{N}$ pour laquelle x est (p, q) -prépériodique.

Dans le cas bilatère, le seul sous-décalage sofique *faiblement nilpotent* est le sous-décalage réduit à un *singleton* uniforme $\{\infty 0^{\infty}\}$ et les seuls sous-décalages soifiques *faiblement prépériodiques* sont les *périodiques*.

En général les sous-décalages asymptotiquement nilpotents ne sont pas des STF.

Fait 2.6.33. *Un sous-décalage asymptotiquement nilpotent est un STF si et seulement s'il est nilpotent.*

Remarque 2.6.34. En particulier, dans le cas bilatère, le seul (à renommage de lettres près) sous-décalage *asymptotiquement nilpotent* qui soit un STF est le *singleton* $\{\infty 0^{\infty}\}$, i.e. le seul sous-décalage faiblement nilpotent.

Nous verrons encore, avec le théorème 2.6.40, une caractérisation des sous-décalages soifiques asymptotiquement périodiques.

Entropie. On peut exprimer l'entropie topologique d'un sous-décalage en fonction de la complexité de son langage.

Proposition 2.6.35. *L'entropie $\Sigma \subset A^{\mathbb{N}}$ vaut :*

$$\mathcal{H}(\Sigma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \mathcal{K}_{\mathcal{L}(\Sigma)}(n)}{n}.$$

Preuve. On utilise les propositions 2.6.12 et 1.11.3 pour voir que l'entropie de Σ peut être prise sur le recouvrement $\mathcal{P} = \{[a] \mid a \in A\}$. De plus, pour $k \in \mathbb{N}$ et $([u_j])_{0 \leq j < k} \in \mathcal{P}^k$, on a $\bigcap_{0 \leq j < n} \sigma^{-j}(u_j) \neq \emptyset$ si et seulement si $(u_j)_{0 \leq j < k} \in \mathcal{L}_k(\Sigma)$, d'où le résultat. □

En particulier, un sous-décalage a une entropie strictement positive si et seulement si son langage a une complexité exponentielle.

La proposition suivante impose une certaine discrétion dans la croissance de l'entropie des sous-décalages sofiques transitifs.

Proposition 2.6.36 ([42]). *Si Σ est un sous-décalage sofique transitif, alors tout sous-décalage propre $\Gamma \subsetneq \Sigma$ a une entropie strictement plus petite que celle de Σ .*

On retrouve notamment qu'un sous-décalage sofique transitif d'entropie nulle est minimal (cyclique).

2.6.3 Universalité

Un sous-décalage sur $A^{\mathbb{M}}$ est dit **universel** s'il peut *simuler* tous les autres sous-décalages. L'exemple-type de sous-décalage universel est le décalage complet.

Exemple 2.6.37. Le décalage complet sur l'alphabet A *simule* n'importe quel sous-décalage hors-contexte, exactement, totalement.

Preuve. Soit B un alphabet et $k = \lceil \log_{|A|} |B| \rceil$ (on rappelle que A a au moins deux lettres). Il y a évidemment une injection $\phi : B \rightarrow A^k$, qui induit une conjugaison lettre à lettre de n'importe quel sous-décalage sur B dans un sous-système de l'itéré $(A^{\mathbb{M}}, \sigma^k)$. \square

Proposition 2.6.38. *Un sous-décalage Σ est universel si et seulement s'il simule hors-contexte totalement complètement le décalage complet $\mathfrak{2}^{\mathbb{M}}$.*

Preuve. Soit $\Sigma \subset A^{\mathbb{N}}$ un sous-décalage universel. En particulier, il existe une période et un pas $m, m' \in \mathbb{N}^*$, un fermé σ^m -invariant $\Gamma \subset \Sigma$ et une factorisation $\Phi : \Gamma \rightarrow \mathfrak{2}^{\mathbb{M}}$ telle que $\sigma^{m'}\Phi = \Phi\sigma^m$. Comme vu dans le fait 2.3.4, il existe un diamètre $d \in \mathbb{N}$, une ancre $n \in \mathbb{M}$ et une règle locale $\phi : \mathcal{L}_{dm}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{L}_{m'}(\Sigma)$ telles que pour toute configuration $x \in \Gamma$ et toute cellule $i \in \mathbb{M}$, $\Phi(x)_{\llbracket im', (i+1)m' \rrbracket} = \phi(x_{\llbracket (i-n)m, (i+d-n)m \rrbracket})$. On peut alors définir une factorisation lettre à lettre de $(\Sigma, \sigma^{m'd})$ dans $(\mathfrak{2}^{\mathbb{M}}, \sigma)$ par la règle locale :

$$\phi' : \mathcal{L}_{md}(\Sigma) \rightarrow \mathfrak{2}$$

$$u \mapsto \begin{cases} \Phi \boxplus_m (u)_0 & \text{si } u \in \mathcal{L}(\Gamma) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La réciproque découle directement de l'universalité du décalage complet. \square

Corollaire 2.6.39. *Un sous-décalage est universel si et seulement s'il simule n'importe quel sous-décalage hors-contexte, totalement.*

Preuve. Cela découle directement de l'exemple 2.6.37 et de la proposition 2.6.38, grâce à la transitivité de la relation de simulation hors-contexte totale. \square

Par la proposition 1.11.4, nous voyons qu'il est vain d'espérer restreindre encore la caractérisation à une simulation directe, puisqu'aucun sous-décalage ne sait simuler directement un système d'entropie supérieure – et il y en a. Cette même proposition 1.11.4 nous dit en outre qu'un *universel* a forcément une *entropie strictement positive*, ou de manière équivalente un langage de *complexité exponentielle*.

Sous-décalages universels sofiques. Le cas de sous-décalages sofiques nous donne encore plus de restrictions pour l'universalité.

Théorème 2.6.40. *Si Σ est un sous-décalage sofique, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. Σ est universel.
2. Σ a une entropie strictement positive.

3. Σ est indénombrable.
4. Σ n'est pas asymptotiquement périodique.
5. Σ admet un sous-système transitif infini.
6. Le graphe minimal de Σ admet une composante fortement connexe qui n'est pas un cycle.
7. Il existe deux mots $u, \tilde{u} \in A^+$ distincts tels que ${}^\infty(u + \tilde{u})^\infty \in \Sigma$.
8. Σ simule hors-contexte exactement totalement le décalage complet $\mathfrak{Z}^{\mathbb{M}}$.

Preuve.

1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 : déjà vu.

3 \Rightarrow 4: Si Σ est asymptotiquement périodique, alors d'après le fait 2.6.29, on peut le voir comme le système d'étiquettes d'un graphe dont toutes les composantes connexes sont des cycles. Chaque configuration de Σ ne change qu'un nombre fini de fois de composante connexe. Le tuple des indices des cellules qui correspondent à un changement de composante connexe et de l'arc correspondant détermine de façon unique la configuration. Σ est donc dénombrable.

4 \Rightarrow 5: Par le fait 2.6.26, si $\sigma|_{\omega_\Sigma}$ n'est pas périodique, alors il y a un sous-système transitif qui n'est pas périodique ; il est donc infini par le point 3 du fait 2.6.2.

5 \Rightarrow 6: Cela découle directement du fait 2.6.16.

6 \Rightarrow 7: Si Σ est le système d'étiquettes d'un graphe (V, E) dont une des composantes fortement connexes n'est pas un cycle, alors il existe trois sommets v_0, v_1 et \tilde{v}_1 dans cette composante et deux lettres distinctes a et b telles que $(v_0, v_1, a), (v_0, \tilde{v}_1, b) \in E$. Par forte connexité, il existe deux chemins $(v_i, w_i, u_i)_{0 \leq i \leq l}$ et $(\tilde{v}_i, \tilde{w}_i, \tilde{u}_i)_{0 \leq i \leq k}$ de longueurs $l, k \in \mathbb{N}^*$ tels que $v_0 = w_l = \tilde{v}_0 = \tilde{w}_k = v_0$.

7 \Rightarrow 8: $({}^\infty(u|\tilde{u}| + \tilde{u}|u|)^\infty, \sigma|_{u\tilde{u}})$ est conjugué lettre à lettre à $(\mathfrak{Z}^{\mathbb{M}}, \sigma)$.

8 \Rightarrow 1: Grâce à l'exemple 2.6.37, Σ est universel. \square

Le dernier point du théorème précédent permet donc d'avoir une simulation exacte du décalage complet ; nous avons vu avec la proposition 2.6.38 qu'on peut avoir une simulation complète, mais on ne peut pas imposer les deux en même temps. D'autre part, la preuve de ce point permet que la période de la simulation soit la longueur commune m de mots $u, \tilde{u} \in A^m$ tels que ${}^\infty(u + \tilde{u})^\infty \in \Sigma$.

On peut remarquer que les caractérisations présentées dans le théorème précédent concernent aussi bien $\mathbb{M} = \mathbb{Z}$ que $\mathbb{M} = \mathbb{N}$; en particulier un sous-décalage sofique bilatère est dénombrable dès que le sous-décalage unilatère correspondant l'est. Dans le cas unilatère, on peut, comme vu dans la proposition 2.6.30, transformer la propriété asymptotique en propriété pour chaque orbite.

Corollaire 2.6.41. *Un sous-décalage sofique unilatère est soit faiblement pré périodique, soit universel.*

Une dernière remarque relative au théorème 2.6.40 consiste à utiliser la caractérisation par indénombrabilité pour voir que tous les sous-décalages sofiques sensibles sont universels.

La construction suivante permet à un universel de simuler directement un cycle de longueur égale à la période de la simulation d'un décalage complet ; elle nous servira comme horloge de simulation dans la section 5.1.

Proposition 2.6.42. *Si Σ est un sous-décalage et $n \in \mathbb{N}$ tels que $(\mathfrak{Z}^{\mathbb{M}}, \sigma)$ est sous-facteur de (Σ, σ^n) , alors \mathcal{C}_n est un sous-facteur de (Σ, σ) .*

Preuve. Il existe deux mots distincts u et v tels que $|u| = |v| = n$ et ${}^\infty(u + v)^\infty \subset \Sigma$. En particulier, $\mathcal{O}_\sigma({}^\infty(uuv)^\infty) \subset \Sigma$. On peut supposer, quitte à effectuer une rotation, que $u_0 \neq v_0$. Supposons $\sigma^i({}^\infty(uuv)^\infty) = {}^\infty(uuv)^\infty$, pour un $i \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$. Alors ${}^\infty(uuv)_{2n-i}^\infty = v_0$ et $u_0 = {}^\infty(uuv)_{n-i}^\infty$ si $i \leq n$, ${}^\infty(uuv)_{3n-i}^\infty$ sinon ; dans les deux cas cela contredit le fait que ${}^\infty(uuv)_{\llbracket 0, n \rrbracket}^\infty = {}^\infty(uuv)_{\llbracket n, 2n \rrbracket}^\infty$. Le mot ${}^\infty(uuv)^\infty$ étant $3n$ -périodique, sa plus petite période ne peut être que $3n$ et par le fait 2.6.2, $\mathcal{O}_\sigma({}^\infty(uuv)^\infty)$ est conjugué à \mathcal{C}_{3n} . La proposition 2.6.1 nous permet de conclure que \mathcal{C}_n est un facteur de $\mathcal{O}_\sigma({}^\infty(uuv)^\infty)$. \square

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les décalages sous trois points de vue : la théorie des langages formels, la théorie des graphes, la topologie. Nous avons ainsi vu que certaines propriétés dynamiques étudiées dans le chapitre 1 admettent des caractérisations très pratiques en termes de mots finis dans le contexte des sous-décalages et en termes de graphes dans le contexte des sous-décalages sofiques.

Ces derniers présentent un cadre restreint qui s'avère très simple d'utilisation ; nous tirerons notamment partie dans le chapitre 5 de la caractérisation correspondante de l'universalité.

Chapitre 3

Systemes symboliques et trace

D'un point de vue strictement topologique, le théorème 1.12.4 nous dit que les espaces symboliques se ramènent tous au Cantor, mais nous avons vu dans le chapitre 2 que chaque espace $A^{\mathbb{M}}$ est en quelque sorte structuré par les systèmes particuliers que sont les sous-décalages. Nous allons maintenant en tirer partie, en définissant des systèmes qui préservent cette structure : les automates cellulaires.

3.1 Automates cellulaires

Le principe de l'automate cellulaire est une évolution synchrone parallèle – invariance par translation – de chaque cellule en fonction d'un nombre fini de voisins – continuité dans la topologie de Cantor.

Définition 3.1.1 (Automate cellulaire).

- Un **automate cellulaire** (AC) est un *endomorphisme* d'un *décalage* $(A^{\mathbb{M}}, \sigma)$.
- Un **automate cellulaire partiel** (ACP) est un *endomorphisme* d'un *sous-décalage* (A, σ) .

Les AC peuvent, par le théorème de Hedlund 2.2.1, être caractérisés comme les fonctions globales $F : A^{\mathbb{M}} \rightarrow A^{\mathbb{M}}$ construites à partir d'un diamètre $d \in \mathbb{N}$, une ancre $m \in \mathbb{N}$ et une règle locale $f : A^d \rightarrow A$, avec pour toute configuration $x \in A^{\mathbb{M}}$ et toute cellule $i \in \mathbb{M}$, $F(x)_i = f(x_{\llbracket i-m, i-m+d \rrbracket})$. Cette remarque vaut également pour les ACP. Par le fait 2.5.11, on pourra souvent se ramener au cas où le domaine Σ est un STF ; on peut même le supposer d'ordre égal au diamètre de F , quitte à en augmenter un des deux.

On peut définir les automates cellulaires en dimension supérieure, voire sur des monoïdes plus complexes, comme endomorphismes de l'action décalage, *i.e.* comme fonctions continues commutant avec tous les décalages. Pour plus de lisibilité néanmoins, on se limitera encore à $\mathbb{M} = \mathbb{Z}$ ou \mathbb{N} .

Un ACP est **unidirectionnel** (resp. **oblique**) à **droite** si son *ancree* est positive (resp. strictement), **unidirectionnel** (resp. **oblique**) à **gauche** si son *anticipation* est positive (resp. strictement). Chaque ACP *unidirectionnel* – on sous-entendra : à droite – induit un SS sur $A^{\mathbb{Z}}$ (**bilatère**) ou sur $A^{\mathbb{N}}$ (**unilatère**). Remarquons que tout ACP est la composition d'un décalage (à une certaine puissance) avec un ACP oblique.

Remarque 3.1.2.

- L'itéré F^j d'un ACP F sur Σ est également un ACP sur Σ .
- L'ensemble image $F(\Sigma)$ est un *sous-décalage*, ainsi que tous les $F^j(\Sigma)$, $j \in \mathbb{N}$.

Exemple 3.1.3 (AC Min). L'AC unilatère Min : $2^{\mathbb{N}} \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$ est défini par un rayon 1 et la règle locale :

$$\begin{aligned} f : \quad 2^2 &\rightarrow 2 \\ (a, b) &\mapsto a \times b . \end{aligned}$$

Il peut également être vu comme un AC **élémentaire**, *i.e.* bilatère sur l'alphabet 2 , d'ancree et d'anticipation au plus 1.

États quiescents.

Définition 3.1.4 (États quiescent et envahissant). Soit $F : A^{\mathbb{M}} \rightarrow A^{\mathbb{M}}$ un AC de diamètre $d \in \mathbb{N}$, d'ancre $m \in \mathbb{N}$ et de règle locale $f : A^d \rightarrow A$.

- Un état $0 \in A$ est **quiescent** si $f(0^d) = 0$. De manière équivalente, la configuration uniforme ${}^{\infty}0{}^{\infty}$ est invariante; elle est alors dite **quiescente**.
- Un état $0 \in A$ est **stagnant** si pour tout $u \in A^d$ tel que $u_m = 0$, on a $f(u) = 0$. De manière équivalente, $F([0]) \subset [0]$. En particulier, il est *quiescent*.
- Un état $0 \in A$ est **envahissant** si $d > 1$ et pour tout $u \in A^d$ tel que $0 \sqsubset u$, on a $f(u) = 0$; autrement dit il se répand à chaque étape dans tout le voisinage. En particulier, il est l'unique état *stagnant*.
- On dira qu'un AC est **0-envahissant** (resp. **0-quiescent**, **0-stagnant**) s'il admet un état 0 *envahissant* (resp. *quiescent*, *stagnant*).
- Plus généralement, on dira qu'un code U est **stagnant** si $F[U] \subset [U]$.
- Un code U est **envahissant à gauche** (resp. **à droite**) $F([U]_1) \subset [U]_0 \cap [U]_1$ (resp. $F([U]_0) \subset [U]_0 \cap [U]_1$).

La définition des codes envahissants ou stagnants peut être adaptée aux cylindres correspondants, ou aux mots (dans le cas d'un singleton). Un mot envahissant doit alors être uniforme; $0^k \in A^k$ est envahissant si $k < d$ et pour tout $u \in A^d$ tel que $0^k \sqsubset u$, on a $f(u) = 0$; autrement dit les 0s se répandent dès qu'ils sont au moins k – par exemple si l'état 0 est envahissant.

Si $F : A^{\mathbb{M}} \rightarrow A^{\mathbb{M}}$ est un AC de diamètre $d \in \mathbb{N}$ et de règle locale $f : A^{2r+1} \rightarrow A$ et $1 \leq k < d$, on définit l'AC $F_{\wedge 0^k}$ de même diamètre d et ancre m et de règle locale :

$$f_{\wedge 0^k} : A^d \rightarrow A$$

$$u \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } 0^k \sqsubset u \\ f(u_{\llbracket -m, d-m \rrbracket}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut éventuellement adapter la construction au cas où $k \geq d$, en augmentant le diamètre. Pour ce nouvel AC $F_{\wedge 0^k}$, 0^k est *envahissant*.

Par exemple, pour l'AC Min (*cf* exemple 3.1.3), l'état 0 (et tout mot 0^k) est envahissant et l'état 1 est quiescent. On peut même voir que pour tout AC élémentaire unidirectionnel F tel que 1 est quiescent, on a $F_{\wedge 0} = \text{Min}$.

Fait 3.1.5. Soit $(A^{\mathbb{M}}, F)$ un AC. On peut voir que, si $k \in \mathbb{N}^*$, les configurations k -périodiques forment un sous-système fini, donc (p, q) -pré-périodique, avec $p + q \leq |A|^k$.

En particulier, pour les configurations uniformes, on a $\forall a \in A, \exists j < |A|, F^{|A|}({}^{\infty}a{}^{\infty}) = F^{|A|-j-1}({}^{\infty}a{}^{\infty})$, ce qui nous donne la remarque suivante : pour tout AC F , un itéré F^j admet un état 0 quiescent, avec $1 \leq j \leq |A|$. L'ensemble des configurations 0-finies est alors F^j -invariant.

3.2 Simulation cellulaire

Reprenons les notions de morphismes et de simulations définies dans la section 1.2, en se servant de la structure de l'espace symbolique pour obtenir une idée intuitive de «codage simple» entre les deux systèmes concernés. La simplicité se voit ici dans le caractère local du morphisme : les fractions finies des configurations peuvent ainsi être traduites en parallèle, et indépendamment des cellules situées loin d'elles. En d'autres termes, par le théorème de Hedlund 2.2.1, le morphisme est également un morphisme du décalage.

Morphismes cellulaires.

Définition 3.2.1 (Morphisme cellulaire).

- Un **morphisme cellulaire** d'un SS (Σ, F) dans un autre (Λ, G) est un *morphisme* de (Σ, F) dans (Λ, G) qui est aussi est *morphisme* de (Σ, σ^m) dans $(\Lambda, \sigma^{m'})$, où $m, m' \in \mathbb{N}^*$.
- S'il est *surjectif*, c'est une **factorisation cellulaire** et (Λ, G) est appelé **facteur cellulaire** de (Σ, F) .
- S'il est *bijectif*, c'est une **conjugaison cellulaire**; (Σ, F) et (Λ, G) sont alors dits **conjugés cellulaires**.
- Une **sous-conjugaison** (resp. **sous-factorisation**) **cellulaire** de (Σ, F) dans (Λ, G) est une *conjugaison* (resp. *factorisation*) *cellulaire* d'un sous-système (Σ', F) dans (Λ, G) , où (Σ', σ) est un *sous-système* de (Σ, σ) . Ce dernier est alors un **sous-conjugué** (resp. **sous-facteur**) de (Σ, F) .
- Une *sous-conjugaison* (resp. *sous-factorisation*) *cellulaire* est dite par **blocs** (resp. de **type fini, sofique**) si Σ' est un *décalage complet* sur un sous-alphabet (resp. un *STF*, un *sous-décalage sofique*).

Le grand avantage de ces morphismes cellulaires est de préserver un tant soit peu la structure de l'espace des configurations, ce qui permettra une meilleure notion de préservation de la dynamique d'un AC. En particulier, on peut remarquer que l'image d'une configuration périodique par un tel morphisme reste périodique.

Simulations cellulaires.

Définition 3.2.2 (Simulation cellulaire).

- Une **simulation cellulaire** de **période** $n \in \mathbb{N}^*$ par **pas** de $n' \in \mathbb{N}^*$ (ou (n, n') -**simulation cellulaire**) par un SS (Σ, F) d'un autre (Λ, G) est une (n, n') -*simulation* par (Σ, F) de (Λ, G) , qui est à la fois une *simulation* par (Σ, σ) de (Λ, σ) .
- Elle est **carrée** si la période m et le pas m' de la simulation du décalage sont égaux à la période n et au pas n' de la simulation du SS.
- Une **simulation directionnelle** de pente $\alpha \in \mathbb{Q}$ par un SS (Σ, F) d'un autre (Λ, G) est une *simulation cellulaire* par $(\Sigma, \sigma^p F^q)$ de (Λ, G) , où $\alpha = \frac{p}{q}$.

On pourra qualifier une simulation de **par blocs** ou **hors-contexte** en sous-entendant qu'il s'agit d'une simulation cellulaire. On remarque que la notion de simulation cellulaire «colle» à celle d'ACP : en commutant avec les décalages, on obtient que tout SS simulé par un ACP est un ACP, et que tout SS simulé par blocs hors-contexte d'un AC est un AC.

On peut remarquer que ce qui importe dans la définition de la simulation directionnelle est la **pente** $\frac{p}{q}$: on peut s'arranger pour que la fraction soit irréductible, puisqu'une simulation par $(A^{\mathbb{Z}}, \sigma^{kp} F^{kq})$ de $(B^{\mathbb{Z}}, G)$ est bien toujours une simulation par $(A^{\mathbb{Z}}, \sigma^p F^q)$ de $(B^{\mathbb{Z}}, G)$, quel que soit $k \in \mathbb{N}$. Une variante, correspondant à l'approche de [79], autoriserait les simulations directionnelles à avoir des pentes irrationnelles. Une autre variante de simulation cellulaire consisterait à autoriser le pas et la période horizontaux $n, n' \in \mathbb{Z}^*$ à être de signes opposés. En d'autres termes, on assimilerait le comportement d'un SS et son symétrique, ce qui peut s'avérer intéressant dans certains cas.

Remarque 3.2.3. La définition de simulation directionnelle, qui vient du fait qu'on s'intéresse à l'action de la règle locale avant tout, peut être vue comme la simulation de l'AC en tant qu'action continue du monoïde commutatif $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ définie pour $(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ par $(F, \sigma)^{(i, j)} : x \mapsto \sigma^i F^j(x)$. Cette notion se rapproche alors de la simulation : il existe deux couples $p, q \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ et une sous-factorisation Φ de $(X, (F, \sigma)^p)$ dans $(Y, (G, \sigma)^q)$, *i.e.* pour tout $k \in \mathbb{N}^2$, $\Phi(F, \sigma)^{pk} = (G, \sigma)^{qk} \Phi$ (où les produits pk et qk sont compris composante par composante).

Similairement à la remarque 1.2.5, on peut montrer que les simulations directionnelle, cellulaire, par blocs, hors-contexte représentent des relations transitives et réflexives ; elles induisent donc des préordres sur les SS. Le préordre des simulations par blocs hors-contexte carrées (sans décalage) sur les AC a été

particulièrement étudié dans [29, 57]. Puis il a été généralisé dans [30] aux simulations directionnelles par blocs hors-contexte exactes. Dans [31], on trouve des comparaisons intéressantes entre la structure de plusieurs préordres :

- cette même simulation directionnelle par blocs hors-contexte exacte,
- la simulation directionnelle par blocs hors-contexte complète,
- la simulation directionnelle par blocs hors-contexte.

Sortir du cadre des simulations par blocs hors-contexte introduit nombre de problèmes et ne permet pas d'utiliser au mieux toutes les possibilités des AC : des propriétés simples visibles sur les cellules des configurations pourraient ne pas se transmettre ; en particulier, le simulé peut ne plus être un AC. On peut également ne plus avoir de préordre.

Universalité intrinsèque. Les AC **intrinsèquement universels** pour une loi de simulation sont ceux qui simulent tous les AC. Après être apparue dans [25], cette définition a subi une évolution progressive. Dans [30], on les définit pour la simulation directionnelle par blocs hors-contexte exacte et il est prouvé que la simulation peut de plus être requise *totale* sans que cela n'affecte cette définition d'universalité – de façon similaire au corollaire 2.6.39 sur les sous-décalages.

Théorème 3.2.4. *Il existe des AC intrinsèquement universels pour la simulation directionnelle par blocs hors-contexte exacte.*

Il y a donc également une classe maximale pour les préordres de simulation directionnelle par blocs hors-contexte ou de simulation directionnelle, qui sont plus grossiers. En revanche, il n'y en a pas pour la simulation par blocs hors-contexte carrée (*cf* [57]) et l'on ne sait pas s'il en existe pour la simulation complète. On ne sait pas non plus, à notre connaissance, si l'on obtient plus d'AC intrinsèquement universels en enlevant certaines conditions, comme la propriété de hors-contexte.

La définition d'universalité intrinsèque dépend non seulement du type de simulation, mais également de la famille de systèmes considérés, contrairement à la Turing-universalité. Ainsi, la sous-section 2.6.3 présente une universalité intrinsèque des sous-décalages. [80] présente une universalité intrinsèque pour les AC réversibles, tandis que [81] construit des AC intrinsèquement universels relativement à diverses familles d'AC.

Pour un récapitulatif intéressant sur les simulations et l'universalité dans les AC, on se référera à [82].

3.3 Opérations sur les systèmes symboliques

Groupages cellulaires. On généralise ici les notions de mémorisation et de groupage, en les appliquant non seulement au SS proprement dit comme dans [83], mais aussi au décalage. En effet, la définition 2.3.2 de la m -mémorisation \boxminus_m et du m -groupage \boxplus_m du décalage induisent deux conjuguaisons cellulaires.

Définition 3.3.1 (Groupé et mémorisé). Soit F un SS sur un sous-décalage $\Sigma \subset A^{\mathbb{M}}$.

- Le m -**mémorisé horizontal** de (Σ, F) est le SS $(\boxminus_m(\Sigma), F_{\boxminus_m} = \boxminus_m F \boxminus_m^{-1})$ et son m -**groupé horizontal** est $(\boxplus_m(\Sigma), F_{\boxplus_m} = \boxplus_m F \boxplus_m^{-1})$.
- La n -**mémorisation verticale** de F est le morphisme injectif défini par :

$$\begin{aligned} \boxminus_n^F : \Sigma &\rightarrow (A^n)^{\mathbb{M}} \\ x &\mapsto (F^j(x)_i)_{\substack{0 \leq j < n \\ i \in \mathbb{M}}} \end{aligned}$$

- Le n -**mémorisé vertical** de F est son système image $(\boxminus_n^F(\Sigma), F_{\boxminus_n})$.
- Le n -**groupé vertical** est l'itéré $(\boxplus_n^F(\Sigma), F_{\boxplus_n})$ de ce dernier.
- Le (m, n) -**mémorisé** d'un SS (Σ, F) est le *mémorisé horizontal et vertical* :

$$(\boxminus_n^F \boxminus_m(\Sigma), F_{\boxminus_m, n} = F_{\boxminus_m \boxminus_n}) .$$

– Son (m, n) -groupé est le *groupé horizontal et vertical* :

$$(\boxplus_n^F \boxminus_m(\Sigma), F_{\boxplus_m, n} = F_{\boxplus_m \boxminus_n}^n).$$

Les mémorisé et groupé verticaux correspondent, à inversion d'indices et suppression des cellules redondantes près, aux mémorisé et groupé généraux ; ils sont conjugués cellulaires respectivement au SS de départ et à son itéré. Grâce à ces conjugaisons, on a une caractérisation des simulations cellulaires, sur laquelle se basent [57, 29, 30] : une simulation cellulaire de période $n \in \mathbb{N}^*$, par pas de $n' \in \mathbb{N}^*$, de période horizontale $m \in \mathbb{N}^*$, par pas horizontaux de $m' \in \mathbb{N}^*$ par un SS F d'un autre G est une sous-factorisation entre les groupés $F_{\boxplus_m, n}$ et $G_{\boxplus_{m'}, n'}$, qui est simultanément un morphisme du décalage.

Notons que si F commute avec le décalage, alors ses mémorisés et ses groupés verticaux également. En d'autres termes, les mémorisés et groupés d'ACP sont des ACP. Nous nous intéressons notamment en section 3.7 aux SS dont le groupé est un ACP.

Remarque 3.3.2. Si F est un AC de rayon r , alors son r -groupé horizontal a rayon 1. En particulier, tout AC est conjugué cellulaire d'un AC de rayon 1 ; on pourra donc facilement se ramener au cas simple des AC de rayon 1 dans la suite.

Amalgamation

Définition 3.3.3 (Amalgamé). Soient F_1 et F_2 deux AC sur les alphabets A_1 et A_2 . Un AC F sur l'alphabet $A_1 \cup A_2$ est un **amalgamé** de F_1 et F_2 si $F|_{A_1} = F_1$ et $F|_{A_2} = F_2$.

Bien sûr, un amalgamé de deux AC les simule exactement totalement directement tous les deux. Cette simulation sera utilisée dans le chapitre 6.

Un cas particulier intéressant consiste à considérer que l'un des deux sous-automates a priorité sur l'autre. Soient $\phi : A_2 \rightarrow A_1$ une projection, qu'on peut étendre (par l'identité) en $\phi : A_1 \cup A_2 \rightarrow A_1$ et F_1 et F_2 deux AC d'ancre $m \in \mathbb{M}$, de diamètre $d \in \mathbb{N}$ et de règles locales $f_1 : A_1^d \rightarrow A_1$ et $f_2 : A_2^d \rightarrow A_2$. On appelle ϕ -**amalgamé** de F_1 et F_2 l'AC $F_1 +_\phi F_2$ défini par la règle locale :

$$f : (A_1 \cup A_2)^d \rightarrow A_1 \cup A_2$$

$$u \mapsto \begin{cases} f_1(u) & \text{si } u \in A_1^d \\ f_2(u) & \text{si } u \in A_2^d \\ f_1((\phi(u_i))_{-m \leq i < d-m}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Bien sûr, la dynamique obtenue avec un tel AC n'est un tant soit peu compréhensible que dans le cas où A_1 et A_2 sont disjoints, étudié dans [84]. Dans ce cas, et si $d > 1$, la définition de la règle nous donne que A_1 est *envahissant*.

3.4 Tracés

Un tracé, parfois appelée « itinéraire », correspond à une observation de l'évolution d'un SS qui ne distingue pas chaque point de l'orbite précisément, mais avec une certaine imprécision. Si l'on voit cela sur les configurations, la notion se simplifie en facteur colonne : l'observateur ne voit qu'une fenêtre finie centrale de la configuration, mais ignore à chaque instant les informations qui sont trop à droite ou à gauche dans la configuration.

Facteurs sous-décalages.

Définition 3.4.1 (Trace). Soit (X, F) un SS et \mathcal{P} une partition en ouverts de X . Pour tout point $x \in X$, il existe un unique ouvert $\mathcal{P}(x) \in \mathcal{P}$ qui contient x .

– La **trace** de F relative à la partition \mathcal{P} est l'application :

$$\begin{aligned} T_F^{\mathcal{P}} : X &\rightarrow \mathcal{P}^{\mathbb{N}} \\ x &\mapsto (\mathcal{P}(F^j(x)))_{j \in \mathbb{N}} . \end{aligned}$$

– Le **tracé** de F relatif à \mathcal{P} est son image $\tau_F^{\mathcal{P}} = T_F^{\mathcal{P}}(X)$.

– Si F est bijectif, on définit de même la **bitrace** :

$$\begin{aligned} T_F^{*\mathcal{P}} : X &\rightarrow \mathcal{P}^{\mathbb{Z}} \\ x &\mapsto (\mathcal{P}(F^j(x)))_{j \in \mathbb{Z}} . \end{aligned}$$

– Si F est surjectif, on définit le **bitracé** $\tau_F^{*\mathcal{P}} = \{(\mathcal{P}(F^j(x^j)))_{j \in \mathbb{Z}} \mid (x^j)_{j \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{O}_F^*\}$.

Si l'on voit $\mathcal{P}^{\mathbb{N}}$ comme un espace symbolique sur l'alphabet \mathcal{P} , alors la trace $T_F^{\mathcal{P}}$ est continue puisque l'image inverse $(T_F^{\mathcal{P}})^{-1}([u])$ de tout cylindre central $[u]$ de $\mathcal{P}^{\mathbb{N}}$ est une intersection $\bigcap_{0 \leq j < |u|} F^{-j}(u_j)$ d'ouverts. D'autre part, on remarque facilement que, pour tout $x \in X$:

$$T_F^{\mathcal{P}} F(x) = (\mathcal{P}(F^{j+1}(x)))_{j \in \mathbb{N}} = \sigma T_F^{\mathcal{P}}(x) .$$

Donc le tracé $\tau_F^{\mathcal{P}}$ (ou $(\tau_F^{\mathcal{P}}(X), \sigma)$) est un *sous-décalage unilatère facteur* (SUF) de (X, F) .

Réciproquement, une factorisation Φ de (X, F) dans un sous-décalage unilatère $(\Sigma \subset A^{\mathbb{N}}, \sigma)$ est, à renommage des lettres près, la trace de F relative à la partition $\mathcal{P} = \{\Phi^{-1}([a]) \mid a \in A\}$. Les SUF d'un SS sont donc (essentiellement) les tracés.

Dans le cas surjectif, on peut voir que le bitracé est le sous-décalage bilatère correspondant au tracé (ils ont même langage). En général, le bitracé n'est pas un facteur de F . Dans le cas bijectif, la bitrace est une factorisation et le bitracé en est l'image. Réciproquement, tout sous-décalage bilatère facteur d'un SS bijectif est, à renommage des lettres près, un bitracé.

Remarque 3.4.2. Si \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont deux partitions en ouverts d'un espace X telles que \mathcal{P} est plus fine que \mathcal{P}' , alors on a une *décomposition* $T_F^{\mathcal{P}'} = \Phi T_F^{\mathcal{P}}$, où $\Phi : \tau_F^{\mathcal{P}} \rightarrow \tau_F^{\mathcal{P}'}$ est la *factorisation lettre à lettre* de règle locale :

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{P} &\rightarrow \mathcal{P}' \\ U &\mapsto V \text{ où } U \subset V . \end{aligned}$$

Remarque 3.4.3. Soient $\Sigma \subset A^{\mathbb{M}}$ un sous-décalage et \mathcal{P} une partition en ouverts de Σ qui distingue les lettres, *i.e.* au moins aussi fine que la partition $\{[a] \mid a \in A\}$ en cylindres de largeur 1. La remarque 3.4.2 nous donne donc une factorisation lettre à lettre $\Phi : T_{\sigma}^{\mathcal{P}}(\Sigma) \rightarrow \Sigma$ dont la règle locale donne la lettre centrale d'une configuration étant donnée son tracé, *i.e.* $\Phi = (T_{\sigma}^{\mathcal{P}})^{-1}$ est une conjugaison du tracé $T_{\sigma}^{\mathcal{P}}(\Sigma)$ dans Σ (resp. de $T_{\sigma}^{*\mathcal{P}}(\Sigma)$ dans Σ si celui-ci est bilatère).

En particulier, si l'on prend la partition $\mathcal{P} = \{[u] \mid u \in A^m\}$ en cylindres de longueur m , on retrouve que la mémorisation $\Xi_m = T_{\sigma}^{\mathcal{P}}$ (resp. $T_{\sigma}^{*\mathcal{P}}$) de Σ est une conjugaison lettre à lettre.

Bases.

Définition 3.4.4 (Base de SUF).

- Une **base** (de SUF) d'un SS (X, F) est une famille dénombrable de sous-décalages $(\Sigma_i)_{i \in \mathbb{N}}$ pour laquelle il existe une famille de factorisations $(\Phi_i : X \rightarrow \Sigma_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que toute factorisation de (X, F) dans un sous-décalage unilatère est *décomposable* par Φ_i , pour un $i \in \mathbb{N}$.
- C'est une base **lettre à lettre** si toute factorisation Ψ de (X, F) dans un sous-décalage unilatère peut s'écrire $\Psi = \Psi' \Phi_i$, où $i \in \mathbb{N}$ et Ψ' est une *factorisation lettre à lettre*.

En particulier, tout SUF est facteur d'un sous-décalage de la base, mais la condition requise est un peu plus forte, puisque le morphisme lui-même peut être décomposé.

Cette notion dynamique de base est liée à la notion topologique de base (cf définition 1.12.6), puisque les tracés relatifs à une base de partitions forment une base.

Proposition 3.4.5. *Si $(\mathcal{P}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une base de partitions en ouverts d'un espace X , alors $(\tau_F^{\mathcal{P}_i})_{i \in \mathbb{N}}$ est une base lettre à lettre.*

Preuve. Considérons la partition \mathcal{P} de X telle que $\Psi = T_F^{\mathcal{P}}$, et $i \in \mathbb{N}$ l'indice d'une partition \mathcal{P}_i plus fine que \mathcal{P} . Par la remarque 3.4.2, il y a une factorisation lettre à lettre $\Phi : \tau_F^{\mathcal{P}_i} \rightarrow \tau_F^{\mathcal{P}}$ telle que $T_F^{\mathcal{P}_i} = \Phi T_F^{\mathcal{P}}$. \square

On peut également relier la notion de base définie ci-dessus avec celle de l'extension limite.

Proposition 3.4.6. *Si (X, F) est l'extension limite d'une suite $(\Sigma_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de sous-décalages, alors celle-ci en est une base de SUF.*

Preuve. Par définition de la topologie produit, X admet comme base de partitions la famille $(\mathcal{P}_i)_{i \in \mathbb{N}}$, où \mathcal{P}_i est définie comme l'image inverse par la projection $\pi_{[0, i]}$ de la partition en cylindres de largeur $i + 1$ du sous-décalage $\Sigma_0 \otimes \dots \otimes \Sigma_i$:

$$\mathcal{P}_i = \left\{ \pi_{[0, i]}^{-1}([u]) \mid u \in \mathcal{L}_{i+1}(\Sigma_0 \otimes \dots \otimes \Sigma_i) \right\}.$$

Puisque cette projection $\pi_{[0, i]}$ ne dépend pas des autres systèmes de base, on peut voir que le tracé $\tau_F^{\mathcal{P}_i}$ est conjugué au tracé $T_\sigma^{(i)}(\Sigma_0 \otimes \dots \otimes \Sigma_i)$, lui-même conjugué à $\Sigma_0 \otimes \dots \otimes \Sigma_i$ par la remarque 3.4.3, et donc à Σ_i par le fait 1.3.3. La proposition 3.4.5 permet de conclure que la famille $(\Sigma_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de sous-décalages, conjugués à la famille de tracés relatifs aux partitions de la base $(\mathcal{P}_i)_{i \in \mathbb{N}}$, est bien une base de SUF de (X, F) . \square

On a une réciproque de la proposition précédente dès lors que l'on ordonne les tracés suivant la finesse des partitions.

Proposition 3.4.7. *Si (X, F) est un SS et $(\mathcal{P}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de partitions de plus en plus fines de X , alors (X, F) est essentiellement l'extension limite (Y, G) de la famille de tracés $(\tau_F^{\mathcal{P}_i})_{i \in \mathbb{N}}$ (relativement aux projections canoniques).*

Preuve. Le morphisme :

$$\begin{aligned} \Phi : X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto (T_F^{\mathcal{P}_i}(x))_{i \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

est bijectif puisque $\Phi^{-1}((y_i)_{i \in \mathbb{N}}) = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} (T_F^{\mathcal{P}_i})^{-1}(y_i)$ est une intersection de fermés, qui est décroissante si et seulement si $y \in Y$, et dont le diamètre tend vers 0 (cf proposition 1.12.7). \square

Corollaire 3.4.8. *Toute base de SUF $(\Sigma_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'un SS (X, F) , admet une sous-suite $(\Sigma_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$, où $(k_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite d'indices entiers, dont (X, F) est l'extension limite.*

Preuve. Soient, pour $i \in \mathbb{N}$, $\Phi_i : X \rightarrow \Sigma_i$ la factorisation impliquée et \mathcal{P}_i la partition en boules de rayon 2^{-i} . Construisons par récurrence sur $i \in \mathbb{N}$ une suite d'indices $(k_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et une suite de factorisations de $\Sigma_{k_{i+1}}$ dans Σ_{k_i} . Initialement, on peut prendre $k_0 = 0$. Supposons maintenant $i \in \mathbb{N}$ et k_i construite. Par la proposition 3.4.5, il y a une décomposition $\Phi_{k_i} = \Psi_i T_F^{\mathcal{P}^{r_i}}$, où $r_i \in \mathbb{N}$ et Ψ_i est une factorisation lettre à lettre de $\tau_F^{\mathcal{P}^{r_i}}$ dans Σ_{k_i} . Quitte à prendre le maximum avec i et à composer avec une projection, on peut supposer sans perte de généralité que $r_i \geq i$. Par hypothèse, il existe un indice $k_{i+1} \in \mathbb{N}$ et une factorisation Ψ'_i de $\Sigma_{k_{i+1}}$ dans le tracé $\tau_F^{\mathcal{P}^{r_i}}$, de règle locale ψ'_i , telle que $T_F^{\mathcal{P}^{r_i}} = \Psi'_i \Phi_{k_{i+1}}$. On a donc $\Phi_{k_i} = \Psi_i \Psi'_i \Phi_{k_{i+1}}$.

On remarque que le produit $\prod_{i \in \mathbb{N}} \Psi_i$ est une conjugaison de l'extension limite de la suite $(\tau_F^{\mathcal{P}^{r_i}})_{i \in \mathbb{N}}$ dans l'extension limite de la suite $(\Sigma_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$, de conjugaison inverse $\sigma \prod_{i \in \mathbb{N}} \Psi'_i$. Par la proposition 3.4.7, (X, F) est conjugué à la première, donc à la deuxième. \square

Remarque 3.4.9. Comme pour les bases de partitions, on peut requérir additionnellement que les sous-décalages soient distincts, en traitant à part le cas d'une base finie $(\Sigma_i)_{0 \leq i < l}$, où le système est essentiellement un sous-décalage. En effet, dans ce cas, le corollaire 3.4.8 nous donne une conjugaison entre le système et l'extension limite d'une suite ultimement stationnaire de sous-décalages, qui est conjuguée au dernier sous-décalage.

Facteurs colonnes. Si $(A \subset A^{\mathbb{M}}, F)$ est un SS, un bon candidat de base de partitions pour utiliser la proposition 3.4.5 est la base canonique formée des cylindres.

Définition 3.4.10 (Facteur colonne).

- Le **facteur colonne** de largeur $k \in \mathbb{N}$ en la cellule $i \in \mathbb{M}$ est le *tracé* $\tau_F^{\llbracket i, i+k \rrbracket} = T_F^{\llbracket i, i+k \rrbracket}(A)$, où :

$$\begin{aligned} T_F^{\llbracket i, i+k \rrbracket} : A &\rightarrow (A^k)^{\mathbb{N}} \\ x &\mapsto (F^j(x))_{\llbracket i, i+k \rrbracket}_{j \in \mathbb{N}} . \end{aligned}$$

- Le **facteur colonne central** (FCC) de rayon $k \in \mathbb{N}$ est le *tracé* $\tau_F^{\langle k \rangle} = T_F^{\langle k \rangle}(A^{\mathbb{M}})$.

Un FCC correspond à une observation de l'évolution du système à travers une fenêtre finie, *i.e.* ne sont visibles que les cellules centrales. Les cylindres centraux étant une base de partitions, on retrouve un résultat présenté dans [43] : la famille des FCC est une base de SUF ; c'est même une base lettre à lettre. Le SS en est donc essentiellement l'extension limite. On peut alors restreindre l'étude des SUF à celle des facteurs colonnes. Remarquons que si $0 \leq j \leq k$, la projection $\pi_{\langle j \rangle}$ est une factorisation du FCC $\tau_F^{\langle k \rangle}$ dans le FCC $\tau_F^{\langle j \rangle}$.

3.5 Tracés d'automates cellulaires

Dans le cas d'un ACP (A, F) , qui est une fonction lipschitzienne, toute trace $T_F^{\mathcal{P}}$ est également une application lipschitzienne. De plus, les facteurs colonnes peuvent tous se ramener aux FCC, puisque le parallélisme nous donne, pour toute cellule $i \in \mathbb{M}$ et toute largeur $k \in \mathbb{N}$, $\tau_F^{\llbracket i, i+k \rrbracket} = \tau_F^{\llbracket 0, k \rrbracket}$ dès que le sous-décalage (A, σ) est surjectif (par exemple bilatère). Dans la suite, en l'absence de précision supplémentaire, le **tracé** représentera $\tau_F = \tau_F^{\langle 0 \rangle}$, *i.e.* la suite des états pris par la cellule centrale de la configuration, que l'on peut voir comme l'ensemble des colonnes centrales infinies qui apparaissent dans les diagrammes espace-temps de F . On notera également $T_F^k = T_F^{\llbracket 0, k \rrbracket}$ et $\tau_F^k = \tau_F^{\llbracket 0, k \rrbracket}$. Un FCC $\tau_F^{\langle k \rangle}$ est donc égal, si $\mathbb{M} = \mathbb{N}$ à τ_F^{k+1} et si $\mathbb{M} = \mathbb{Z}$ à τ_F^{2k+1} – à une petite différence près dans l'indexage des cellules.

Nous avons vu avec le fait 3.1.5 que les configurations uniformes d'un AC forment un sous-système fini. Les FCC de ce sous-système sont des sous-décalages déterministes, puisqu'à chaque étape, ils ne dépendent que de la dernière lettre (identique sur toute la configuration).

Proposition 3.5.1. *Tout facteur colonne τ_F^k de largeur $k \in \mathbb{N}^*$ d'un AC $F : A^{\mathbb{M}} \rightarrow A^{\mathbb{M}}$ contient un sous-décalage déterministe \mathcal{O}_ξ , où $\xi : A^k \rightarrow A^k$.*

Preuve. Le tracé τ_F^k de largeur k contient en particulier la contribution du sous-système de F composé des configurations k -périodiques : $T_F^k(\{\infty u^\infty \mid u \in A^k\}) = \{(\xi^j(u))_{j \in \mathbb{N}} \mid u \in A^k\}$, où l'on définit :

$$\begin{aligned} \xi : A^k &\rightarrow A^k \\ u &\mapsto F(\infty u^\infty)_{\llbracket 0, k \rrbracket} . \quad \square \end{aligned}$$

À l'inverse, un sous-décalage unilatère comme $\{\infty(001)^\infty, \infty(010)^\infty, \infty(100)^\infty\}$ ne contient pas de sous-décalage déterministe, et n'est donc pas le tracé d'un AC.

Facteur canonique. Le facteur canonique correspond au tracé de largeur égale au rayon de l'AC, *i.e.* la largeur minimale qui ne peut pas être «sautée» par l'information, puisque les cellules d'un des deux côtés d'une zone de cette largeur ne peuvent pas «voir» dans leur voisinage celles de l'autre côté. Le facteur canonique a été tout d'abord défini pour les AC unilatères dans [45]. Dans ce contexte, sa largeur est juste inférieure au diamètre; il permet de séparer complètement l'évolution, puisque l'information arrive dans le tracé uniquement depuis la droite, et les cellules de gauche n'influent pas dessus. De cette remarque découleront des liens avec l'entropie ou l'expansivité.

Définition 3.5.2 (Facteurs canonique et diamétral).

- Soit F un ACP d'ancre $m \in \mathbb{M}$ et de diamètre $d \in \mathbb{N}^*$ sur un d -STF Λ . On définit le **diamètre centré** (resp. l'**ancre centrée**, l'**anticipation centrée**) de F comme l'entier $\tilde{d} = \max(d, d - m, m + 1)$ (resp. $\tilde{m} = \min(m, 0)$, $\tilde{m}' = \tilde{d} - \tilde{m} - 1$).
- Le **facteur diamétral** de F est le tracé $\tau_F^{\tilde{d}}$ de largeur \tilde{d} .
- Le **facteur canonique** de F est le tracé τ_F^r de largeur r .
- Le **facteur canonique gauche** (resp. **droit**) de F est le tracé $\tau_F^{\tilde{m}}$ (resp. $\tau_F^{\tilde{m}'}$).

Le diamètre et l'ancre centrés correspondent au diamètre et à l'ancre de l'AC quand il est vu comme AC non oblique; on se ramène facilement à ce cas en adaptant la règle locale. Son *rayon* est alors $r = \max(\tilde{m}, \tilde{d} - 1 - \tilde{m})$. Notons que cette définition concerne en fait tout ACP sur un STF, quitte à augmenter le diamètre ou l'ordre (sans modifier la règle).

Enjambement. Pour deux configurations $x, y \in A^{\mathbb{M}}$ et une cellule $i \in \mathbb{M}$, on définit l'**enjambement** $x \oplus_i y$ comme la configuration z telle que $z_k = x_k$ si $k < i$, y_k si $k \geq i$. x et y sont dites k -**enjambantes** en la cellule $i \in \mathbb{M}$, où $k \in \mathbb{N}$, si $x_{\llbracket i, i+k \rrbracket} = y_{\llbracket i, i+k \rrbracket}$. On remarque alors que c'est également le cas de x et $x \oplus_i y$, ou encore de $x \oplus_i y$ et y .

En imposant un tracé de largeur juste inférieure à celle du facteur diamétral, l'évolution d'une configuration peut se décomposer en une partie gauche et une partie droite, *i.e.* toute modification d'un côté ne peut affecter l'autre sans affecter le tracé en question.

Proposition 3.5.3. *Si (Λ, F) est un ACP de diamètre centré $\tilde{d} \in \mathbb{N}^*$ sur un $(\tilde{d} - 1)$ -STF, $J \in \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$, $i \in \mathbb{M}$ et $x, y \in \Lambda$ des configurations telles que $T_F^{\llbracket i, i+\tilde{d}-1 \rrbracket}(x)_{\llbracket 0, J \rrbracket} = T_F^{\llbracket i, i+\tilde{d}-1 \rrbracket}(y)_{\llbracket 0, J \rrbracket}$. Alors pour toute génération $j \in \llbracket 0, J \rrbracket$, $F^j(x \oplus_i y) = F^j(x) \oplus_i F^j(y)$.*

Preuve. Soit \tilde{m} l'ancre centrée de F . On voit par récurrence sur $j < J$ que le voisinage $F^j(x \oplus_i y)_{\llbracket k-\tilde{m}, k-\tilde{m}+\tilde{d} \rrbracket}$ de chaque cellule $k \in \mathbb{M}$ correspond au voisinage $F^j(x)_{\llbracket k-\tilde{m}, k-\tilde{m}+\tilde{d} \rrbracket}$ si $k < \tilde{m}$, $F^j(y)_{\llbracket k-\tilde{m}, k-\tilde{m}+\tilde{d} \rrbracket}$ sinon, donc l'application de la règle est inchangée. \square

La proposition précédente peut s'adapter directement à la bitrace T^* dans le cas d'ACP bijectifs. On peut également en obtenir une variante en distinguant la droite et la gauche.

Fait 3.5.4.

- Soient (Λ, F) un ACP d'ancre centrée $\tilde{m} \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $J \in \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$, $u \in \mathcal{L}_J(\tau_F^{\tilde{m}})$ et x, y deux configurations telles que $x_{\llbracket 0, \infty \rrbracket} = y_{\llbracket 0, \infty \rrbracket}$ et $T_F^{\llbracket 0, \tilde{m} \rrbracket}(x)_{\llbracket 0, J \rrbracket} = T_F^{\llbracket 0, \tilde{m} \rrbracket}(y)_{\llbracket 0, J \rrbracket} = u$. On peut alors voir par une récurrence immédiate sur $j \leq J$, que $F^j(x)_{\llbracket 0, \infty \rrbracket} = F^j(y)_{\llbracket 0, \infty \rrbracket}$.
- On peut faire la même remarque du côté de l'anticipation centrée $\tilde{m}' \in \mathbb{N}$.
- En combinant ces deux points, on obtient pour deux configurations x et y l'équivalence suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{\llbracket 0, k \rrbracket} = y_{\llbracket 0, k \rrbracket} \\ T_F^{\llbracket -\tilde{m}, 0 \rrbracket}(x)_{\llbracket 0, J \rrbracket} = T_F^{\llbracket -\tilde{m}, 0 \rrbracket}(y)_{\llbracket 0, J \rrbracket} \\ T_F^{\llbracket k, k+\tilde{m}' \rrbracket}(x)_{\llbracket 0, J \rrbracket} = T_F^{\llbracket k, k+\tilde{m}' \rrbracket}(y)_{\llbracket 0, J \rrbracket} \end{array} \right. \Leftrightarrow T_F^{\llbracket -\tilde{m}, k+\tilde{m}' \rrbracket}(x)_{\llbracket 0, J \rrbracket} = T_F^{\llbracket -\tilde{m}, k+\tilde{m}' \rrbracket}(y)_{\llbracket 0, J \rrbracket} .$$

Traces et chevauchement. On peut directement «voir» la règle locale d'un AC à l'intérieur de son facteur diamétral. Cette remarque va nous donner la possibilité de reconstruire un AC à partir de ce facteur colonne particulier. De plus, cela peut lui permettre de partager certaines propriétés avec ce sous-décalage (et non plus une famille infinie comme dans le cas des SS en général). On peut ainsi espérer pouvoir en décider certaines, comme on verra dans la section 6.4.

Proposition 3.5.5. *Si (Λ, F) est un ACP et $k \in \mathbb{N}$, alors τ_F^k est autochevauchant et pour tout $l \in \mathbb{N}$, $(\tau_F^k)^{[l]} \subset \tau_F^{k+l}$.*

Preuve. Soit une configuration $x \in \Lambda$. Alors pour toute cellule $i \in \llbracket 0, l \rrbracket$, $\pi_{\llbracket i, i+k \rrbracket} T_F^{k+l}(x) = T_F^{\llbracket i, i+k \rrbracket}(x)$, donc $T_F^{k+l}(x)$ est dans le chevauchement $(\tau_F^k)^{[l]}$. Réciproquement, pour toute cellule $i \in \llbracket 0, l \rrbracket$, $\pi_{\llbracket i, i+k \rrbracket}(\tau_F^{k+l}) = \tau_F^k$, donc τ_F^k est autochevauchant. \square

On obtient ainsi que les chevauchements de facteurs colonnes suffisamment larges sont des facteurs colonnes.

Proposition 3.5.6. *Soient F un ACP de diamètre centré $\tilde{d} \in \mathbb{N}^*$ sur un $(\tilde{d}-1)$ -STF Λ , $l \in \mathbb{N}$ et $k \geq \tilde{d}$. Alors $(\tau_F^k)^{[l]} = \tau_F^{k+l}$.*

Preuve.

- Montrons par récurrence sur $l \in \mathbb{N}$ que le chevauchement $(\tau_F^k)^{[l]}$ est inclus dans le tracé τ_F^{k+l} . Le cas $l = 0$ est trivial. Supposons que ce soit vrai pour $l \in \mathbb{N}$. Soit z un mot de $(\tau_F^k)^{[l+1]}$, égal par hypothèse de récurrence à $(\tau_F^{k+l})^{[1]}$. Il existe donc deux configurations x, y telles que $T_F^{k+l}(x) = \pi_{\llbracket 0, k+l \rrbracket}(z)$ et $T_F^{\llbracket 1, k+l \rrbracket}(y) = \pi_{\llbracket 1, k+l \rrbracket}(z)$. Par hypothèse, $k+l-1 \geq \tilde{d}-1$, donc la proposition 3.5.3 nous donne que $T_F^{k+l+1}(x \oplus_1 y) = z$.
- On a montré que $(\tau_F^k)^{[l]} \subset \tau_F^{k+l}$. La réciproque correspond à la proposition 3.5.5. \square

La combinaison des propositions 3.5.6 et 3.4.7 permet de reconstruire l'AC à partir de son facteur diamétral.

Corollaire 3.5.7. *Un ACP F de diamètre centré \tilde{d} est essentiellement l'extension limite des chevauchés $((\tau_F^{\tilde{d}})^{[k]})_{k \in \mathbb{N}}$ du facteur diamétral.*

Remarque 3.5.8. Le caractère autochevauchant du facteur diamétral représente une telle restriction qu'il pourrait permettre de transmettre certaines propriétés vers l'AC.

Considérons une propriété de SS préservée par *extension limite* et par *chevauchement* de sous-décalages *autochevauchants*. Alors elle est vérifiée par un AC dès qu'elle est vérifiée par son *facteur diamétral*.

Les meilleures candidates sont les propriétés dont on a déjà montré la stabilité par factorisation ; cela permettrait alors d'avoir une caractérisation.

Fait 3.5.9. *Si une des propriétés suivantes est préservée par chevauchement de sous-décalages autochevauchants, alors elle est vérifiée par chaque AC si et seulement si elle l'est par son facteur diamétral.*

- transitivités, mélanges ;
- factorisation d'un autre AC ;
- entropie donnée ;
- structure des attracteurs.

Preuve. Ces propriétés passent toutes à l'extension limite ; ne leur reste donc plus que d'être préservées par chevauchement de sous-décalages autochevauchants pour vérifier les hypothèses de la remarque 3.5.8. Réciproquement, les deux premières, tout comme la plénitude d'un attracteur, se transmettent directement par factorisation.

Pour l'entropie, on peut faire le même raisonnement avec les deux propriétés suivantes : entropie inférieure (resp. ou égale) à une valeur donnée.

On peut agir similairement avec le nombre d'attracteurs disjoints, qui est décroissant par factorisation. \square

Compatibilité.**Définition 3.5.10** (Sous-décalage compatible).

- Un mot (fini, infini ou biinfini) $(z_i)_{i \in J} \subset (A^k)^J$, avec $k \in \mathbb{N}$ et J un intervalle de \mathbb{Z} , est **compatible** avec l'ACP (A, F) d'ancre $m \in \mathbb{N}$, de diamètre $d \in \mathbb{N}$, de règle locale $f : \mathcal{L}_d(A) \rightarrow A$ si pour toute cellule $i \in \llbracket \max(0, m), k - \max(0, d - m) \rrbracket$ et toute génération $j \in J$, on a $z^j \in \mathcal{L}_k(A)$ et si $j+1 \in J$, $z_i^{j+1} = f(z_{\llbracket i-m, i+d-m \rrbracket}^j)$.
- Un sous-décalage $\Sigma \subset (A^k)^{\mathbb{M}}$ est **compatible** avec (A, F) si tous ses mots sont compatibles.

Notons que cette définition prend tout son sens quand k est au moins égal au diamètre centré \tilde{d} de F . Σ représente alors un candidat au tracé de largeur k , au sens où ses cellules centrales respectent bien la règle locale de F .

Remarque 3.5.11. Tout facteur colonne τ_F^k de largeur $k \in \mathbb{N}^*$ d'un ACP F est compatible avec F .

Réciproquement, on peut montrer qu'un sous-décalage autochevauchant et compatible est un «sous-facteur colonne».

Proposition 3.5.12. Si $k \in \mathbb{N}$ et $\Sigma \subset (A^k)^{\mathbb{M}}$ est un sous-décalage autochevauchant et compatible avec un ACP F sur un k -STF, de diamètre centré $\tilde{d} \leq k$, alors Σ est inclus dans le tracé τ_F^k .

Preuve. On suppose F bilatère – la construction est similaire dans le cas unilatère. Soit $z \in \Sigma$. L'autochevauchement permet de construire par récurrence une suite de mots $(z^l)_{l \in \mathbb{N}}$, avec $z^0 = z$ et pour tout $l \in \mathbb{N}$, $z^l \in \Sigma^{[2l]}$ et $z^l = \pi_{\llbracket 1, k+2l \rrbracket}(z^{l+1})$. Pour $j \in \mathbb{N}$, on définit x^j comme l'unique point de l'intersection décroissante $\bigcap_{l \in \mathbb{N}} [z_j^l]_{-l}$. Si \tilde{m} et \tilde{d} sont l'ancre et le diamètre centrés de F , la compatibilité et une récurrence immédiate nous donnent que pour toute cellule $i \in \mathbb{Z}$, $x_i^{j+1} = f(x_{\llbracket i-\tilde{m}, i-\tilde{m}+\tilde{d} \rrbracket}^j)$. En particulier, on voit qu'alors $\tau_F^k(x^0) = z$. \square

La compatibilité est encore plus significative pour les AC unilatères, dont elle permet de construire des facteurs colonnes à partir de tracés moins larges.

Proposition 3.5.13. Soient F un ACP sur un r -STF surjectif A , d'ancre 0, d'anticipation $r \in \mathbb{N}$ et $k \geq r$. Alors τ_F^k est l'ensemble des mots $z \in \mathcal{L}_k(A)^{\mathbb{N}}$ qui sont compatibles avec F et tels que $\pi_{\llbracket k-r, k \rrbracket}(z) \subset \tau_F^r$.

Preuve. Soit $z = (z^j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}_k(A)^{\mathbb{N}}$ compatible avec F et tel que $\pi_{\llbracket k-r, k \rrbracket}(z) \subset \tau_F^r$, i.e. il existe une configuration $x \in A$ telle que $T_F^{\llbracket k-r, k \rrbracket} = \pi_{\llbracket k-r, k \rrbracket}(z)$ (par surjectivité de A). Puisque A est un STF d'ordre r et surjectif, on peut trouver une configuration $y \in A$ telle que $y_{\llbracket 0, k \rrbracket} = z^0$ et $y_{\llbracket k-r, \infty \rrbracket} = x_{\llbracket k-r, \infty \rrbracket}$. Une récurrence immédiate sur la génération $j \in \mathbb{N}$ nous donne que $F^j(x)_{\llbracket 0, k \rrbracket} = z^j$.

La réciproque est évidente. \square

En particulier, cette condition d'appartenance est locale : dès que le facteur canonique est un STF, les tracés plus larges le sont également. De même, s'il est le système d'étiquettes d'un graphe, on peut facilement construire un graphe correspondant aux autres tracés, en y ajoutant les valeurs compatibles à gauche.

Traces et simulation. En tant que factorisation, toute trace se comporte bien vis-à-vis des produits, des projections, mais aussi des mémorisations (conjugaisons) et des groupages (conjugaisons d'itérés). Tout tracé d'un conjugué d'un SS F est conjugué à un tracé de F .

L'application trace est une simulation d'un sous-décalage par un SS. À ce titre, si un SS F en simule un autre G , alors tout tracé de G est simulé par un tracé de F , avec le même pas et la même période. Grâce au corollaire 3.4.8, on voit même qu'il s'agit d'une équivalence : un SS en simule un autre si et seulement s'il en simule chaque base de SUF – notamment si et seulement s'il simule tous ses FCC.

On peut désormais se demander si le cas très particulier des AC ne permet pas de se contenter de ne regarder qu'un seul FCC particulier.

Question 3.5.14. Un AC F est-il *facteur* d'un AC G dès que son *facteur diamétral* l'est ?

Il est nécessaire dans cette question de considérer toutes les factorisations, et non pas uniquement les factorisations cellulaires, qui n'ont aucun lien avec les factorisations de sous-décalages, comme nous pouvons le voir avec le contre-exemple suivant.

Exemple 3.5.15. Il existe deux AC dont tous les *SUF* sont *conjugués* – et qui sont donc *conjugués* – mais qui ne sont *pas* pour autant *facteurs cellulaires* l'un de l'autre. Il suffit de prendre, sur $A^{\mathbb{Z}}$, les décalages inverses σ et σ^{-1} , qui ont des tracés de n'importe quelle largeur *conjugués* à $(A^{\mathbb{N}}, \sigma)$. Les deux décalages σ et σ^{-1} sont *conjugués* par le morphisme
$$\Phi : A^{\mathbb{N}} \rightarrow A^{\mathbb{N}} \quad x \mapsto (x_{-i})_{i \in \mathbb{N}}$$
, qui est bien sûr continu mais pas invariant par décalage. On ne peut pas trouver de morphisme cellulaire Ψ correspondant, puisqu'on aurait simultanément $\Psi\sigma^m = \sigma^{m'}\Psi$ et $\Psi\sigma^n = \sigma^{-n'}\Psi$ avec $m, n, m', n' \in \mathbb{N}^*$, donc $\sigma^{nm'} = \sigma^{-mn'}$.

3.6 Classification symbolique

La définition des traces nous amène à une classification des SS, introduite à l'origine par Kůrka dans [43], en fonction de la complexité des *SUF* : fini (prépériodique), sofique infini, ou non sofique. On peut intégrer dans cette classification, entre les sous-décalages finis et les sous-décalages soifiques, les sous-décalages de type fini, une classe implicitement mentionnée déjà dans [43] puisqu'elle a de forts liens avec la propriété de pistage (*cf* conjecture 4.4.6). On obtient donc une classification en quatre classes.

Notons au préalable que, comme remarqué dans [85], tout *SUF* d'un ACP a un langage *contextuel* ; en effet, on a une procédure Turing simple pour calculer l'ensemble des mots de longueur n , en simulant l'évolution d'un AC de diamètre d à partir d'une fraction de configuration de longueur $(d-1)(n-1)+1$; cette procédure fonctionne bien en espace borné.

Il faut cependant remarquer, même si l'on reviendra peu dessus par la suite, que certains AC ont des langages non rationnels, comme l'exemple suivant.

Exemple 3.6.1 (Gilman [36]). On considère l'AC oblique σ Min sur $2^{\mathbb{N}}$, décalé du Min présenté dans l'exemple 3.1.3. Ses facteurs sous-décalages non triviaux ne sont *pas soifiques*. Notamment $\tau_{\sigma \text{ Min}} = \{z \in 2^{\mathbb{N}} \mid \forall j \in \mathbb{N}, z_{\llbracket j, j+1 \rrbracket} = 10 \Rightarrow z_{\llbracket j, 2j+1 \rrbracket} = 10^{j+1}\}$, comme prouvé dans [63].

3.6.1 Systèmes de type fini

Un SS est de **type fini** s'il admet une *base* de *SUF* de *type fini*. Il est de **type infini** sinon. Remarquons que les notions coïncident dans le cas des sous-décalages – il suffit de prendre une base à un seul élément : le sous-décalage en question. Plus généralement, nous verrons grâce au théorème 4.6.1 que les systèmes de type fini admettent une caractérisation purement topologique : ce sont exactement les *extensions limites* de systèmes *positivement expansifs ouverts* sur un espace *totalemt discontinu*.

Cette généralisation de la notion de type fini a le mérite d'être un invariant de conjugaison, contrairement à la condition que tous les tracés soient de type fini. Un SS est de type fini en particulier quand tous les facteurs colonnes sont des STF, mais la réciproque est fausse.

Exemple 3.6.2. On considère le STF $\Sigma = \overline{\mathcal{O}_{\sigma}(11(0100)^*1^{\infty})}$. Alors le SS (Σ, σ^2) est de *type fini*, puisqu'il est *conjugué* au STF $\overline{\mathcal{O}_{\sigma}((3(10^*) + 22(02)^*1)3^{\infty})}$ – le *2-groupé* de Σ , traduit en base 4. En revanche, $T_{\sigma^2}(\Sigma) = \overline{\mathcal{O}_{\sigma}((1(10)^* + 1(00)^*)1^{\infty})}$ est de *type infini*.

Automates cellulaires de type fini. On peut montrer que si un AC a un *facteur diamétral* de type fini, alors tous ses FCC plus larges le sont également ; il est en particulier de type fini.

Proposition 3.6.3. Soit F un ACP de diamètre centré \tilde{d} sur un $(\tilde{d}-1)$ -STF A , et $h \geq \tilde{d}$ tels que τ_F^h est un STF d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$. Alors pour toute largeur $l \geq h$, τ_F^l est également un k -STF.

Preuve. La proposition 3.5.6 nous donne $\tau_F^l = (\tau_F^h)^{\lfloor l-h \rfloor}$. Nous avons vu en section 2.5 que le type fini et l'ordre étaient préservés par l'opération de chevauchement. \square

Dans le cas des AC unidirectionnels, on peut même se contenter du facteur canonique ou de n'importe quel facteur de largeur plus grande.

Proposition 3.6.4 ([46]). *Soit F un ACP d'ancre 0 et de diamètre centré $\tilde{d} \geq 1$ sur un $(\tilde{d} - 1)$ -STF et $h \geq \tilde{d}$ tels que τ_F^h est un STF d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$. Alors pour toute largeur $l \geq \tilde{d} - 1$, le tracé τ_F^l est également un k -STF.*

Preuve .

- Soient $l \leq h$ et u, v deux mots enjambants de $\mathcal{L}_k(\tau_F^l)$. Il existe alors $u' = (u'^j)_{0 \leq j < k} \in \mathcal{L}_k(\tau_F^h)$ tel que $\pi_{\llbracket h-l, h \rrbracket}(u') = u$. Soit x une configuration telle que $T_F^{\llbracket h-l, h \rrbracket}(x) = v$ (existe par hypothèse) et $x_{\llbracket 0, h-l \rrbracket} = u'^1$ (n'influe pas sur la trace relative à $\llbracket h-l, h \rrbracket$ puisque l'AC est unidirectionnel). Alors on peut facilement voir par récurrence sur $j < k - 1$ que $F^j(x)_{\llbracket 0, h \rrbracket} = u'^{j+1}$. On a donc deux mots enjambants u' et $T_F^h(x)_{\llbracket 0, k \rrbracket}$ de $\mathcal{L}_k(\tau_F^h)$. Par hypothèse, leur enjambement est dans $\mathcal{L}_{k+1}(\tau_F^h)$. Par construction, sa projection $\pi_{\llbracket h-l, h \rrbracket}(u' \oplus T_F^h(x)_{\llbracket 0, k \rrbracket})$ est l'enjambement de u et v , qui est donc dans $\mathcal{L}_{k+1}(\tau_F^l)$. On a donc montré que τ_F^l est d'ordre k .
- Le cas où $l \geq h$ vient de la condition d'appartenance de la proposition 3.5.13. \square

Il n'est pas clair que ce résultat, légèrement plus précis que la proposition 3.6.3, soit généralisable au cas bilatère.

Question 3.6.5. Soit F un AC de diamètre centré \tilde{d} et $h \geq \tilde{d}$ tels que τ_F^h est un STF. Le facteur diamétral $\tau_F^{\tilde{d}}$ (resp. ou *canonique*) est-il alors un STF ?

En revanche, on ne peut rien déduire d'un facteur colonne de type fini si sa largeur est plus petite que le diamètre, comme nous le verrons dans l'exemple 5.3.4.

Dans le cas général des AC de type fini, on ne sait pas non plus si l'on peut obtenir une caractérisation générale similaire aux AC sofiques, en ne décomposant que le facteur diamétral.

Conjecture 3.6.6. Un ACP F de diamètre centré \tilde{d} est de *type fini* si et seulement si une trace T_F^k , avec $k \geq \tilde{d}$, est *décomposable* via un STF.

En revanche, là aussi, on a une réponse partielle, pour le cas unilatère.

Proposition 3.6.7. *Un ACP F sur un r -STF surjectif Λ , d'ancre 0 et d'anticipation $r \in \mathbb{N}$, est de type fini si et seulement si sa factorisation canonique est décomposable via un STF.*

Preuve. Soit (Λ, F) un tel ACP; supposons qu'on a une décomposition $T_F^r = \Psi\Phi$, où $\Sigma = \Phi(\Lambda)$ est un STF d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $l \geq r$. On peut alors définir :

$$\Sigma_l = \left\{ (z_j, w_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}_l(\Lambda)^{\mathbb{N}} \times \Sigma \mid z \text{ est compatible et } \Psi(w) = \pi_{\llbracket l-r, l \rrbracket}(z) \right\} .$$

Il s'agit d'un STF d'ordre $\max(k, 2)$. De plus, la projection $\pi : (z, w) \mapsto z$ est une factorisation de Σ_l dans τ_F^k . En effet $\pi(\Sigma_l)$ est exactement le sous-décalage des mots compatibles dont le projeté par $\pi_{\llbracket l-r, l \rrbracket}$ est dans τ_F^r ; cela coïncide avec τ_F^k par la proposition 3.5.13.

La réciproque est évidente. \square

Un exemple fréquent d'AC dont tous les FCC sont de type fini est donné par les AC additifs (cf [10]), i.e. dont la règle locale est une loi linéaire des états. Mais certains AC de type fini n'ont pas de facteurs colonnes de type fini, comme l'exemple suivant, défini dans [63].

Exemple 3.6.8. L'AC F sur $\llbracket 0, 5\llbracket^{\mathbb{N}}$ défini par un rayon 1 et la règle locale :

$$f : \llbracket 0, 5\llbracket^2 \rightarrow \llbracket 0, 5\llbracket$$

$$(a, b) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } a = 0 \text{ et } b = 2 \\ 0 & \text{si } a = 1 \text{ et } b = 4 \\ 3 & \text{si } a = 2 \\ 4 & \text{si } a = 3 \text{ et } b = 4 \\ 2 & \text{si } a = 3 \\ a & \text{sinon} \end{cases}$$

est de type fini mais son tracé est de type infini. En effet, on peut définir un morphisme Φ sur τ_F^2 par la règle locale :

$$\phi : \llbracket 0, 5\llbracket^2 \rightarrow (2 \times \{2, 3, 4\} \sqcup \{2, 3, 4\})$$

$$u \mapsto \begin{cases} u_0 & \text{si } u_0 \geq 2 \\ u & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $\Phi(\tau_F^2) = \overline{\mathcal{O}_\sigma((23)^*4^\infty + (0, 3)(0, 2)((1, 3)(1, 2))^*(0, 4)^\infty)}$ est de type fini. De plus $\pi_0\Phi(\tau_F^2) = \tau_F$. Grâce à la proposition 3.6.7, F est de type fini. Pourtant, comme prouvé dans [63], $\tau_F \cap \{2, 3, 4\}^{\mathbb{N}} = \overline{\mathcal{O}_\sigma((23)^*4^\infty + \{01^{2k}0^\infty \mid k \in \mathbb{N}\})}$ n'est pas de type fini.

3.6.2 Systèmes sofiqes

Un SS est **sofique** s'il admet une *base* de SUF *sofiqes*. Contrairement au type fini, le théorème 2.4.12 fournit une caractérisation plus simple : un SS est sofique si et seulement si tous ses SUF le sont. Par la remarque 3.4.3, les notions coïncident heureusement sur les sous-décalages. Comme pour les systèmes de type fini, les systèmes sofiqes peuvent être caractérisés sans faire intervenir le symbolisme : ce sont les *extensions limites* de *facteurs* de systèmes *positivement expansifs ouverts* sur un espace *totalemt discontinu*.

Clairement, les systèmes de type fini sont sofiqes. Un exemple de système sofique de type infini est l'automate apériodique de Coven, défini dans [86] et étudié dans [44]. Comme pour les AC de facteurs colonnes de type fini, la proposition 3.5.13 donne dans le cas unilatère une caractérisation similaire à la proposition 3.6.4 : un AC *unilatère* est *sofique* si et seulement si son *facteur canonique* l'est (prouvé dans [44]). On peut généraliser ce résultat à tous les AC, à condition de passer au *facteur diamétral*.

Théorème 3.6.9 (di Lena [47]). *Un ACP F de diamètre centré \tilde{d} est sofique si et seulement s'il existe une largeur $k \geq \tilde{d}$ telle que le tracé τ_F^k est sofique.*

Preuve. Supposons que τ_F^k est sofique, avec $k \geq \tilde{d}$, et $l \geq k$. Le facteur colonne τ_F^l , égal au chevauchement $(\tau_F^k)^{[l-k]}$ par la proposition 3.5.6, est sofique par le fait 2.3.10. La famille des facteurs colonnes $(\tau_F^l)_{l \geq k}$ est donc une base sofique de F . \square

On peut alors formuler une caractérisation similaire à celle des AC dont les FCC sont de type fini : un AC est sofique dès que sa factorisation diamétrale est décomposable via un sous-décalage sofique. Nous avons déjà fait la remarque que, dans ce cas, tous les tracés, et en particulier le facteur diamétral, sont sofiqes. En revanche, on peut construire un AC non sofique qui a des tracés (de petite largeur) de type fini (*cf* exemple 5.3.4).

Théorème à la Weiss pour les SS. Par analogie au théorème 2.4.12 sur les sous-décalages, on peut caractériser les systèmes sofiqes comme facteurs de systèmes de type fini.

Théorème 3.6.10. *Un SS est sofique si et seulement s'il est facteur d'un SS de type fini.*

Preuve .

- Si (A, F) est un SS facteur d'un système (Σ, G) de type fini, alors tous ses tracés aussi. Chaque tracé est facteur d'un tracé de G de type fini ; ils sont donc tous sofiques.
- Réciproquement, supposons que $(A \subset A^{\mathbb{M}}, F)$ est un système sofique, et construisons par récurrence une famille $(\Sigma_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de STF et une famille $(\Phi_i : \Sigma_i \rightarrow \tau_F^{(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ de factorisations. Prenons Σ_0 une extension markovienne de $\tau_F^{(0)}$ et $\Phi_0 : \Sigma_0 \rightarrow \tau_F^{(0)}$ la factorisation impliquée. Supposons maintenant qu'on a construit notre famille partiellement jusqu'à l'indice $i \in \mathbb{N}$. Si Σ'_i est une extension markovienne de Σ_i , la proposition 2.5.14 permet de trouver une extension markovienne Σ_{i+1} commune à $\tau_F^{(i+1)}$ et Σ'_i , telle que les factorisations impliquées sont compatibles avec $\pi_{(i)}$. On peut construire l'extension limite (Σ, G) des $(\Sigma_i, \sigma)_{i \in \mathbb{N}}$ relativement aux factorisations $(\Psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Alors les tracés $\tau_F^{(i)}$ de F sont tous facteurs de G , donc F aussi. \square

Corollaire 3.6.11. *Tout SS qui est facteur d'un système sofique est sofique.*

En ce qui concerne les AC, di Lena a obtenu une caractérisation un peu plus précise.

Proposition 3.6.12 ([87]). *Un ACP est sofique si et seulement s'il est facteur cellulaire d'un ACP de type fini.*

Preuve .

- Le théorème 3.6.10 peut être appliquée directement pour voir que les facteurs d'un AC de type fini sont sofiques.
- Réciproquement, soit $(A \subset A^{\mathbb{M}}, F)$ un ACP de diamètre centré \tilde{d} et dont le facteur diamétral $\tau_F^{\tilde{d}}$ est facteur d'un sous-décalage markovien $\Sigma \subset B^{\mathbb{N}}$ par une factorisation résoluble $\Phi : \Sigma \rightarrow \tau_F^{\tilde{d}}$ basée sur une règle locale surjective $\phi : B \rightarrow A^{\tilde{d}}$. Celle-ci peut également être vue comme la règle locale d'une factorisation lettre à lettre Φ' entre les décalages complets $B^{\mathbb{M}}$ et $(A^{\tilde{d}})^{\mathbb{M}}$, dont on note $\tilde{\Phi}$ la restriction à la préimage $A' = \Phi'^{-1} \boxminus_{\tilde{d}}(A)$ du mémorisé de A . Considérons le mémorisé horizontal $\tilde{F} = F_{\boxminus_{\tilde{d}}}$, de règle locale \tilde{f} . La résolubilité de Φ nous permet de construire sans ambiguïté l'AC $G : A' \rightarrow A'$ de rayon 1 et de règle locale :

$$\begin{aligned} g : B^{(1)} &\rightarrow B \\ u &\mapsto v \text{ où } u_0v \in \mathcal{L}_2(\Sigma) \text{ et } \phi(v) = \tilde{f}\phi(u) . \end{aligned}$$

Alors $\tilde{\Phi}$ est également une factorisation de (A', G) dans $(\boxminus_{\tilde{d}}(A), \tilde{F})$, puisque pour toute configuration $x \in A'$ et toute cellule $i \in \mathbb{N}$, $\tilde{\Phi}G(x)_i = \phi g(x_{i+(1)})$ égale $\tilde{f}\phi(x_{i+(1)}) = \tilde{F}\tilde{\Phi}(x)_i$ par construction. Considérons une largeur $k \in \mathbb{N}^*$ et montrons que τ_G^k est un sous-décalage markovien. Pour cela, considérons $z = (z^j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}_2(\tau_G^k)$. En particulier, Σ étant un sous-décalage markovien, pour tout $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$, la projection $\pi_i(z)$ est dans Σ ; $\Phi\pi_i(z)$ est alors dans $\tau_F^{\tilde{d}}$. De plus pour toute génération $j \in \mathbb{N}$, $z^j \in \mathcal{L}(A')$, donc pour $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$, les $\phi(z_i^j)$ sont enjambants. Donc les $\Phi\pi_i(z)$ sont chevauchants et leur chevauchement z est dans $(\tau_F^{\tilde{d}})^{[k-1]} = \tau_F^{\tilde{d}+k-1}$ (cf proposition 3.5.6) : on peut trouver une configuration $x \in A$ dont le tracé $T_F^k(x)$ est z . On peut aussi trouver une configuration $y \in A'$ telle que $y_{\llbracket 0, k \rrbracket} = z^0$ et $\tilde{\Phi}(y) = \boxminus_{\tilde{d}}(x)$. Puisque $\tilde{\Phi}$ est un morphisme, on peut voir que pour toute cellule $i \in \mathbb{M}$ et toute génération $j \in \mathbb{N}$, $\phi(G^j(y)_i) = F(x)_{\llbracket i, i+\tilde{d} \rrbracket}$; en particulier, si $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$, les mots infinis $T_G^i(y)$ et $\pi_i(z)$ ont même image par Φ et même première lettre, donc, par résolubilité, ils sont égaux. En juxtaposant ces tracés, on obtient que $z = T_G^k(y)$ est bien dans le tracé τ_G^k , qui est donc un sous-décalage markovien. \square

Notons en outre que cette preuve nous fait retrouver qu'un AC est sofique dès que son facteur diamétral l'est.

En revanche, c'est le passage au mémorisé qui assure que tous les tracés de largeur supérieure à 1 sont bien de type fini. Par conséquent, cette méthode paraît difficilement adaptable pour retrouver un AC sur un décalage complet.

Question 3.6.13 ([87]). *Tout AC sofique est-il facteur cellulaire d'un AC de type fini ?*

Classification symbolique et simulation. Nous avons vu que les facteurs sous-décalages se comportent bien vis-à-vis de l'itération, du produit, de la mémorisation, du groupage de SS. Or nous avons fait la remarque dans le chapitre précédent que les STF et les sofiques étaient préservés par groupage et dégroupage. Il résulte que la simulation complète exacte préserve le type fini et, par le corollaire 3.6.11, que la simulation complète préserve la soficité.

La complétude de la simulation est indispensable, puisque tout SS peut être essentiellement prolongé en un SS de type fini : il suffit de considérer l'extension limite de ses FCC, à laquelle il est conjugué, et de prolonger ceux-ci en des décalages complets (STF) ; les factorisations impliquées peuvent être prolongées aussi.

En revanche, cette classification est très sensible au décalage. Par exemple, quel que soit la complexité d'un décalage Σ , les tracés de $\text{id}|_{\Sigma}$ sont finis, tandis que ceux de $\sigma|_{\Sigma}$ sont conjugués à Σ dès qu'ils sont suffisamment fins pour distinguer les lettres.

Mentionnons qu'il est prouvé dans [81] l'existence de SS *universels* au sens de la simulation directe complète totale pour les classes de SS équicontinus, sofiques, mais également ceux qui ont des tracés sofiques dénombrables, algébriques, contextuels, récursifs... En d'autres termes, tous les SS de chacune de ces classe sont facteurs d'un SS particulier ; de plus, un tel SS, pris minimal, est unique.

3.7 D'autres systèmes symboliques

Dans les chapitres suivants, nous nous intéresserons particulièrement aux AC (ou ACP) unidimensionnels. Il existe néanmoins beaucoup d'autres systèmes symboliques, tous plus fabuleux les uns que les autres. Dans [17] sont notamment mentionnés les systèmes de tags, introduits par Post en 1920, les fonctions de Collatz, les machines à compteurs... Ces familles de systèmes ont tous été, d'une manière ou d'une autre, prouvés équivalents aux machines de Turing, que nous allons brièvement mentionner à cause de leur caractère fondamental en informatique. Nous allons voir ensuite deux types de systèmes dérivés des automates cellulaires, qui nous serviront dans le chapitre 5.

Machines de Turing. Les *machines de Turing* peuvent être vues comme des systèmes symboliques, à condition d'étendre leur domaine à des configurations infinies (puisque l'espace des mots finis qu'une machine peut prendre en entrée n'est pas compact). On a alors la possibilité soit de particulariser un caractère blanc afin de garder les configurations finies dans l'espace des phases, soit de simuler celles-ci à l'intérieur de configurations infinies.

Parmi les différentes formalisations, la plus intéressante est sans doute celle dite «à ruban mobile», définie par Moore dans [88] sous le nom de «décalages généralisés», et reprise par Kůrka dans [89]. Ce dernier montre notamment que la propriété de pistage implique que la position de la tête ne fait pas des cycles arbitrairement longs. Dans [90, 91], Gajardo obtient une généralisation : cette dernière propriété caractérise les machines sofiques.

Dans [89], on trouve également une comparaison des machines de Turing à ruban mobile avec les machines de Turing à tête mobile, qui se révèlent être moins pertinentes puisque les modifications de la bande par la tête peuvent avoir une conséquence infime au niveau métrique ; en particulier l'entropie est toujours nulle. Ce modèle permet toutefois de pouvoir étendre ce système en un AC, mais les résultats de [92] laissent entendre que cette extension ne préserve pas les propriétés essentielles de la machine de départ.

Ce plongement des machines de Turing dans le monde des systèmes dynamiques permet de formaliser mathématiquement des notions informatiques comme le calcul ou l'universalité Turing, utilisée très souvent sans être bien définie. Cependant, la simulation cellulaire représente un codage simple et n'inclut pas certaines simulations Turing très spécifiques, comme celle par l'AC 110 dans [93, 94], revisitée dans [95], où une répétition infinie de l'entrée est requise en configuration initiale.

Automates à répartition périodique. Un **automate à répartition périodique** de période $k \in \mathbb{N}^*$ est un SS $(A \subset A^{\mathbb{M}}, F)$ qui admet un rayon $r \in \mathbb{N}$ et une famille $(f_i)_{0 \leq i < k}$ de règles locales telles que pour toute configuration $x \in A$ et toute cellule $i \in \mathbb{M}$, $F(x)_i = f_{i \bmod k}(x_{i+\langle r \rangle})$.

Le fait 2.3.4 nous montre qu'il s'agit alors d'un *morphisme* de la *puissance* $k^{\text{ème}}$ du décalage. On peut en particulier se restreindre au cas où A est invariant par σ^k .

Les automates à répartition périodique sont donc exactement les SS F dont le *groupé horizontal* $\boxplus_k F$ est un ACP sur un alphabet $B \subset A^k$; on utilisera cette propriété dans la section 5.1.

Leurs *tracés* sont des *projections de tracés* de l'ACP correspondant. Pour les tracés d'intervalle $\llbracket ik, (i+l)k \llbracket$ où $i \in \mathbb{M}$ et $l \in \mathbb{N}$, on retrouve les tracés de l'ACP $F_{\boxplus_k} : T_F^{\llbracket ik, lk \llbracket} = T_{F_{\boxplus_k}}^{l-i}$.

Automates semifinis. Les sous-espaces symboliques ne sont pas tous aussi lisses que les sous-décalages. On peut par exemple construire l'ensemble des mots finis et infinis sur un alphabet A donné. On obtient l'espace $\overline{A^{\mathbb{M}}} = A^* \sqcup A^{\mathbb{M}}$. On indexe un mot fini u de 0 à $|u| - 1$ si $\mathbb{M} = \mathbb{N}$ et de $-\lfloor \frac{|u|}{2} \rfloor$ à $\lfloor \frac{|u|}{2} \rfloor$ si $\mathbb{M} = \mathbb{Z}$ et on munit l'espace de l'ultramétrie suivante :

$$\begin{aligned} \text{d} : \quad \overline{A^{\mathbb{M}}}^2 &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\mapsto 2^{-\min_{k \in D_{x,y}} |k|} \\ \text{où } k \in D_{x,y} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_{\langle k \rangle} \text{ existe, mais pas } y_{\langle k \rangle} \\ y_{\langle k \rangle} \text{ existe, mais pas } x_{\langle k \rangle} \\ x_{\langle k \rangle} \neq y_{\langle k \rangle} . \end{cases} \end{aligned}$$

En particulier, $\overline{A^{\mathbb{M}}}$ est la clôture de A^* . Un **automate semifini** est un SS F sur un tel espace $\overline{A^{\mathbb{M}}}$ qui induit un AC sur $A^{\mathbb{M}}$ et un *sous-système* sur chaque A^k , $k \in \mathbb{N}$.

Visuellement, on peut voir un automate semifini comme un AC sur le STF $\Sigma_{L^C L + R R^C} \subset B^{\mathbb{M}}$, où $B = A \sqcup \{L, R\}$; on a ajouté à l'alphabet deux lettres fraîches L et R , stagnantes, telles que tous les mots aL et Rb , avec $a \neq L$ et $b \neq R$, sont interdits. Les configurations qui n'ont que des R à droite et des L à gauche peuvent ainsi être vues comme les mots finis; il sont alors représentés à un décalage près, qui importe peu puisque l'AC oblige les différents translatsés à évoluer de la même manière.

Par cette caractérisation, on voit qu'il existe alors un diamètre $d \in \mathbb{N}$, une ancre $m \in \mathbb{N}$ et une règle locale $f : (L^* A^* \cap A^m) A (A^* R^* \cap A^{d-m-1}) \rightarrow A$. Pour tout rayon $k \in \mathbb{N}$, la factorisation colonne $T_F^{(k)}$ n'est définie que pour les mots de largeur suffisante : on note donc $\tau_F^{(k)} = T_F^{(k)}(\{x \in \overline{A^{\mathbb{M}}} \mid x_{\langle k \rangle} \text{ existe}\})$. La proposition suivante montre que le tracé peut correspondre à celui d'un AC, dans les cas où la règle locale de celui-ci peut facilement être étendue aux voisinages des extrémités des mots finis.

Proposition 3.7.1. *Tout AC $(A^{\mathbb{M}}, G)$ qui est unidirectionnel, stagnant ou bipermutif peut être prolongé par continuité en un automate semifini F sur l'espace $\overline{A^{\mathbb{M}}}$ de même ancre, diamètre et de mêmes facteurs colonnes $\tau_G^{(k)} = \tau_F^{(k)}$, pour tout rayon $k \in \mathbb{N}$.*

Preuve. La règle locale f de F est égale sur $A^{\mathbb{M}}$ à celle g de G . Il suffit donc de définir la fonction f pour les extrémités des mots finis, *i.e.* où L ou R apparaît dans le voisinage, en s'arrangeant pour que chaque tracé produit en ces cellules corresponde au tracé d'une configuration de $A^{\mathbb{M}}$. Il suffit alors de montrer que pour tout rayon $k \in \mathbb{N}$, $T_F^{(k)}(A^{\langle k \rangle}) \subset \tau_G^{(k)}$; on aura alors aussi, par projection, $T_F^{(l)}(A^{\langle k \rangle}) \subset \tau_G^{(l)}$ pour toute largeur $l < k$.

– Dans le cas où G a une ancre 0 (en particulier, si $\mathbb{M} = \mathbb{N}$), on prolonge la règle locale g en :

$$\begin{aligned} f : \quad A(A \sqcup \{R\})^{d-1} &\rightarrow A \\ u &\mapsto \begin{cases} g(u) & \text{si } R \not\in u \\ g(u_{\llbracket 0, k \llbracket} u_k^{|u|-k}) & \text{si } \exists k \in \llbracket 0, |u| - 1 \llbracket, u_k \in A \text{ et } u_{k+1} = R . \end{cases} \end{aligned}$$

Une récurrence immédiate nous montre que la trace de tout mot $u \in A^{\langle k \rangle}$ vaut $T_F^{(k)}(u) =$

$$T_G^{(k)}(\infty u_0 w u_{|u|}^\infty) \subset \tau_G.$$

- Dans le cas où il existe un état stagnant $0 \in A$, on remplace L et R par 0 et l'on voit que les orbites de mots finis par F correspondent à celles des configurations 0 -finies de G à renommage près : $T_F^{(k)}(A^{(k)}) = T_G^{(k)}(\infty 0[A^{(k)}]0^\infty)$.
- Si G est bipermutif, alors n'importe quel prolongement f (de même ancre $m < 0$ et anticipation $m' > 0$) convient : le tracé d'un mot $w^0 \in A^k$ est une séquence $(w^j)_{j \in \mathbb{N}} \in (A^{\llbracket 0, k \rrbracket})^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $g(w^j) = w_{\llbracket m, k - m' \rrbracket}^{j+1}$. La bipermutivité nous permet alors de la prolonger en une séquence $(z^j)_{j \in \mathbb{N}} \in (A^{\llbracket -m, k + m' \rrbracket})^{\mathbb{N}}$ telle que $z_{\llbracket 0, k \rrbracket}^j = w^j$ et $g(z^j) = w^{j+1}$. Par récurrence et à la limite, on obtient une séquence $(x^j)_{j \in \mathbb{N}} \in (A^{\mathbb{Z}})^{\mathbb{N}}$ de configurations telle que pour toute génération $j \in \mathbb{N}$, $x_{\llbracket 0, k \rrbracket}^j = w^j$ et $G(x^j) = x^{j+1}$. Autrement dit, $(w^j)_{j \in \mathbb{N}}$ est bien le tracé $T_G(x^0)$ d'une configuration de $A^{\mathbb{M}}$.

□

Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre les spécificités des systèmes symboliques, qui sont des systèmes dynamiques à temps discret sur des cellules placées dans un univers discret lui aussi. Dans ce cadre, on peut particulariser la notion de simulation vue dans le chapitre 1 pour imposer une certaine simplicité, représentée par le caractère local de la règle de codage : on obtient le concept de simulation cellulaire.

Surtout, on peut étudier les SS via leurs tracés, *i.e.* en se ramenant à l'étude de sous-décalages particuliers sur lesquels se lit l'évolution d'un nombre fini de cellules. On peut les utiliser pour distinguer des classes de systèmes : les systèmes à tracés finis, les systèmes à tracés sofiqes et entre les deux, les systèmes de type fini, qui permettent une caractérisation à la Weiss des systèmes sofiqes.

Nous avons étudié les SUF en nous basant sur une classification grammaticale des langages. Une autre approche consisterait à utiliser la complexité algorithmique, comme cela a été présenté dans [96].

Nous avons étudié une classe particulière de SS, les AC. Ceux-ci sont tout à fait adaptés à la simulation cellulaire et peuvent être reconstruits à partir d'un tracé particulier. Ces deux remarques sont à la base des résultats du chapitre suivant.

Chapitre 4

Dynamique des systèmes symboliques

DANS ce chapitre, nous revisitons dans le cadre spécifique des SS et des AC les notions de dynamique définies en toute généralité dans le chapitre 1, en reprenant des caractérisations connues (cf [67]), et également en étudiant comment elles se comportent vis-à-vis des traces ou des simulations cellulaires.

4.1 Propriétés immédiates

Surjectivité. Le fait 1.4.2 nous donne une caractérisation simple de la surjectivité des SS : un SS est surjectif si et seulement si tous les tracés d'une base donnée de SUF le sont. Dans la notation du théorème de Heine pour un SS (X, F) , cela nous donne que toutes les règles $f_k : \{x_{\langle r_k \rangle} \mid x \in X\} \rightarrow \{x_{\langle k \rangle} \mid x \in X\}$ – telles que pour tout $x \in X$, $F(x)_{\langle k \rangle} = f(x_{\langle r_k \rangle})$ – pour $k \in \mathbb{N}$, sont surjectives.

Dans le cadre des AC, la surjectivité est alors équivalente à la surjectivité de la règle locale (étendue à tous les mots). Elle est même tellement restrictive qu'elle se traduit par un **équilibre** de la règle locale : tous les mots ont le même nombre d'antécédents.

Théorème 4.1.1 ([32]). *Soit F un AC et $f : A^* \rightarrow A^*$ sa règle locale étendue. Alors F est surjectif si et seulement s'il est équilibré, i.e. pour toute longueur $k \in \mathbb{N}$ et tous mots $u, v \in A^k$, $|f^{-1}(u)| = |f^{-1}(v)|$.*

On peut facilement voir que cette condition d'équilibre impose alors que pour tout mot $u \in A^*$, $|f^{-1}(u)| = |A|^d$. Ce théorème a été généralisé en dimensions supérieures dans [97]. Dans [98], cette condition est rendue constructible grâce à une borne effective : F est surjectif si et seulement si pour tout mot $u \in A^{d \log_2 |A| (2d + |A|^{2d})}$, $|f^{-1}(u)| = |A|^d$.

Préinjectivité. On dit que deux configurations $x, y \in A^{\mathbb{N}}$ (resp. $A^{\mathbb{Z}}$) sont **asymptotiques à droite** (resp. **à gauche**) si $x_i = y_i$ pour tout $i > k$ (resp. $i < k$), avec $k \in \mathbb{M}$. Un SS F sur un sous-décalage Λ est **préinjectif** si pour toutes configurations $x, y \in \Lambda$ distinctes, *asymptotiques* à droite et à gauche, on a $F(x) \neq F(y)$.

On peut remarquer que, pour un ACP F d'ancre m , d'anticipation m' et de règle locale étendue f sur un STF Λ d'ordre plus petit que m et m' , la condition de préinjectivité est équivalente à l'absence de **diamant**, i.e. deux mots distincts $u, v \in A^{m'+k+m}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, $u_{[0, m']}] = v_{[0, m']}]$, $u_{[m'+k, m'+k+m]]} = v_{[m'+k, m'+k+m]]}$ et $f(u) = f(v)$. On a d'autre part une équivalence avec la finitude du nombre maximal d'antécédents des configurations.

Proposition 4.1.2.

1. Si F est un ACP préinjectif de diamètre d , alors toute configuration $x \in \Lambda$ a au plus $|F^{-1}(x)| = |A|^d$ antécédents.
2. Si F est un ACP non préinjectif sur un STF autotransitif Λ , alors il existe une configuration $x \in \Lambda$ qui a un nombre indénombrable $|F^{-1}(x)|$ d'antécédents.

Preuve.

1. Supposons qu'une configuration $x \in A$ ait un ensemble d'antécédents $F^{-1}(x) \supset \{x^i \mid 0 \leq i \leq |A|^d\}$. Par préinjectivité, il existe un rayon $k \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $i \neq j$, $x_{\langle k \rangle}^i \neq x_{\langle k \rangle}^j$; il est pourtant absurde que ces $|A|^d + 1$ mots finis aient la même image par la règle locale étendue de F .
2. Soit k l'ordre de A , x, y deux configurations distinctes de même image $F(x) = F(y)$ et $l \in \mathbb{N}$ tels que $i \notin \langle l \rangle \Rightarrow x_i = y_i$. Par autransitivité de A , il existe une configuration z contenant une infinité d'occurrences du mot $x_{\langle k+l \rangle}$. Remplacer des occurrences par $y_{\langle k+l \rangle}$ permet d'obtenir un nombre indénombrable de configurations, qui sont toujours dans le k -STF A , et dont l'image est identique. \square

On peut également facilement remarquer, par densité des configurations finies, qu'un AC est *préinjectif* si et seulement si sa restriction aux configurations q -finies est injective, pour tout état $q \in A$.

Ces propriétés équivalentes entre elles ont été prouvées équivalentes à la surjectivité dans [32] pour les AC unidimensionnels, puis pour les AC de dimension supérieure, dans un sens dans [6] et dans l'autre dans [7], sous le nom de théorème du *Jardin d'Éden*. À partir d'une caractérisation de la préinjectivité par l'entropie de l'image, due à Lind et Marcus dans [42], [99] en donne une version unidimensionnelle en deux parties : sur un sous-décalage sofique transitif dans le sens de la propriété de Myhill, sur un STF transitif dans le sens de la propriété de Moore. Dans les deux cas, nous sommes dans les hypothèses des caractérisations de la préinjectivité vues ci-dessus. En revanche, on notera qu'il faut un AC complet pour qu'elle soit équivalente à l'injectivité sur les configurations finies.

Théorème 4.1.3 ([99]).

- *Tout ACP surjectif sur un STF transitif est préinjectif.*
- *Tout ACP préinjectif sur un sous-décalage sofique transitif est surjectif.*

Est également présenté dans [99] un contre-exemple à l'équivalence pour les ACP sur sous-décalages sofiques transitifs.

Injectivité. Un ACP F est **réversible** s'il existe un autre ACP G tel que $GF = FG$ soit l'identité. Le fait que l'inverse d'un SDD soit un SDD et la caractérisation de Hedlund rendent cette condition équivalente à la bijectivité ; ce résultat est connu sous le nom de théorème de Richardson. En appliquant cette propriété à l'AC unilatère correspondant, on peut voir que l'unidirectionnalité des AC est préservée par inversion.

De plus, il est évident que les AC injectifs sont préinjectifs. On obtient alors une caractérisation de la bijectivité.

Théorème 4.1.4. *Tout ACP injectif sur un sous-décalage sofique transitif est bijectif.*

On pourra se référer à [100, 101] pour une étude plus poussée des liens entre surjectivité, injectivité et restrictions sur les ensembles de configurations finies ou périodiques.

Ouverture. Les AC bilatères ouverts ont une caractérisation particulière par les AC fermants. On dit qu'un AC F est **fermant à droite** (resp. **à gauche**) si toutes configurations $x, y \in A^{\mathbb{M}}$ asymptotiques à droite (resp. à gauche) ont des images différentes $F(x) \neq F(y)$. En particulier, le théorème 4.1.1 nous montre que les AC *fermants* sont *surjectifs*.

Théorème 4.1.5 (Hedlund [32], Kůrka [67]). *Si F est un AC bilatère, alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. F est ouvert.
2. Toutes les configurations ont le même nombre $p \in \mathbb{N}^*$ d'antécédents.

3. Il existe une famille $(F_i)_{0 \leq i < p}$ de $p \in \mathbb{N}^*$ fonctions continues distinctes en tous points telle que pour toute configuration $x \in A^{\mathbb{M}}$, $F^{-1}(x) = \{F_i(x) \mid 0 \leq i < p\}$.
4. F est fermant à droite et fermant à gauche.

Propriétés immédiates et simulation. Les liens étroits entre surjectivité et injectivité simplifient beaucoup de choses pour les AC. En particulier, on sait depuis le fait 1.4.1 que la surjectivité se transmet par simulation complète. Or, on peut facilement remarquer que la préinjectivité passe au sous-système. De plus, une sous-conjugaison par blocs d'un décalage complet en reste un, ce qui permet de garder l'équivalence.

Fait 4.1.6. Si G est simulé par blocs par un ACP surjectif sur un STF transitif, alors G en est également un.

En ce qui concerne l'injectivité et l'ouverture, on sait déjà qu'elles sont transmises par simulation exacte, mais on ne sait pas, à notre connaissance, si elle le sont par factorisation. On peut cependant remarquer que c'est le cas lorsque la factorisation est lettre à lettre, puisque tout cylindre est transformé en un cylindre de même largeur.

Fait 4.1.7. La simulation hors-contexte préserve l'injectivité et l'ouverture des SS.

Notons enfin que, contrairement à la plupart des notions réellement dynamiques présentées dans la suite de ce chapitre, ces propriétés «immédiates» sont stables par composition avec le décalage – à condition que celui-là-même les vérifie : si F est un SS sur un sous-décalage bilatère A , alors F est *surjectif* (resp. *injectif*, *ouvert*) si et seulement si $F\sigma$ l'est aussi. En revanche, si A n'est pas fortement invariant par le décalage, ces propriétés peuvent être modifiées. Par exemple, si Σ est un sous-décalage unilatère non surjectif et de type infini comme $\mathcal{O}_\sigma(1^*0^\infty + 01^\infty)$, alors (Σ, σ) n'a aucune de ces propriétés tandis que (Σ, id) est bijective.

Propriétés immédiates et traces. Le fait 1.4.2 nous dit déjà qu'un SS est surjectif ou injectif dès que tous les SUF d'une base le sont. Plus précisément, si un ACP n'est pas *injectif*, alors son *tracé* de largeur 1 non plus, puisque deux configurations différentes ayant même image présentent bien une cellule différente et la suite du tracé en cette cellule est identique.

L'ouverture d'un SS, en revanche, n'est pas liée à celle de ses SUF. Par exemple, les sous-décalages bilatères de type infini sont ouverts, mais aucun de leurs FCC ne l'est (*cf* théorème 2.5.5). Inversement, les AC pré périodiques non surjectifs ont des FCC de type fini, mais ne sont pas ouverts.

Il est à noter que la décidabilité de la surjectivité et de l'injectivité des AC unidimensionnels [102] implique que ces deux propriétés sont reconnaissables à partir du tracé d'une largeur calculable à partir de l'AC. En effet, l'AC est surjectif si et seulement si un motif fini n'apparaît pas dans le langage de l'image ; il suffit donc de le trouver. En ce qui concerne les AC injectifs, il est prouvé dans [103] que le diamètre de leur inverse est au plus $|A|^{d-1} - 1$, où d est le diamètre de celui de départ. L'AC est donc injectif si et seulement si le facteur colonne de cette largeur vérifie une condition évidente de compatibilité avec une règle inverse (il n'est pas forcément injectif).

4.2 Dynamiques simples

Mortalités. Dans un espace symbolique, on peut distinguer deux types particuliers de mortalité, relativement à un ouvert.

Définition 4.2.1 (Configuration et système globalement et localement mortels). Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $U \subset A^k$ et $(A \subset A^{\mathbb{M}}, F)$ un SS.

- On dit qu’une configuration $x \in A$ est **localement** (resp. **globalement**) U -**mortelle** s’il existe une génération $j \in \mathbb{N}$ (resp. et une cellule $i \in \mathbb{M}$) telle que $F^j(x) \in [U]$ (resp. $F^j(x) \in [U]_i$).
- On dit que F est **globalement** (resp. **localement**) U -**mortel** si toutes ses configurations le sont.

Ces deux types de mortalité correspondent respectivement, dans le formalisme de la définition 1.5.1, à la $[U]$ -mortalité – un mot de U apparaît au centre de tout diagramme espace-temps – et à la $\bigcup_{i \in \mathbb{M}} [U]_i$ -mortalité – un mot de U apparaît dans tout diagramme espace-temps. En tant qu’ouverts, le fait 1.5.2 nous permet de voir qu’ils sont atteints en temps borné uniformément et, par compacité pour la mortalité globale, sur un rayon borné uniformément. Autrement dit, F est localement (resp. globalement) U -mortel si et seulement s’il existe une génération $J \in \mathbb{N}$ (resp. et un rayon $I \in \mathbb{N}$) tels que pour toute configuration $x \in A^{\mathbb{M}}$, on a une génération $j < J$ (resp. et une cellule $i \in \langle I \rangle$) pour laquelle $F^j(x)$ est dans le cylindre $[U]$ (resp. $[U]_i$).

La mortalité locale des AC est équivalente à une mortalité en toute cellule. Si F est un ACP U -mortel, avec $U \subset A^k$ et $k \in \mathbb{N}^*$, alors la définition en chaque décalée de chaque configuration nous donne :

$$\exists J \in \mathbb{N}, \forall x \in A^{\mathbb{M}}, \forall i \in \mathbb{M}, \exists j < J, F^j(x) \in [U]_i .$$

Si de plus U est stagnant, alors on obtient une génération $J \in \mathbb{N}$ telle que $F^J(A^{\mathbb{M}})$ est inclus dans le STF de langage interdit U^C .

Toujours dans le cas d’un code U stagnant, la U -mortalité globale de F est équivalente à l’existence d’une génération $J \in \mathbb{N}$ et d’un rayon $I \in \mathbb{N}$ tels que pour toute configuration $x \in A^{\mathbb{M}}$, il existe une cellule $i \in \langle I \rangle$ avec $F^J(x) \in [U]_i$. Ceci amène une caractérisation de la mortalité relative à un code envahissant.

Proposition 4.2.2. *Un ACP F sur un sous-décalage surjectif Λ est globalement U -mortel, où $U \subset A^k$ est un code envahissant et $k \in \mathbb{N}^*$, si et seulement s’il existe une génération $J \in \mathbb{N}$ telle que $F^J(\Lambda) \subset \bigcap_{i \in \mathbb{M}} [U]_i$.*

Preuve. Supposons que F est globalement U -mortel. Nous avons vu qu’il existe alors une génération $J \in \mathbb{N}$ et un rayon $I \in \mathbb{N}$ tels que pour toute configuration $x \in A^{\mathbb{M}}$, $\exists i \in \langle I \rangle, F^J(x)_{\llbracket i, i+k \rrbracket} \in U$. Quitte à effectuer un décalage inverse si $\mathbb{M} = \mathbb{Z}$, on peut voir qu’il existe une largeur l telle que pour toute configuration $x \in A^{\mathbb{M}}$, $\exists i \in \llbracket 0, l \rrbracket, F^J(x)_{\llbracket i, i+k \rrbracket} \in U$. Puisque U est envahissant, disons à gauche – la droite est symétrique grâce à la surjectivité de Λ – on obtient $F(\llbracket U \rrbracket_1) \subset \llbracket U \rrbracket_0 \cap \llbracket U \rrbracket_1$. Une récurrence immédiate nous donne $\forall x \in A^{\mathbb{M}}, F^{J+l}(x)_{\llbracket 0, k \rrbracket} \in U$. Par uniformité et invariance par décalage, on obtient le résultat. \square

La condition de surjectivité de Λ , prise en hypothèse pour éviter les effets de bords dans le cas de $A^{\mathbb{N}}$, peut être omise à condition d’imposer que U soit envahissant à gauche.

Dans le cas de la mortalité relativement à un fermé, on peut également uniformiser la génération.

Proposition 4.2.3. *Si F est un ACP K -mortel sur un sous-décalage transitif Λ , où K est un fermé invariant par un décalage, alors il existe une génération $J \in \mathbb{N}$ telle que $F^J(\Lambda) \subset K$.*

Preuve. On peut appliquer le corollaire 1.6.3 avec la décomposition de Λ par les $F^{-j}(K)$, qui sont bien des sous-systèmes pour un décalage, pour $j \in \mathbb{N}$. Remarquons que dans le cas bilatère, (Λ, σ) est transitif si et seulement si (Λ, σ^{-1}) aussi (cf proposition 1.6.4). \square

Ce résultat concerne les sous-décalages K mais également, dans $A^{\mathbb{Z}}$, les fermés invariants par σ qui ne sont pas invariants par σ^{-1} , ou l’inverse.

Remarque 4.2.4. Si (Λ, F) est un ACP et $J \in \mathbb{N}$ une génération telle que $F^J(\Lambda) \subset K$, alors, en tant que sous-décalage, l’image $F^J(\Lambda)$ est incluse dans $\bigcap_{i \in \mathbb{M}} \sigma^i(K)$.

Nilpotence. Les remarques précédentes sur la mortalité peuvent être spécialisées au cas de la nilpotence.

Fait 4.2.5.

- Supposons que (A, F) est un ACP et $j \in \mathbb{N}$ une génération telle que pour toute configuration $x \in A$, $F^j(x)_0 = 0$. La remarque 4.2.4 nous donne alors $A = F^{-j}(\infty 0^\infty)$, i.e. F est nilpotent.
- Inversement, si (A^M, F) est un AC non nilpotent, alors $F^{-j}([0^C])$ est un ouvert non vide; en particulier, il contient une configuration q -finie, pour toute lettre $q \in A$.
- De plus, le fait 3.1.5 nous donne une génération $J \in \mathbb{N}$ et un état $0 \in A$ quiescente pour F^J , de sorte que l'ensemble des configurations 0-finies est F^J -invariant. Par le point précédent, pour toute génération $j \in \mathbb{N}$, $F^j(A^M)$ contient une configuration 0-finie non uniforme $z = \infty 0[u]0^\infty$, avec $u \in A^*$ et $z_0 \neq 0$.

Dans le cas d'un AC faiblement z -nilpotent – i.e. mortel relativement à un singleton invariant – on peut voir que la décalée $\sigma(z)$, qui est également invariante, doit ultimement atteindre la configuration z . Donc $\sigma(z) = z$ est une configuration uniforme : il existe un état quiescent $0 \in A$ tel que $z = \infty 0^\infty$, ce qui justifiera la notation de **0-nilpotence** (équivalente à la $\infty 0^\infty$ -nilpotence). Grâce à cela, on peut montrer que la faible nilpotence est équivalente à la nilpotence.

Proposition 4.2.6. *Si F est un ACP sur un sous-décalage transitif $A \subset A^M$ et $0 \in A$ un état tels que toute configuration $x \in A^M$ admet une image $F^j(x)$ 0-semifinie, avec $j \in \mathbb{N}$, alors F est 0-nilpotent.*

Preuve. Si F est mortel vis-à-vis du fermé σ -invariant ${}_i[0^\infty)$, alors la proposition 4.2.3 et la remarque 4.2.4 nous donnent une génération $J \in \mathbb{N}$ telle que $F^J(A)$ est incluse dans $\{\infty 0^\infty\}$. \square

Corollaire 4.2.7. *Un ACP faiblement nilpotent sur un sous-décalage transitif est nilpotent.*

Notons qu'il n'est a priori pas évident que cette caractérisation soit vraie sur les facteurs colonnes, mais nous verrons avec la remarque 4.7.13 que la faible nilpotence de la trace est équivalente à la nilpotence limite du système.

Le cas des AC envahissants permet une caractérisation précise, qui nous sera très pratique pour des réductions de problèmes de décidabilité. Remarquons au passage qu'un AC 0-envahissant ne peut être nilpotent que pour l'état 0.

Proposition 4.2.8. *Tout ACP 0-envahissant sur un sous-décalage surjectif est 0-nilpotent si et seulement s'il est globalement 0-mortel.*

Preuve. Cela découle directement de l'application de la proposition 4.2.2 à $U = \{0\}$. \square

Corollaire 4.2.9. *Soit F un ACP sur un sous-décalage surjectif $A \subset A^M$, $0 \in A$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Alors $F_{\wedge 0^k}$ est 0-nilpotent si et seulement si F est globalement 0^k -mortel.*

Preuve.

- Si $x \in A$ est une configuration et $J \in \mathbb{N}$ une génération telles que $\forall j < J, 0^k \not\sqsubset F^j(x)$ et $0^k \sqsubset F^J(x)$, alors $\forall j < J, 0^k \not\sqsubset F_{\wedge 0^k}^j(x) = F^j(x)$ et $0^k \sqsubset F_{\wedge 0^k}^J(x) = F^J(x)$. En particulier, si F est globalement 0^k -mortel, alors $F_{\wedge 0^k}$ également. La proposition 4.2.8 impose donc la nilpotence.
- Réciproquement, si F admet une configuration x qui n'est pas globalement 0^k -mortelle, alors on voit facilement que pour toute génération $j \in \mathbb{N}$, $F_{\wedge 0^k}^j(x) = F^j(x) \neq \infty 0^\infty$. \square

Prépériodicité. La caractérisation de la mortalité permet encore une caractérisation simple de la prépériodicité des AC, qui généralise le corollaire 4.2.7.

Proposition 4.2.10. *Un ACP faiblement prépériodique sur un sous-décalage transitif est prépériodique.*

Preuve. Un ACP (A, F) est prépériodique si et seulement si A peut se décomposer en l'union $\bigcup_{q \in \mathbb{N}} \bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} F^{-q}(\{x \in A^{\mathbb{M}} \mid F^p(x) = x\})$ des sous-shifts des configurations de prépériode et de période données. Le corollaire 1.6.3 nous montre alors qu'il existe une prépériode $q \in \mathbb{N}$ et une période $p \in \mathbb{N}^*$ uniformes telles que $F^q(A) \subset \{x \in A^{\mathbb{M}} \mid F^p(x) = x\}$. \square

Il est évident que si la prépériode est uniformément nulle, la caractérisation passe aux AC périodiques.

Corollaire 4.2.11. *Un ACP faiblement périodique sur un sous-décalage transitif est périodique.*

Nilpotence sur les périodiques. Plutôt que de se restreindre aux systèmes dont toutes les configurations sont nilpotentes, on peut s'intéresser aux dynamiques dans lesquelles toutes les orbites d'un ensemble dense particulier rejoignent ultimement la même configuration. Un exemple, dans l'espace des configurations, est celui des AC qui sont *nilpotents sur les configurations périodiques*, i.e. il existe un état 0 telles que toutes les configurations périodiques sont ${}^{\infty}0^{\infty}$ -nilpotentes.

Cette définition n'est pas triviale : des exemples d'AC non nilpotents mais nilpotents sur les périodiques peuvent être construits à partir de pavages apériodiques, comme dans [104]. En fait, il en existe moult, comme remarqué dans [30] par des arguments décidabilistes.

On a un équivalent, plus simple, à la proposition 4.2.8 pour le cas de la nilpotence sur les périodiques.

Proposition 4.2.12. *Dans un ACP 0-envahissant, les configurations périodiques 0-nilpotentes sont les configurations périodiques globalement 0-mortelles.*

Preuve. Soit F un ACP 0-envahissant d'ancre $m \in \mathbb{M}$ et de diamètre $d > 1$, x une configuration périodique de période $p \in \mathbb{N}^*$, $J \in \mathbb{N}$ une génération et $i \in \mathbb{M}$ une cellule tels que $F^J(x)_i = 0$. On peut facilement voir par récurrence que pour tout $j \geq J$, $F^j(x)_{\llbracket i-jm, i+jd-jm \rrbracket} = 0^{jd}$. On obtient par périodicité $F^{\lceil \frac{p}{d} \rceil}(x) = {}^{\infty}0^{\infty}$. La réciproque est immédiate. \square

Corollaire 4.2.13. *Un ACP 0-envahissant est nilpotent sur les périodiques si et seulement si toutes ses configurations périodiques sont globalement 0-mortelles.*

Ce type d'AC sera utile dans le chapitre 6.

Dynamiques simples et simulation. Nous avons déjà vu que la périodicité et la prépériodicité sont préservées par simulation. Une simulation cellulaire étant en particulier une simulation du décalage, on en déduit qu'elle préserve les configurations périodiques. Il résulte que, tout comme la nilpotence, la *nilpotence sur les périodiques* est préservée par *simulation cellulaire*. Bien sûr tous les AC n'ont pas ces propriétés ; il n'y a donc pas d'intrinsèquement universel nilpotent (resp. prépériodique, nilpotent sur les périodiques).

D'autre part, le fait que la nilpotence implique toujours une configuration uniforme donne également une stabilité des *nilpotences* vis-à-vis de la composition par un *décalage* – contrairement à la prépériodicité.

Dynamiques simples et traces. Par les remarques du chapitre 1, il est évident qu'un SS est nilpotent si et seulement si tous ses FCC le sont avec même prépériode. Pour un ACP F , comme ils partagent tous la même projection de largeur 1, la caractérisation se simplifie : F est *nilpotent* si et seulement si τ_F l'est.

On peut également caractériser la prépériodicité par les traces, puisque les facteurs doivent eux aussi être prépériodiques, et réciproquement, si toutes les cellules ont des tracés prépériodiques de même période et prépériode, alors la configuration entière sera prépériodique.

Fait 4.2.14. *Un ACP F est prépériodique si et seulement si chacun (ou un) de ses FCC $\tau_F^{\langle k \rangle}$, avec $k \in \mathbb{N}^*$, est fini.*

On peut donc déduire un comportement global du comportement local, quand il s'agit d'une propriété simple – qui fait intervenir une équation temporelle sur l'état de chaque cellule.

4.3 Transitivité, récurrence

Transitivités et mélanges. Il est prouvé dans [105] que les AC transitifs sont sensibles – sauf dans le cas d’un alphabet dégénéré à une lettre. Cela peut se généraliser par l’énoncé suivant.

Proposition 4.3.1 ([63]). *Tout ACP transitif est sensible ou réduit à une unique orbite périodique.*

De plus, puisque l’AC peut accomplir des actions en parallèle, la transitivité est équivalente au mélange faible.

Proposition 4.3.2 ([98]). *Tout ACP transitif sur un sous-décalage faiblement mélangeant est faiblement mélangeant.*

Preuve. Soit F un ACP sur un sous-décalage Λ faiblement mélangeant et U_0, U_1, V_0, V_1 quatre ouverts de Λ . Puisque celui-ci est faiblement mélangeant, il existe une translation $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sigma^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$, pour $i \in \mathbb{2}$. Comme il s’agit d’ouverts, par transitivité il existe une génération $l \in \mathbb{N}^*$ telle que $F^l(\sigma^k(U_0) \cap V_0) \cap \sigma^k(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$. En particulier, on obtient bien $F^l(V_0) \cap V_1 \neq \emptyset$ et après commutation avec le décalage $F^l(U_0) \cap U_1 \neq \emptyset$. \square

On ne sait en revanche pas, à notre connaissance, si la transitivité des AC est équivalente au mélange.

Question 4.3.3 (Dennunzio). Existe-t-il un AC *transitif* qui ne soit pas *mélangeant* ?

Récurrence. Le théorème suivant est l’analogue du théorème de récurrence de Poincaré sur les systèmes mesurés, dans lequel la propriété de propriété de la mesure serait remplacée par la condition d’équilibre du théorème 4.1.1.

Théorème 4.3.4 ([106]). *Un AC est surjectif si et seulement si l’ensemble de ses configurations récurrentes est dense.*

En particulier, toutes les configurations sont alors autotransitives : la proposition 1.6.10 permet de retrouver le résultat suivant, prouvé par la théorie ergodique dans [67].

Corollaire 4.3.5. *Un AC est surjectif si et seulement s’il est autotransitif.*

Dans les cas de la quasi-équicontinuité (cf [107]) et de la fermeture (cf [108]), les AC surjectifs ont même un ensemble dense de points périodiques. On ne sait pas si cela peut être généralisé à tous les AC surjectifs.

Conjecture 4.3.6 (Blanchard). Un AC est *surjectif* si et seulement s’il est *régulier*.

Cela impliquerait en particulier, grâce à la proposition 4.3.1, l’équivalence pour les AC – exception faite du cas dégénéré d’un alphabet à une lettre – entre transitivité et **chaos de Devaney** (transitivité, régularité, sensibilité).

Transitivités et simulation. Nous avons vu dans la section 4.3 que toutes les variantes des transitivités étaient préservées par simulation directe complète, et que le mélange était même préservé par simulation complète.

D’après [109], le *mélange faible* implique la *transitivité* des itérés. Étant équivalent, pour les AC, à la *transitivité* par la proposition 4.3.2, il résulte qu’ils sont tous deux préservés par itération, donc par *simulation complète*.

Ces propriétés ne sont pas préservées par composition avec le décalage, qui est lui-même mélangeant – alors que l’identité ne l’est pas. La question de la stabilité par décalage de la transitivité forte des AC reste, à notre connaissance, ouverte.

Transitivités et traces. Inversement, grâce au fait 1.6.13, on voit qu'un SS est transitif ou mélangeant si et seulement si tous ses facteurs colonnes le sont aussi. On peut maintenant se demander s'il est possible, dans le cas des AC, d'obtenir une caractérisation en se limitant à un tracé particulier.

Question 4.3.7. Existe-t-il un AC non *transitif* qui ait un *facteur diamétral transitif* ?

On peut facilement trouver des contre-exemples si l'on restreint notre question au tracé de largeur 1 : on construira dans l'exemple 5.3.4 un AC dont le tracé est un décalage complet, mais qui peut simuler un AC arbitraire.

4.4 Chaînes

Sur un espace symbolique, on peut se servir du fait que les boules sont les cylindres centraux pour voir les chaînes à partir d'une approximation des FCC. Soit $(\Lambda \subset A^{\mathbb{N}}, F)$ un SS et $l \in \mathbb{N}$ un rayon. On définit le **système des 2^{-l} -chaînes** de F par :

$$\mathcal{A}_l(\Lambda, F) = (\mathcal{A}_l^F, \mathcal{A}_l F)$$

$$\text{où } \begin{cases} \mathcal{A}_l^F = \left\{ (x^j)_{j \in \mathbb{N}} \in \Lambda^{\mathbb{N}} \mid \forall j \in \mathbb{N}, F(x^j)_{\langle l \rangle} = x_{\langle l \rangle}^{j+1} \right\} \\ \mathcal{A}_l F : (x^j)_{j \in \mathbb{N}} \mapsto (x^{j+1})_{j \in \mathbb{N}} . \end{cases}$$

Ses éléments sont bien les chaînes infinies telles que définies dans la section 1.7 et évoluent selon un produit infini de sous-décalages.

De manière équivalente, les chaînes sont les séquences $x = (x^j)_{j \in \mathbb{N}} \in \Lambda^{\mathbb{N}}$ dont le projeté $\pi_{\langle l \rangle}(x) = (x_{\langle l \rangle}^j)_{j \in \mathbb{N}}$ de rayon l est dans l'approximation $\mathcal{A}_2(\tau_F^{\langle l \rangle})$ du tracé de rayon l . En particulier, l'espace des chaînes vérifie : $\pi_{\langle l \rangle}(\mathcal{A}_l^F) = \mathcal{A}_2(\tau_F^{\langle l \rangle})$.

Remarque 4.4.1. En tant que sous-système d'un produit de sous-décalages, le *système des chaînes* admet une *base* de SUF simple : il suffit de prendre les projetés par $\pi_{\langle k \rangle}$, avec $k \in \mathbb{N}^*$, puisque le FCC $\left\{ (x_{\langle k \rangle}^j)_{\substack{i \in \langle k \rangle \\ 0 \leq j < k}} \mid x \in \mathcal{A}_l F(\Lambda) \right\}$ n'est autre que la k -mémorisation du projeté $\pi_{\langle k \rangle}(\mathcal{A}_l F(\Lambda))$, qui lui est conjuguée.

Chaîne-transitivité. Notons déjà qu'un SS $(\Lambda \subset A^{\mathbb{N}}, F)$ est chaîne-transitif si et seulement si tous cylindres $[u], [v]$, avec $u, v \in A^l$ et $l \in \mathbb{N}$, sont reliés par une 2^{-l} -chaîne.

Proposition 4.4.2. *Si (X, F) est un SS et $(\mathcal{P}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une base de partitions en ouverts, alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. F est chaîne-transitif.
2. Tous les tracés $\tau_F^{\mathcal{P}_i}$, $i \in \mathbb{N}$, sont chaîne-transitifs.
3. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'approximation $\mathcal{A}_2(\tau_F^{\mathcal{P}_i})$ est transitive.
4. Pour tout $l \in \mathbb{N}$, le système $\mathcal{A}_l F$ des chaînes est transitif.

Preuve .

1 \Rightarrow 2: Si un SS est chaîne-transitif, alors tous ses facteurs le sont également (cf fait 1.7.5).

2 \Rightarrow 3: Cela découle directement du fait 2.6.20.

3 \Rightarrow 4: Si $\mathcal{A}_2(\tau_F^{\mathcal{P}_i})$ est transitive, avec \mathcal{P}_i une partition de diamètre inférieur à 2^{-l} , alors $\mathcal{A}_2(\tau_F^{\langle l \rangle}) = \pi_{\langle l \rangle}(\mathcal{A}_l^F)$, qui en est un facteur, l'est également. Il est facile de voir que toutes les projections $\pi_{\langle k \rangle}(\mathcal{A}_l^F)$, avec $k \geq l$, le sont aussi. D'après la remarque 4.4.1, $\mathcal{A}_l F$ est transitif en tant qu'extension limite de sous-décalages transitifs.

4 \Rightarrow 1: La transitivité de $\mathcal{A}_l F$ passe à son SUF $\pi_{\langle l \rangle}(\mathcal{A}_l^F)$, qui implique alors la chaîne-transitivité du tracé $\tau_F^{\langle l \rangle}$. On obtient donc le résultat en passant à l'extension limite (cf fait 1.7.5). \square

En particulier, si le SS est sofique, ses SUF vérifient les caractérisations données dans le fait 2.6.21.

Pistage. Dans l'espace $A^{\mathbb{M}}$, une chaîne infinie (resp. finie) x est 2^{-k} -pistée si sa projection $\pi_{\langle k \rangle}(x)$ est dans le tracé $\tau_F^{\langle k \rangle}$ (resp. dans son langage), pour tout $k \in \mathbb{N}$.

En voyant les chaînes comme des séquences dont le projeté est dans la 2-approximation d'un tracé, on obtient une caractérisation symbolique de la propriété de pistage.

Fait 4.4.3. Soit (A, F) un SS et $k, l \in \mathbb{N}$. Alors toute 2^{-l} -chaîne est 2^{-k} -pistée si et seulement si $\tau_F^{\langle k \rangle} = \pi_{\langle k \rangle}(\mathcal{A}_2(\tau_F^{\langle l \rangle}))$.

On en déduit en particulier que si F a la propriété de *pistage*, chaque FCC est alors la projection d'un sous-décalage *markovien*, donc F est *sofique*, comme prouvé dans [43]. Partiellement réciproquement, on peut montrer que les systèmes de *type fini* ont la propriété de *pistage*.

Proposition 4.4.4. Si $k \in \mathbb{N}^*$ et (A, F) est un SS dont la trace $T_F^{\langle k \rangle}$ est décomposable via un sous-décalage markovien, alors il a la propriété de 2^{-k} -pistage.

Preuve. Par le fait 4.4.3, on se ramène à montrer l'existence d'un $l \in \mathbb{N}$ tel que $\tau_F^{\langle k \rangle} = \pi_{\langle k \rangle}(\mathcal{A}_2(\tau_F^{\langle l \rangle}))$. Supposons qu'on a une décomposition $T_F^{\langle k \rangle} = \Psi\Phi$ en deux factorisations Φ et Ψ de F dans Σ et de Σ dans $\tau_F^{\langle k \rangle}$, où Σ est un sous-décalage markovien. Les FCC représentant une base lettre à lettre de SUF, on a une décomposition $\Phi = \Psi'T_F^{\langle l \rangle}$, avec $l \in \mathbb{N}$ et Ψ' une factorisation lettre à lettre de $\tau_F^{\langle l \rangle}$ dans Σ . On remarque que $\Psi\Psi'T_F^{\langle l \rangle} = T_F^{\langle k \rangle}$, donc (puisqu'il s'agit de fonctions surjectives) $\Psi\Psi' = \pi_{\langle k \rangle}$ est la projection centrale de $\tau_F^{\langle l \rangle}$ dans $\tau_F^{\langle k \rangle}$.

Par le corollaire 2.5.13, Ψ' peut se prolonger à $\mathcal{A}_2(\tau_F^{\langle l \rangle})$ en gardant la même image $\Psi'(\mathcal{A}_2(\tau_F^{\langle l \rangle})) = \Sigma$. En composant par Ψ , on obtient $\pi_{\langle k \rangle}(\mathcal{A}_2(\tau_F^{\langle l \rangle})) = \tau_F^{\langle k \rangle}$. \square

En appliquant la propriété précédente à tout rayon $k \in \mathbb{N}$, on obtient le résultat suivant.

Corollaire 4.4.5. Tout SS de type fini a la propriété de pistage.

On généralise ainsi le résultat de [43] sur les AC dont tous les FCC sont des STF. Nous avons vu avec la proposition 2.6.19 que la propriété de pistage caractérisait les STF, en tant que sous-décalages. On pourrait espérer généraliser cette caractérisation.

Conjecture 4.4.6. Un SS $(A^{\mathbb{M}}, F)$ a la propriété de *pistage* si et seulement s'il est de *type fini*.

Dans le cadre des AC, on peut borner le rayon de pistage à tester pour vérifier la propriété de pistage : il suffit, là encore, de considérer le facteur diamétral.

Proposition 4.4.7. Un ACP de rayon r a la propriété de pistage si et seulement s'il a la propriété de 2^r -pistage.

Preuve. Soit F un ACP de rayon r sur $A \subset A^{\mathbb{M}}$ et $k, l \in \mathbb{N}$ tels que $\pi_{\langle r \rangle}(\mathcal{A}_2(\tau_F^{\langle l \rangle})) = \tau_F^{\langle r \rangle}$. Remarquons tout d'abord que, puisque F est invariant par décalage, pour tout décalage $i \in \mathbb{M}$, on a $\pi_{\langle r \rangle+i}(\mathcal{A}_2(\tau_F^{\langle l \rangle+i})) = \tau_F^{\langle r \rangle+i}$ (décalage horizontal des indices des mots finis).

Soit $i \in \langle k \rangle$. Puisque la projection d'une approximation est incluse dans l'approximation de la projection, on voit que $\pi_{\langle l \rangle+i}(\mathcal{A}_2(\tau_F^{\langle l+k \rangle})) \subset \mathcal{A}_2(\tau_F^{\langle l \rangle+i})$. En reprojétant, on obtient que $\pi_{\langle r \rangle+i}(\mathcal{A}_2(\tau_F^{\langle l+k \rangle}))$ est inclus dans $\pi_{\langle r \rangle+i}(\mathcal{A}_2(\tau_F^{\langle l \rangle+i}))$. Notre première remarque nous donne donc $\pi_{\langle r \rangle+i}(\mathcal{A}_2(\tau_F^{\langle l+k \rangle})) \subset \tau_F^{\langle r \rangle+i}$. Autrement dit, tous les projetés par $\pi_{\langle r \rangle+i}$, avec $i \in \langle k \rangle$, de $\pi_{\langle r+k \rangle}(\mathcal{A}_2(\tau_F^{\langle l+k \rangle}))$ sont inclus dans $\tau_F^{\langle r \rangle+i}$. Leur chevauchement $\pi_{\langle r+k \rangle}(\mathcal{A}_2(\tau_F^{\langle l+k \rangle}))$ est donc inclus dans le chevauchement $\tau_F^{\langle r+k \rangle}$, puisque le facteur diamétral est autochevauchant (cf proposition 3.5.6). \square

Chaînes et simulation. Nous avons déjà vu que la chaîne-transitivité était préservée par simulation directe complète. Dans le cas des automates cellulaires, on peut même ajouter la stabilité par simulation, de façon similaire à la proposition 4.3.2.

Proposition 4.4.8. *Tout SS simulé complètement par un ACP chaîne-transitif sur un sous-décalage faiblement mélangeant est chaîne-transitif.*

Preuve. Soit F un ACP chaîne-transitif sur un sous-décalage Λ faiblement mélangeant. Par le fait 1.7.5, il suffit de prouver que tout itéré F^n est chaîne-transitif, pour $n \in \mathbb{N}^*$. Soient deux cylindres de rayon $l \in \mathbb{N}$ de Λ . Celui-ci étant faiblement mélangeant, on peut trouver deux suites $(k_i)_{0 \leq i < n}$ d'entiers telles que les intersections $\bigcap_{0 \leq i < n} \sigma^{-k_i} F^i(U)$ et $\bigcap_{0 \leq i < n} \sigma^{-k_i} F^i(V)$ soient non vides. Par hypothèse, il existe une $2^{-\max_{0 \leq i < n} k_i - l}$ -chaîne $(x^j)_{0 \leq j < J} \in \Lambda^J$ de longueur $J \in \mathbb{N}$ qui relie ces deux ouverts. On peut supposer que $J \geq n$, quitte à réappliquer la chaîne-transitivité n fois. Si $i = J \bmod n$, la sous-chaîne $(\sigma^{k_i}(x^j))_{J \bmod n \leq j < J}$ est alors une 2^{-l} -chaîne reliant U à V , qui est de longueur multiple de n . \square

En ce qui concerne la stabilité de la propriété de pistage par simulation cellulaire, même dans le cas restreint des AC, nous ne savons pas si l'on peut relâcher les contraintes d'exactitude et de complétude.

4.5 Équicontinuité

Mots bloquants. La notion topologique d'équicontinuité peut, dans un espace unidimensionnel, s'exprimer symboliquement en termes de mots bloquants, qui empêchent l'information de circuler.

Un mot $w \in A^*$ est (i, k) -**bloquant** (ou simplement k -**bloquant**) pour le SS (A, F) si $\forall x, y \in [w]_{-i}, \forall j \in \mathbb{N}, F^j(x)_{[0, k]} = F^j(y)_{[0, k]}$. Sauf dans les SS triviaux, on aura $i + k \leq |w|$.

Remarque 4.5.1.

- Un mot est k -bloquant dès que l'un de ses sous-mots l'est.
- Un mot k -bloquant est i -bloquant pour tout $i \leq k$.

Fait 4.5.2. *Soit (A, F) un SS, et $k \in \mathbb{N}$. Alors une configuration $x \in \Lambda$ est 2^{-k} -stable si et seulement si $x_{(l)}$ est k -bloquant, avec $l \in \mathbb{N}$.*

Corollaire 4.5.3.

- Un SS est 2^{-k} -sensible si et seulement s'il n'admet aucun mot k -bloquant.
- Une configuration est équicontinue si et seulement si elle admet des sous-mots centraux k -bloquants, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Les mots bloquants prennent tout leur intérêt dans les AC, puisqu'il suffit alors d'une largeur particulière de mots bloquants pour être sûrs de bloquer toutes les largeurs.

Si (A, F) est un ACP de rayon r , w un mot (i, r) -bloquant et $x \in [w]_{-i}$, alors pour toute configuration $y \in \Lambda$ telle que $y_{[-i, \infty]} = x_{[-i, \infty]}$ (resp. $y_{[-\infty, |w|-i]} = x_{[-\infty, |w|-i]}$) et toute génération $j \in \mathbb{N}$, on a $F^j(y)_{[0, \infty]} = F^j(x)_{[0, \infty]}$ (resp. $F^j(y)_{[-\infty, r]} = F^j(x)_{[-\infty, r]}$). En d'autres termes, l'information ne peut plus traverser des cellules qui ont connu un mot r -bloquant.

Par exemple, dans l'AC Min (cf exemple 3.1.3), le mot 0 est $(0, 1)$ -bloquant, puisque $\forall x \in [0], \forall j \in \mathbb{N}, F^j(x)_0 = 0$; comme son rayon est 1, un diagramme espace-temps qui contient un 0 peut être séparé en deux parties évoluant indépendamment. Plus généralement, tout mot stagnant est bloquant pour sa longueur.

Fait 4.5.4. *Si $(A \subset A^M, F)$ est un ACP de rayon $r \in \mathbb{N}$, $i, j \in \mathbb{M}$, $k, l \geq r$, et u, v deux mots (i, k) -bloquant et (j, l) -bloquant tels que la concaténation uv est dans le langage $\mathcal{L}(A)$, alors celle-ci est $(i, |u| - i + j + l)$ -bloquante.*

Proposition 4.5.5 ([43]). *Soit (A, F) un AC unidimensionnel de rayon r . Alors, F est équicontinu si et seulement s'il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que tous les mots de A^k sont r -bloquants.*

Une autre conséquence du fait 4.5.4, conjugué à la Remarque 4.5.1, est que l'on peut insérer n'importe quel mot entre les deux mots concaténés et obtenir ainsi des mots bloquants de largeur arbitrairement grande, et ce dans n'importe quel ouvert.

Sensibilité.

Théorème 4.5.6. *Soit (A, F) un ACP unidimensionnel de rayon r sur un sous-décalage unidimensionnel transitif. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. F est presque équicontinu.
2. F n'est pas 2^r -sensible.
3. F admet un mot k -bloquant, avec $k \geq r$.

Preuve .

- Supposons que $u \in A^*$ est un mot (i, k) -bloquant pour F , avec $k \geq r$, et montrons que l'ensemble des configurations équicontinues est un résiduel, dans le cas où $\mathbb{M} = \mathbb{N}$ (le cas $\mathbb{M} = \mathbb{Z}$ se prouve de manière symétrique). Par transitivité de A , l'ouvert $U_l = \bigcup_{j>l} [u]_j$ est dense. Grâce au fait 4.5.4 et au corollaire 4.5.3, les configurations de l'intersection $\bigcap_{l \in \mathbb{N}} U_l$ sont équicontinues.
- Les autres implications directes découlent immédiatement des définitions. \square

Notons que pour simplement construire une configuration équicontinue (sans avoir la densité) à partir d'un mot bloquant u , il suffit que le sous-décalage de définition soit autotransitif, puisque dans ce cas les ouverts U_l peuvent ne pas être denses, mais leur intersection n'est déjà pas vide.

Le théorème précédent permet donc de différencier trois types d'ensemble de configurations équicontinues pour un AC unidimensionnel : plein, résiduel non plein, ou vide. Cette trichotomie est à la base de la classification de Gilman-Kürka des AC unidimensionnels [36, 43].

On peut en revanche, en dimension supérieure, construire des AC qui ne sont ni sensibles, ni presque équicontinues, tels que celui présenté dans [66].

Équicontinuité et simulation. Nous avons déjà vu que l'équicontinuité était préservée par simulation exacte. Dans le cas général, la quasi-équicontinuité et la sensibilité sont préservées par simulation complète exacte. Pour les AC, la quasi-équicontinuité l'est également par factorisation hors-contexte.

Proposition 4.5.7 ([31]). *Tout SS simulé hors-contexte complètement par un ACP quasi-équicontinu est quasi-équicontinu.*

Comme toutes les propriétés topologiques de ce genre, la stabilité des points varie beaucoup lors d'une composition avec un décalage. En fait, en décalant suffisamment, on peut même voir que seuls les AC nilpotents ne sont pas sensibles. Cette propriété présentera tout son intérêt au niveau de la décidabilité de la sensibilité (cf section 6.1).

Proposition 4.5.8 ([79]). *Un AC oblique est soit sensible, soit nilpotent.*

Équicontinuité et traces.

Remarque 4.5.9. La stabilité d'une configuration x d'un SS (A, F) peut s'exprimer en termes de traces : x est 2^{-k} -stable, avec $k \in \mathbb{N}^*$, si et seulement si il existe un rayon $l \in \mathbb{N}$ tel que $T_F^{(k)}([x_{\langle l}])$ est un singleton. De même, F est *équicontinu* si et seulement si pour tout rayon $k \in \mathbb{N}^*$ il en existe un $l \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout mot $u \in A^{\langle l}$, le tracé $T_F^{(k)}([u])$ est un singleton.

Proposition 4.5.10. *Un SS (A, F) est équicontinu si et seulement si tous ses tracés sont finis.*

Preuve.

- Soit F un SS équicontinu et $k \in \mathbb{N}$. Il existe un rayon $l \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $u \in A^{\langle l}$, $T_F^{(k)}([u])$ est un singleton. Par conséquent, $\tau_F^{(k)} = \bigcup_{u \in A^{\langle l}} T_F^{(k)}([u]) \leq |A^{\langle l}|$.
- Réciproquement, si $\tau_F^{(k)}$ est fini, alors il est (p, q) -préperiodique, pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}$ (cf fait 2.6.4). Tout point $x \in A$ est ε -stable, puisque tout point y du voisinage $\bigcap_{j<p+q} F^{-j}(\mathcal{B}_\varepsilon(F^j(x)))$ vérifie $\forall j \in \mathbb{N}, d(F^j(x), F^j(y)) < \varepsilon$. \square

Dans le cas des AC, tous les tracés ont pour projection le tracé de largeur 1. Par conséquent la période et la prépériode sont uniformes sur tous les tracés.

Corollaire 4.5.11. *Tout ACP est équicontinu si et seulement s'il est prépériodique.*

Ainsi, la trace permet une généralisation simple d'un résultat classique pour des ACP sur des sous-shifts particuliers [43, 110].

Un ACP est donc équicontinu si et seulement si le tracé τ_F est fini. La stabilité est tellement forte ici qu'elle se voit dans le tracé de n'importe quel diamètre, et pas uniquement dans le facteur diamétral, comme pour beaucoup de propriétés topologiques.

En ce qui concerne la sensibilité, nous avons vu qu'elle n'était pas transmise aux facteurs topologiques en général. Cependant, on peut voir assez directement qu'elle est transmise aux tracés suffisamment fins.

Proposition 4.5.12. *Soient (Λ, F) un SS ε -sensible et \mathcal{P} une partition de diamètre inférieur ou égal à ε . Alors $\tau_F^{\mathcal{P}}$ est un sous-décalage sensible.*

Preuve. Soit $x \in \Lambda$ et $\delta > 0$. Par continuité, il existe $\delta' > 0$ tel que pour toute configuration $y \in \mathcal{B}_{\delta'}(x)$, on a $d(T_F^{\mathcal{P}}(x), T_F^{\mathcal{P}}(y)) < \delta$. La sensibilité de F nous donne une configuration $y \in \mathcal{B}_{\delta'}(x)$ et une génération $j \in \mathbb{N}$ telles que $d(F^j(x), F^j(y)) > \varepsilon$. Puisque \mathcal{P} a un diamètre plus petit, on obtient $T_F^{\mathcal{P}}(x)_j \neq T_F^{\mathcal{P}}(y)_j$, i.e. $d(\sigma^j T_F^{\mathcal{P}}(x), \sigma^j T_F^{\mathcal{P}}(y)) = 1$, avec $d(T_F^{\mathcal{P}}(x), T_F^{\mathcal{P}}(y)) < \delta$. \square

Remarque 4.5.13.

- Si $(A^{\mathbb{M}}, F)$ est un SS tel que le tracé τ_F est dénombrable, alors tous les FCC le sont également. Ils sont donc quasi-équicontinus et, par le fait 1.8.7, F également.
- Inversement, le théorème 2.6.40 nous montre que tous les tracés d'un SS soifique sensible sont universels.

Équicontinuité et bijectivité. Nous savons qu'un sous-décalage unilatère surjectif est fini si et seulement si le sous-décalage bilatère correspondant l'est également. Plus exactement, ils sont dans ce cas tous deux périodiques. La proposition 4.5.10 nous donne donc que pour un SS bijectif équicontinu, tous les bitracés sont finis. On obtient alors l'équivalence entre l'équicontinuité et une forme «bidirectionnelle» d'équicontinuité, prouvée dans [111] sur les AC.

Corollaire 4.5.14. *Un SS bijectif (Λ, F) est équicontinu dès que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $l \in \mathbb{N}$ tel que le bitracé $T_F^{*(k)}(x_{(l)})$ de toute configuration $x \in \Lambda$ est un singleton.*

En particulier, le SS inverse F^{-1} est aussi équicontinu.

Corollaire 4.5.15. *Tout SS bijectif est équicontinu (resp. quasi-équicontinu, presque équicontinu) si et seulement si son inverse l'est.*

4.6 Expansivités

Nous avons déjà vu dans la proposition 2.6.12 que les sous-décalages étaient des systèmes expansifs ou positivement expansifs; en fait ce sont essentiellement les seuls sur un espace totalement discontinu.

Théorème 4.6.1. *Un SDD est essentiellement un sous-décalage bilatère (resp. unilatère) si et seulement si c'est un SS expansif (resp. positivement).*

Preuve. Soit (X, F) un SDD totalement discontinu et expansif (resp. positivement) i.e. il existe une constante $\varepsilon > 0$ telle que pour tous points x, y , il existe une génération $j \in \mathbb{M}$ pour laquelle $d(F^j(x), F^j(y)) \geq \varepsilon$. Puisque X est compact, il est recouvert par un nombre fini de boules ouvertes de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$; puisqu'il est métrique et totalement discontinu, par le théorème 1.12.4, ces boules sont des

unions finies d'ouverts. Soit \mathcal{P} la partition en ouverts de diamètre inférieur à $\frac{\varepsilon}{2}$ correspondante. Alors $T_F^{\mathcal{P}}$ est bijective puisque pour tous points distincts $x, y \in X$, il y a une génération $j \in \mathbb{N}$ telle que $d(F^j(x), F^j(y)) > \varepsilon$, et en particulier $\mathcal{P}(F^j(x)) \neq \mathcal{P}(F^j(y))$. Donc $T_F^{\mathcal{P}}$ est une conjugaison de (X, F) dans $(\tau_F^{\mathcal{P}}, \sigma)$. \square

Ainsi, toute différence entre les cellules de mêmes indices de deux configurations initiales se verra tôt ou tard dans un tracé central : le SS F est conjugué à $(\tau_F^{(k)}, \sigma)$, pour $k \geq 2^{-\varepsilon}$.

On dira d'un ACP unidimensionnel (resp. et bijectif) (A, F) qu'il est **expansif** (resp. **positivement à droite**) de **largeur** $k \in \mathbb{N}^*$, si pour toutes configurations *asymptotiques à gauche* $x, y \in A$, il existe une génération $j \in \mathbb{N}$ (resp. $j \in \mathbb{Z}$) telle que $F^j(x)_{\llbracket 0, k \rrbracket} \neq F^j(y)_{\llbracket 0, k \rrbracket}$. Si le sous-décalage est unilatère, cela coïncide exactement avec l'expansivité (resp. positive). On définit de manière symétrique l'**expansivité à gauche** et l'**expansivité positive à gauche**, qui ne font sens que dans le cas où $\mathbb{M} = \mathbb{Z}$. On dira aussi qu'un ACP est expansif (resp. positivement) de **largeur** k si et seulement s'il l'est à droite et à gauche ; cela coïncide avec les notions d'expansivités vues pour les SDD.

Proposition 4.6.2. *Tout ACP d'ancre $m \in \mathbb{N}$ et d'anticipation $m' \in \mathbb{N}$ sur un STF surjectif d'ordre m' (resp. m), et qui est expansif ou positivement expansif à droite (resp. à gauche) l'est avec une largeur m' (resp. m).*

Preuve. Soit (A, F) un tel ACP et supposons qu'il admette deux configurations $x, y \in A$ et une cellule $i \in \mathbb{N}$ telle que $x_i \neq y_i$ mais $T_F^{m'}(x) = T_F^{m'}(y)$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Puisque A est un m' -STF surjectif, il existe deux configurations $x^k \in \sigma^{-k}(x)$ et $y^k \in \sigma^{-k}(y)$ telles que pour toutes cellules $i < m'$, $x_i^k = y_i^k$. Ces deux configurations sont distinctes mais leurs tracés $T_F^{k+m'}\sigma^{-k}(x) = T_F^{k+m'}\sigma^{-k}(y)$ sont égaux par la proposition 3.5.3 ; l'ACP n'est donc pas positivement expansif à droite. Le côté gauche se prouve bien sûr par symétrie. Quant à l'expansivité, on peut effectuer le même raisonnement avec les bitraces $T_F^{*m'}$. \square

En joignant les côtés droit et gauche, on peut borner la largeur de l'expansivité positive des AC ; la trace T_F^r qui a pour largeur le rayon est alors bijective.

Corollaire 4.6.3. *Tout ACP expansif (resp. positivement) de rayon r sur un r -STF est conjugué au bitracé τ_F^{*r} (resp. à son facteur canonique τ_F^r).*

Ouverture.

Proposition 4.6.4. *Tout ACP bilatère positivement expansif à gauche (resp. à droite) est fermant à droite (resp. à gauche).*

Preuve. Soit (A, F) un ACP positivement expansif à gauche de largeur $k \in \mathbb{N}$ et $x, y \in A$ deux configurations asymptotiques à droite. Il existe alors une cellule $i \in \mathbb{M}$ telle que $x_{\llbracket i, \infty \rrbracket} = y_{\llbracket i, \infty \rrbracket}$. Par hypothèse, $T_F^k\sigma^i(x) \neq T_F^k\sigma^i(y)$. Puisque $\sigma^i(x)_{\llbracket 0, k \rrbracket} = \sigma^i(y)_{\llbracket 0, k \rrbracket}$, on a $F\sigma^i(x) \neq F\sigma^i(y)$. Le côté droit est symétrique. \square

La proposition précédente est fautive pour le cas unilatère, où par exemple le décalage complet est positivement expansif mais pas fermant.

Une conséquence est que les AC bilatères *positivement expansifs* sont *ouverts*, par le théorème 4.1.5, et sont donc conjugués à un STF unilatère par le théorème 2.5.5.

En particulier, les AC *positivement expansifs* sont des systèmes de *type fini*. En revanche, la caractérisation des STF en tant qu'uniques sous-décalages ouverts ne se généralise pas au cas des sous-décalages bilatères ; on ne peut donc rien dire directement des AC expansifs. Nasu a néanmoins prouvé dans [112] que les AC *expansifs unilatères* sont conjugués à un STF.

Permutivité. Une condition suffisante simple pour l'expansivité positive est la bipermutivité. Cette propriété, étudiée dans [8], est définie directement sur la règle locale et impose un grand mouvement de l'information dans les configurations.

Définition 4.6.5 (AC permutif).

- Un ACP est **fortement permutif à droite** (resp. **à gauche**) s'il est *permutif* à droite et *pas unidirectionnel* à gauche (resp. à droite).
- Un ACP est **fortement bipermutif** s'il est *fortement permutif* à gauche et à droite.

On peut remarquer que les permutivités (resp. fortes) à gauche et à droite sont préservées par composition d'automates cellulaires.

Fait 4.6.6. Les AC fortement permutifs à droite (resp. à gauche) sont positivement expansifs à droite (resp. à gauche).

La combinaison des deux nous donne, comme prouvé dans [8], que les AC *fortement bipermutifs* sont *positivement expansifs*.

En considérant un AC unilatère injectif, on peut voir que l'information de l'état de sa première cellule doit être conservée quelque part. Or, seule elle-même se voit dans son voisinage ; la règle a donc effectué une permutation sur l'état de la cellule.

Proposition 4.6.7 ([60]). *Tout ACP unidirectionnel à droite et injectif est permutif à gauche.*

Retournement. Le **retourné unilatère à droite** d'un ACP F est un ACP F^* défini sur le sous-décalage τ_F^r , où $r \in \mathbb{N}^*$, et tel que $F^*T_F^r = T_F^r\sigma$. On peut aussi définir, si F est bilatère, le **retourné unilatère à droite**, tel que $F^*T_F^r = T_F^r\sigma^{-1}$, ainsi que, si F est bijectif, les **retournés bilatères à droite** et **à gauche** définis sur τ_F^{*r} par les relations de commutation équivalentes. Cette notion correspond à voir une rotation d'un quart de tour dans le diagramme espace-temps comme un nouveau diagramme espace-temps. On peut donc reconstruire tout le diagramme à partir du tracé de largeur r ; ce n'est bien évidemment pas possible pour tous les AC. Ces conditions sont en fait équivalentes aux expansivités.

Proposition 4.6.8. *Un ACP F admet un retourné bilatère (resp. unilatère) à droite F^* sur τ_F^r si et seulement s'il est expansif (resp. positivement) à droite de largeur r ; de même pour le côté gauche.*

Preuve .

- Soit (A, F) un ACP positivement expansif à droite de largeur r ; en particulier l'ensemble $\{(x, y) \in A^2 \mid T_F^r(x) = T_F^r(y) \text{ et } x_r \neq y_r\}$ est vide. Il peut se décomposer en l'intersection de fermés suivante :

$$\bigcap_{j \in \mathbb{N}} \{(x, y) \in A^2 \mid T_F^r(x)_{\llbracket 0, j \rrbracket} = T_F^r(y)_{\llbracket 0, j \rrbracket} \text{ et } x_r \neq y_r\} = \emptyset .$$

Par compacité, on obtient une génération $J \in \mathbb{N}$ pour laquelle toutes configurations $x, y \in A$ telles que $T_F^r(x)_{\llbracket 0, J \rrbracket} = T_F^r(y)_{\llbracket 0, J \rrbracket}$ ont une même cellule $x_r = y_r$. On peut donc définir sans ambiguïté l'ACP sur le sous-décalage τ_F^r de diamètre J et de règle locale : $f^* : u \mapsto x_{\llbracket 1, r \rrbracket}$ où x est n'importe quelle configuration telle que $T_F^r(x)_{\llbracket 0, J \rrbracket} = u$.

Les trois autres cas se font de manière symétrique.

- Réciproquement, si (A, F) et (τ_F^r, F^*) sont deux ACP tels que $F^*T_F^r = T_F^r\sigma$, avec $r \in \mathbb{N}^*$ et si $x, y \in A$ sont deux configurations distinctes en une cellule $i \in \mathbb{N}$, $x_i \neq y_i$, alors $T_F^{\llbracket i, i+r \rrbracket}(x) = F^{*i}T_F^r(x)$ et $T_F^{\llbracket i, i+r \rrbracket}(y) = F^{*i}T_F^r(y)$ diffèrent, donc évidemment $T_F^r(x)$ et $T_F^r(y)$ diffèrent aussi. \square

Remarque 4.6.9.

- Tout *retourné* à droite (unilatère ou bilatère) d'un ACP unilatère (A, F) de rayon r est *positivement expansif* de largeur 1. Son *tracé* est le mémorisé $\Xi_r(A)$ et son *retourné* à droite est F_{Ξ_r} .

- Les *retournés* à gauche et à droite (unilatères ou bilatères) d'un même ACP bilatère F de rayon r sont *bijectifs*, *inverses* l'un de l'autre et *expansifs* de largeur 1. Le bitracé du retourné à droite est $\Xi_r(\Lambda)$ et son *retourné* bilatère à droite est F_{Ξ_r} .
- Si F a un rayon r et est *expansif* (resp. *positivement*) à gauche ou à droite, alors pour tout $k \geq r$, τ_F^{*k} est conjugué à $\tau_{F^*}^{*r}$ (resp. τ_F^k est conjugué à τ_F^r), en tant que conjugué au *mémorisé vertical* de son *retourné*.

Décalage essentiel. Nous redonnons maintenant une preuve, due à Nasu, de la conjugaison des AC positivement expansifs avec des décalages complets.

Lemme 4.6.10. *Soit $\mathcal{G} = (V, E)$ un graphe réduit à gauche, $(\Sigma_{\mathcal{G}}, F)$ un ACP unilatère permutif à gauche sur son système d'arcs et $\phi : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & V \\ (v, w, a) & \mapsto & v \end{array}$ la fonction de sommet initial d'un arc. Alors pour toutes configurations $(z_i)_{i \in \mathbb{M}}, (z'_i)_{i \in \mathbb{M}} \in \Sigma_{\mathcal{G}}$ telles que $\phi(z_0) = \phi(z'_0)$, on a $\phi(F(z)_0) = \phi(F(z')_0)$.*

Preuve. Soit r le rayon et f la règle locale (étendue) de F , que l'on supposera unilatère. Supposons qu'il existe deux configurations $(z_i)_{i \in \mathbb{N}}, (z'_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \Sigma_{\mathcal{G}}$ telles que $\phi(z_0) = \phi(z'_0)$ et $\phi(F(z)_0) \neq \phi(F(z')_0)$. La permutivité à gauche nous donne une bijection ψ (resp. ψ') entre les arcs arrivant au sommet $\phi(v_0)$ et les arcs arrivant au sommet $\phi(F(z)_0)$ (resp. $\phi(F(z')_0)$) telle que $F(z)_0 = \psi(a)$ (resp. $F(z')_0 = \psi'(a)$). Puisque le graphe est réduit et les sommets $\phi(F(z)_0)$ et $\phi(F(z')_0)$ distincts, on a au moins un arc a_0 tel que $\phi\psi(a_0) \neq \phi\psi'(a_0)$. En itérant r fois ce procédé, on obtient un mot $a_r \dots a_0$ tel que $\phi(f(a_r \dots a_0 z_0)) \neq \phi(f(a_r \dots a_0 z'_0))$, ce qui est absurde pour une règle de rayon r . \square

Lemme 4.6.11. *Soit F un ACP permutif à gauche sur un STF Λ , dont le tracé τ_F est mélangeant. Alors Λ est essentiellement un décalage complet.*

Preuve. Quitte à prendre l'ACP bilatère de même règle, on peut supposer que $\Lambda \subset A^{\mathbb{Z}}$ est un STF bilatère. Par la proposition 2.5.10, il existe alors un graphe \mathcal{G} réduit à gauche et une conjugaison Φ de Λ dans $\Sigma_{\mathcal{G}}$ telle que Φ et Φ^{-1} sont permutives à gauche. La composition $\tilde{F} = \Phi F \Phi^{-1}$ est un ACP sur $\Sigma_{\mathcal{G}}$ qui est encore permutif à gauche et $\tau_{\tilde{F}}$ est encore mélangeant. Nous voyons par le lemme 4.6.10 que la projection $\tilde{T}_{\tilde{F}}(\Lambda) = \{(v_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid (v_i, w_i, a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in T_{\tilde{F}}(\Sigma_{\mathcal{G}})\}$ est un sous-décalage déterministe. Il est également mélangeant, en tant que projection du tracé mélangeant $\tau_{\tilde{F}}$ (cf fait 1.6.12). Par le fait 2.6.11, il est réduit à un singleton; il n'y a donc qu'un seul sommet dans le graphe en question : $\Sigma_{\mathcal{G}}$ est un décalage complet. \square

Théorème 4.6.12 ([60]). *Soit F un ACP bilatère positivement expansif de rayon r sur un sous-décalage mélangeant Λ . Alors τ_F^r est essentiellement un décalage unilatère complet.*

Preuve. Par la proposition 4.6.8, F admet un ACP retourné unilatère à droite F^* sur τ_F^r ; par la remarque 4.6.9, celui-ci est injectif, donc permutif à gauche (cf proposition 4.6.7). De plus, τ_{F^*} (ou $\tau_{F^*}^*$ dans le cas bilatère) est égal à $\Xi_r(\Lambda)$, conjugué à Λ , donc mélangeant. Le tracé $\tau_{F^*}^r$ est donc conjugué à un décalage complet, grâce au lemme 4.6.11. \square

La proposition 4.6.8 et le corollaire 4.6.3 nous donnent les corollaires suivants.

Corollaire 4.6.13.

- Tout ACP bilatère positivement expansif F sur un sous-décalage mélangeant Λ est conjugué à un décalage unilatère complet.
- En particulier, il est mélangeant (cf [45]) et fortement transitif (cf [113]); il est donc surjectif, mais pas injectif – sauf dans le cas trivial à un seul état.
- Pour tout ouvert U , il existe une génération $J \in \mathbb{N}$ telle que $F^J(U) = \Lambda$.
- Il admet un retourné qui est essentiellement un AC.

Les AC *positivement expansifs* sont donc *sensibles* ; on retrouve la classification de Gilman-Kůrka des AC unidimensionnels en quatre classes : les équicontinus, les quasi-équicontinus non équicontinus, les sensibles non positivement expansifs, et les positivement expansifs.

Une généralisation intéressante consisterait à obtenir un résultat équivalent sur les AC expansifs ; on pourra se référer à [112, 114].

Question 4.6.14 (Nasu [60]). Existe-t-il un AC *expansif* qui ne soit pas conjugué à un *décalage bilatère complet* ?

Expansivité et simulation. Nous avons déjà vu que l'expansivité et l'expansivité positive étaient préservées par simulation exacte. Dans le cas d'AC unidimensionnels, on peut même voir que les *expansivités* (resp. *positive*) à droite et à gauche sont préservées par *simulation cellulaire exacte* ; en fait, cette classe de simulation garde bien l'idée de côtés droit et gauche. En revanche, on ne sait pas, à notre connaissance, comment ces propriétés se comportent vis-à-vis de la factorisation.

Question 4.6.15. L'*expansivité* (resp. *positive*) est-elle préservée par *factorisation hors-contexte* ?

Les *expansivités* ne sont pas préservées par *décalage* ; ainsi, le décalage lui-même, décalé de l'identité, est expansif (ou positivement expansif). En revanche, nous avons vu que, en tant que conjugués à des décalages complets, les AC positivement expansifs sont fortement transitifs. Le corollaire 4.6.13 entraîne que tous les décalés d'un AC positivement expansif sont fortement transitifs, ce qui amène la question suivante.

Question 4.6.16. Existe-t-il un AC *fortement transitif* qui ne soit pas le décalé d'un AC *positivement expansif* ?

4.7 Ensembles limites

Attracteurs. Les *attracteurs* des SS peuvent être caractérisés comme les *ensembles limites d'ouverts invariants*, puisque ceux-ci sont alors *rentrants*. Une première remarque sur l'*ensemble limite* d'un ACP (Λ, F) est qu'il s'agit d'un *sous-décalage*, en tant qu'intersection de sous-décalages. De plus, son langage est la limite des langages : $\mathcal{L}(\Omega_F) = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{L}(F^j(\Lambda))$.

Pour les AC, la classification donnée par Hurley dans [35] et revisitée par Kůrka dans [43] partage les AC entre cinq grandes classes :

1. ceux qui admettent un continuum d'*attracteurs disjoints* (tout attracteur contient deux attracteurs disjoints) ;
2. ceux qui admettent un unique *quasi-attracteur*, qui est alors un sous-décalage contenu dans tout attracteur ;
3. ceux qui admettent un *attracteur minimal* strictement inclus dans l'ensemble limite, et qui est un sous-décalage dont le bassin est un ouvert dense ;
4. les *limite-chaîne-transitifs*, dont l'unique attracteur est l'ensemble limite, qui est un sous-décalage, non plein ;
5. les *chaîne-transitifs*, dont l'unique attracteur est l'espace des phases tout entier.

D'autre part, Hurley montre qu'on ne peut pas avoir, dans la structure des attracteurs, de cycles attractifs non triviaux.

Théorème 4.7.1 ([35]). *Tout cycle attractif d'un AC est réduit à une configuration quiescente.*

Pour plus de détails sur cette classification et les liens avec les différentes notions topologiques, ainsi qu'avec la classification symbolique, on se référera à [43]. On peut également mentionner l'intérêt des *attracteurs sous-décalages* d'AC, qui sont caractérisés dans [115] comme les ensembles limites d'ouverts

qui sont envahissants à gauche et à droite par un itéré du système. Outre l'agencement relatif de ces attracteurs sous-décalages, différente de celle des attracteurs en général, cette notion permet une classification intéressante en termes de la complexité du langage de leurs bassins, telle que présentée dans [18].

Nilpotence et périodicité limite. Dans le cas des SS, on peut généraliser la proposition 1.10.7 pour obtenir une condition forte de stabilité via l'ensemble limite.

Proposition 4.7.2. *Un SS limite-périodique est équicontinu.*

Preuve. Soit (A, F) un SS limite-périodique, alors on peut voir par la proposition 1.10.19 que ses tracés le sont aussi, et par le corollaire 2.6.24, qu'ils sont prépériodiques. La proposition 4.5.10 permet alors de conclure que F est équicontinu. \square

Le corollaire 4.5.11 nous donne alors, dans le cas des AC, l'équivalence entre prépériodicité et limite-périodicité.

Corollaire 4.7.3. *Un ACP est équicontinu si et seulement s'il est limite-périodique.*

Avec une période $p = 1$, on retrouve la caractérisation de Čulik, Pachl et Yu.

Corollaire 4.7.4 ([34]). *Tout ACP est nilpotent si et seulement s'il est limite-nilpotent.*

Quand l'AC n'est pas nilpotent, on peut montrer que son ensemble limite contient, au contraire, de nombreuses configurations.

Proposition 4.7.5. *Soit $(A^{\mathbb{M}}, F)$ un AC non 0-nilpotent, avec $0 \in A$ et $\infty 0^\infty \in \Omega_F$. Alors Ω_F contient, pour tout $k \in \mathbb{M}$, une configuration semifinie $z \neq \infty 0^\infty$ telle que $z_i = 0$ pour toute cellule $i < k$.*

Preuve. On peut se ramener au cas d'un AC bilatère. Par le fait 4.2.5, pour toute génération $j \in \mathbb{N}$, $F^j(A^{\mathbb{Z}})$ contient une configuration 0-finie non uniforme $z \in \infty 0[u]0^\infty$, avec $u \in A^+ \setminus 0^+$. En composant avec un décalage, on obtient $F^j(A^{\mathbb{M}}) \cap \infty 0[0^C]_k \neq \emptyset$ et la compacité nous donne $\Omega_F \cap \infty 0[0^C]_k \neq \emptyset$. \square

Corollaire 4.7.6. *L'ensemble limite d'un AC non nilpotent n'admet pas de configuration uniforme isolée.*

Preuve. Soit $(A^{\mathbb{M}}, F)$ un AC non nilpotent, $0 \in A$, $k \in \mathbb{N}$; la proposition 4.7.5 nous donne une configuration non uniforme dans $\mathcal{B}_{2-k}(x) \cap \Omega_F$. \square

On retrouve, par le corollaire précédent, qu'un ensemble limite d'AC est soit un singleton, soit infini.

Corollaire 4.7.7 ([34]). *L'ensemble limite de tout AC non nilpotent est infini.*

L'ensemble limite peut être indénombrable, comme pour les AC surjectifs, ou dénombrable, comme $\Omega_{\text{Min}} = \Sigma_{10^*1}$ (cf exemple 3.1.3).

Stabilité. Voici une autre condition suffisante pour la stabilité d'un AC, qui a été prouvée indépendamment dans plusieurs sources.

Proposition 4.7.8 ([60]). *Un ensemble limite Ω_F de type fini d'un ACP (A, F) est atteint en temps fini, i.e. $\exists j \in \mathbb{N}, F^j(A^{\mathbb{M}}) = \Omega_F$.*

Preuve. Supposons que Ω_F est un STF d'ordre $k \in \mathbb{N}$, i.e. $\bigcap_{j \in \mathbb{N}} F^j(A) = \Omega_F \subset [\mathcal{L}_k(\Omega_F)]$. Alors $\bigcap_{j \in \mathbb{N}} F^j(A) \setminus [\mathcal{L}_k(\Omega_F)] = \emptyset$ est une intersection décroissante vide de compacts, donc il existe une génération $j \in \mathbb{N}$ à laquelle $F^j(A) \setminus [\mathcal{L}_k(\Omega_F)] = \emptyset$. $F^j(A)$ étant un sous-décalage, cela nous donne $F^j(A) = \bigcap_{i \in \mathbb{M}} [\mathcal{L}_k(\Omega_F)]_i = \Omega_F$ - car c'est un STF. \square

Bien entendu, la réciproque est fautive : il existe des SUF du décalage complet qui sont de type infini.

Contre-exemple 4.7.9. Soit $F : \{0, 1, 2\}^{\mathbb{M}} \rightarrow \{0, 1, 2\}^{\mathbb{M}}$ l'AC d'ancre 0, de diamètre 2 et de règle locale :

$$f : \{0, 1, 2\}^2 \rightarrow \{0, 1, 2\}$$

$$(a, b) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } a = 0 \text{ et } b > 0 \\ 2 & \text{si } a > 0 \text{ et } b = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $\Omega_F = F(\{0, 1, 2\}^{\mathbb{M}}) = \Sigma_{20^{N_2} \cup 10^{N_1}}$ est de type infini.

On peut d'ailleurs voir que les sous-décalages qui sont l'ensemble limite d'un AC stable sont exactement les ensembles images d'AC, *i.e.* les facteurs du décalage complet, puisque tout itéré d'AC reste un AC.

Remarque 4.7.10. Si $F : A^{\mathbb{M}} \rightarrow A^{\mathbb{M}}$ est un AC, alors pour toute génération $j \in \mathbb{N}$, le sous-décalage $F^j(A^{\mathbb{M}})$ est *sofique*, en tant que facteur d'un STF (*cf* théorème 2.4.12), et *mélangeant*, en tant que facteur d'un mélangeant (*cf* fait 1.6.12).

La stabilité n'a pas de conséquence particulière sur une éventuelle simplicité des tracés ; Kùrka présente par exemple dans [43] un exemple d'AC transitif (donc surjectif) non sofique. En revanche, la proposition 4.7.8 nous montre qu'un tracé limite de type fini est atteint en temps fini, mais cela peut ne pas être le cas de l'ensemble limite lui-même.

Ensemble asymptotique. L'ensemble asymptotique d'un AC est invariant par décalage mais, contrairement à l'ensemble limite, il peut ne pas être fermé.

On peut voir facilement que toutes les configurations *quiescentes*, étant elles-mêmes la limite de leur propre orbite, sont dans l'*ensemble asymptotique* – donc dans l'*ensemble limite* de l'AC. Puisque $\omega_{F^j} = \omega_F$, le fait 3.1.5 nous donne en particulier que tout AC admet au moins une configuration *uniforme* dans son *ensemble asymptotique* – donc dans son *ensemble limite*.

Les corollaires 1.10.13 et 4.3.5 nous permettent d'obtenir une caractérisation de la surjectivité des AC par leur ensemble asymptotique.

Proposition 4.7.11. *Un AC est surjectif si et seulement si son ensemble asymptotique est un résiduel.*

Cette caractérisation n'est donc pas aussi forte que celle que l'on a pour l'ensemble limite ; on peut se demander si on ne peut pas en obtenir l'équivalent.

Question 4.7.12. Existe-t-il un AC *surjectif* dont l'*ensemble asymptotique* n'est pas *plein* ?

Nilpotence asymptotique. À l'instar de la nilpotence et de la nilpotence faible, on peut voir, grâce à l'invariance par décalage de l'ensemble asymptotique, que toute configuration z telle qu'un AC soit asymptotiquement z -nilpotent est uniforme. On parlera donc d'AC asymptotiquement 0-nilpotent, où 0 est un état (quiescent) de A .

Remarque 4.7.13.

- Les propositions 1.10.19 et 2.6.30 nous permettent de voir qu'un SS F est *asymptotiquement nilpotent* si et seulement si tous ses FCC $\tau_F^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, sont *faiblement nilpotents*.
- Si F est un ACP, cela se simplifie puisque la projection $\pi_i(\tau_F^{(k)})$ coïncide avec le tracé τ_F pour tout $i \in \langle k \rangle$. Donc F est *asymptotiquement nilpotent* si et seulement si son *tracé* τ_F est *faiblement nilpotent*.

Nous allons montrer que, dans le cas des AC unidimensionnels, la nilpotence asymptotique est une propriété très forte, équivalente à la nilpotence.

Lemme 4.7.14. *Soit F un ACP sur un STF bilatère Λ , admettant pour toute génération $j \in \mathbb{N}$ une configuration 0-finie 0-nilpotente $x \in \Lambda$ telle que $F^j(x) \neq {}^\infty 0^\infty$. Alors F n'est pas asymptotiquement 0-nilpotent.*

Preuve. Soit r le rayon de F ; supposons que F soit asymptotiquement nilpotent.

- Mettons, à décalage près, que $F^j(x)_0 \neq 0$. On peut tout d'abord montrer qu'on peut se ramener à une configuration «creuse», *i.e.* pour tout $k \in \mathbb{N}$, il y a une configuration $y \in [0^{(k)}]$ et une génération $j > k$ telle que $F^j(y)_0 \neq 0$. En effet, la proposition 1.10.16 nous donne une génération $J \in \mathbb{N}$ telle que $\forall x \in \Lambda, \exists j < J, F^j(x) \in [0^{(k)}]$. Par hypothèse, il existe une configuration 0-finie 0-nilpotente x telle que $F^{k+J}(x)_0 \neq 0$; il existe donc une configuration $F^j(x) \in [0^{(k)}]$, qui est encore 0-finie et 0-nilpotente, telle que $F^{k+J-j}(x)_0 \neq 0$, avec $j < J$ et donc $k + J - j > k$.
- Montrons maintenant que si $x \in \Lambda$ est une configuration 0-finie 0-nilpotente et $k \in \mathbb{N}$, alors il existe une configuration 0-finie 0-nilpotente $y \in [x_{\langle r(k) \rangle}]$ telle que $\{j \in \mathbb{N} \mid F^j(y)_0 \neq 0\} \supseteq \{j \in \mathbb{N} \mid F^j(x)_0 \neq 0\}$. En effet, $F^n(x) = {}^\infty 0^\infty$ pour une génération $n \in \mathbb{N}$. Quitte à augmenter k , on peut supposer que $x \in {}^\infty 0[A^{2r(k-2n)}]^\infty 0$. Le point précédent nous donne une configuration 0-finie 0-nilpotente $x' \in [0^{(2rk)}]$ et une génération $j > k$ telle que $F^j(x')_0 \neq 0$. Quitte à augmenter n , on peut supposer que Λ est un $2n$ -STF ; par conséquent il contient la configuration $y = x'_{[-\infty, -rk]} [x_{\langle r(k) \rangle}] x'_{[rk, \infty]}$. Par une récurrence immédiate sur la génération $j \leq n$, on voit que $F^j(y)_i = F^j(x')_i$ si $|i| > r(k - 2n - j)$ et $F^j(y)_i = F^j(x)_i$ si $|i| \leq r(k - 2n + j)$. En particulier :

$$\{j \in \mathbb{N} \mid F^j(y)_0 \neq 0\} \cap \llbracket 0, n \rrbracket = \{j \in \mathbb{N} \mid F^j(x)_0 \neq 0\} \cap \llbracket 0, n \rrbracket = \{j \in \mathbb{N} \mid F^j(x)_0 \neq 0\} .$$

D'autre part, puisque $F^n(x)_{\langle r(k-n) \rangle} = 0^{2r(k-n)} = F^n(x')_{\langle r(k-n) \rangle}$, on voit que $F^n(y) = F^n(x')$. Par construction, il y a une génération $j \geq k > n$ telle que $F^j(y)_0 = F^j(x')_0 \neq 0$. On a donc bien $\{j \in \mathbb{N} \mid F^j(y)_0 \neq 0\} \supseteq \{j \in \mathbb{N} \mid F^j(x)_0 \neq 0\}$.

- On peut donc construire par récurrence une suite $(y^k)_{k \in \mathbb{N}}$ de configurations 0-finies 0-nilpotentes, avec $x^0 = {}^\infty 0^\infty$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x^{k+1} \in [x^k_{\langle r(k+1) \rangle}]$ et $\{j \in \mathbb{N} \mid F^j(x^{k+1})_0 \neq 0\} \supseteq \{j \in \mathbb{N} \mid F^j(x^k)_0 \neq 0\}$. Cette suite converge vers une configuration $x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} [x^k_{\langle r(k+1) \rangle}]$ telle que $\{j \in \mathbb{N} \mid F^j(x)_0 \neq 0\}$ contient $\{j \in \mathbb{N} \mid F^j(y^k)_0 \neq 0\}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (par continuité de la trace). Cette suite d'ensembles étant strictement croissante, $\{j \in \mathbb{N} \mid F^j(x)_0 \neq 0\}$ est infini, *i.e.* le tracé τ_F n'est pas faiblement 0-nilpotent. \square

Théorème 4.7.15 ([51]). *Tout ACP unidimensionnel asymptotiquement nilpotent sur un STF transitif est nilpotent.*

Preuve. Tout ACP unilatère peut être transformé en bilatère, en conservant les propriétés de nilpotence et de nilpotence limite. Il suffit donc de donner une preuve pour un ACP F asymptotiquement 0-nilpotent, de rayon $r \in \mathbb{N}$ sur un STF bilatère transitif Λ , dont nous pouvons supposer l'ordre $l = 2r$, quitte à en augmenter un des deux. La proposition 1.10.18 et le théorème 4.5.6 nous donnent un mot (i, l) -bloquant u , *i.e.* $T_F^l([u]_{-i})$ est un singleton. Par la remarque 4.7.13, il existe une génération $k \in \mathbb{N}$ telle que $\forall n \geq k, \forall x \in [u]_{-i}, F^n(x) \in [0^l]_0$. Soit $j \in \mathbb{N}$. Supposons que F ne soit pas nilpotent ; alors le fait 4.2.5 nous donne une configuration $x \in A^{\mathbb{Z}}$ telle que $F^{j+k}(x)_0 \neq 0$. Λ étant transitif, il contient une configuration $x' = zuv[x_{\langle r(j+k) \rangle}]v'uz'$, avec $z \in A^{-\mathbb{N}}, z' \in A^{\mathbb{N}}, v, v' \in A^*$. Celle-ci a la propriété que, si $p_1 = -r(j+k) - |uv| + i$ et $p_2 = r(j+k) + |v'| + i$, on a :

$$\forall n \geq k, F^n(x')_{\llbracket p_1, p_1+l \rrbracket} = F^n(x')_{\llbracket p_2, p_2+l \rrbracket} = 0^l .$$

Λ étant un l -STF contenant ${}^\infty 0^\infty$ (limite de toute orbite de F), il contient également la configuration $y = {}^\infty 0[F^k(x')_{\llbracket p_1, p_2+l \rrbracket}]_{p_1} 0^\infty$. Par construction, $F^j(y)_0 = F^{j+k}(x)_0 \neq 0$. En tant que concaténation entre trois configurations partageant les mêmes tracés de largeur l aux cellules p_1 et p_2 , on voit par la proposition 3.5.3 que pour toute génération $n \in \mathbb{N}$, $F^n(y)_{\llbracket -\infty, p_1+l \rrbracket} = {}^\infty 0$ et $F^n(y)_{\llbracket p_2, \infty \rrbracket} = 0^\infty$. La nilpotence asymptotique nous donne en outre une génération $n \in \mathbb{N}$ à laquelle $F^n(y) \in [0^{p_2-p_1-l}]_{p_1+l}$; on peut en déduire $F^n(y) = {}^\infty 0^\infty$. La configuration y est 0-finie, 0-nilpotente, mais meurt arbitrairement tard (après un temps au moins j) ; cela contredit le lemme 4.7.14. \square

La juxtaposition des mots bloquants, comme pour le théorème 4.5.6, ne se généralise pas en dimension supérieure. La question reste donc ouverte.

Conjecture 4.7.16. Tout AC $(A^{\mathbb{M}^d}, F)$, $d \in \mathbb{N}^*$, asymptotiquement nilpotent est nilpotent.

Le théorème précédent signifie donc qu'un AC est nilpotent dès que tous les diagrammes espace-temps arrivent dans les cylindres $[0^{(k)}]$ de toute largeur $k \in \mathbb{N}$ et y restent. On peut maintenant se demander s'il est possible de trouver un AC dans les orbites duquel des plages de 0 arbitrairement larges apparaissent, mais sans stagner.

Question 4.7.17 ([51]). Existe-t-il un AC localement 0^k -mortel pour tout $k \in \mathbb{N}$ qui ne soit pas nilpotent ?

Remarquons enfin que, contrairement à l'ensemble limite, l'ensemble asymptotique peut avoir des configurations uniformes isolées sans que l'AC soit asymptotiquement nilpotent. C'est, par exemple, le cas pour l'AC Min (cf exemple 3.1.3), dont l'ensemble asymptotique est $\{\infty 0^\infty, \infty 1^\infty\}$.

Périodicité asymptotique. L'équivalence entre nilpotence et nilpotence asymptotique est un résultat très fort. Contrairement à l'équivalence entre nilpotence et nilpotence faible, il ne peut pas être généralisé à la périodicité. Par exemple, l'AC Min (cf exemple 3.1.3) est asymptotiquement périodique mais pas faiblement prépériodique. En revanche, tous ses tracés sont faiblement prépériodiques et ont même période. Cette remarque peut être généralisée.

Proposition 4.7.18. Si $p \in \mathbb{N}^*$, alors un SS (Λ, F) est asymptotiquement p -périodique si et seulement si tous ses FCC $\tau_F^{(k)}$, pour $k \in \mathbb{N}$, sont faiblement p -prépériodiques.

Preuve .

- Soit $x \in \omega_F$, i.e. il existe une configuration y dont l'orbite $\mathcal{O}_F(y)$ admet x comme valeur d'adhérence. Si tout FCC est p -prépériodique, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une génération $j \in \mathbb{N}$ telle que $T_F^{(k)} F^j(y)$ est p -périodique. Par continuité de la trace, on en déduit que $T_F^{(k)}(x)$ est p -périodique. Globalement, on obtient que x est p -périodique.
- La réciproque vient de la préservation de la périodicité asymptotique par factorisation et de la proposition 2.6.30. □

Dans le cas des AC, tous les FCC sont prépériodiques dès que le tracé de largeur 1 l'est.

Corollaire 4.7.19. Si $p \in \mathbb{N}^*$, alors un ACP F est asymptotiquement p -périodique si et seulement si son tracé τ_F est faiblement p -prépériodique.

En revanche, on ne peut pas uniformiser la prépériode, même en imposant un mot ultime commun à tous les tracés, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 4.7.20 (AC non prépériodique de tracé faiblement prépériodique). On définit l'AC F sur $\{0, 1, 2\}$, d'ancre 1, de diamètre 4 et de règle locale :

$$f : \quad \{0, 1, 2\}^4 \rightarrow \{0, 1, 2\}$$

$$(x_{-1}, x_0, x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} x_{-1} + 1 \bmod 3 & \text{si } x_{-1} \neq x_0 \neq x_1 = x_2 \\ x_0 + 1 \bmod 3 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Par récurrence, on voit que deux cellules consécutives dans le même état garderont toujours un état identique. En particulier, une cellule qui applique la première partie de la règle rejoint l'état de sa voisine de droite, et toutes deux ne pourront plus appliquer que la deuxième partie de la règle. On en déduit que le tracé $\tau_F \subset \mathcal{O}_\sigma((012)^*(02 + 12 + 01)(^\infty 012))$ est faiblement 3-prépériodique.

– Soit Φ la simulation par $(\Sigma_K \subset \{0, 1, 2\}^{\mathbb{Z}}, \sigma^2)$ de $(2^{\mathbb{N}}, \sigma)$ définie :

$$\text{sur le sous-décalage } \Sigma_K \text{ de langage interdit } K = \bigcup_{\substack{a,b \in \{0,1,2\} \\ k \in \mathbb{N}}} aaA^{2k+1}bb \cup \{000, 111, 222\}$$

$$\text{par la règle locale } \phi : (x_0, x_1) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x_0 \neq x_1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'après la définition de f , Φ est une conjugaison hors-contexte de $F|_{\Sigma_K}$ dans Min (cf exemple 3.1.3). En particulier, F simule hors-contexte un AC qui n'est *pas pré périodique*. Il ne l'est donc pas non plus.

L'ultramétrie permet une généralisation de la proposition 1.10.18 dans le cadre particulier des espaces symboliques.

Proposition 4.7.21. *Aucun SS asymptotiquement périodique n'est sensible.*

Preuve. Supposons que (Λ, F) soit un SS sensible et asymptotiquement périodique. Par les propositions 4.5.12 et 1.10.19, tous ses tracés suffisamment fins le sont également, ce qui contredit le corollaire 2.6.31. \square

Ensembles limites et simulation. Nous avons vu dans le chapitre 1 que les ensembles limite et asymptotique se comportaient bien vis-à-vis des factorisations, puissances et racines. L'ensemble limite est clairement inchangé par composition avec le décalage, mais ce n'est pas le cas de l'ensemble asymptotique. Par exemple, $\omega_{\sigma \text{Min}} = (\infty 0 + \infty 1)1^*(0^\infty + 1^\infty)$ et $\omega_{\text{Min}} = \{0^\infty, 1^\infty\}$ (cf exemple 3.1.3). De façon générale, en décalant suffisamment l'AC, toutes les configurations de l'ensemble limite peuvent être obtenues comme valeurs d'adhérence d'orbites.

Proposition 4.7.22. *Si F est un AC oblique, alors $\omega_F = \Omega_F$.*

Preuve. Supposons que F a une ancre $m < 0$, une anticipation $m' \in \mathbb{N}$, une règle locale (étendue) f et que x est une configuration de l'ensemble limite, i.e. pour toute génération $j \in \mathbb{N}$, il existe une configuration x^j telle que $F^j(x^j) = x$. Construisons une configuration y telle que pour tout rayon $p \in \mathbb{N}$, il y ait un entier j_p telle que $y_{[mj_p - p, m'j_p + p]} = x_{(p)}^{j_p}$; on peut par exemple prendre $j_0 = 0$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $j_{p+1} \geq \frac{m'j_p + 2p + 1}{m}$. Ainsi, on a, par une induction directe sur $k \in [0, j_p]$, $F^k(y)_{[m(j_p - k) - p, m'(j_p - k) + p]} = f^k(y_{[mj_p - p, m'j_p + p]}) = f^k(x_{(p)}^{j_p})$; en particulier, $F^{j_p}(y)_{(p)} = x_{(p)}$; par conséquent x est valeur d'adhérence de l'orbite de y . \square

Corollaire 4.7.23. *Si F est un AC d'ancre $m \in \mathbb{Z}$ et d'anticipation $m' \in \mathbb{N}$, alors $\Omega_F = \omega_{\sigma^k F}$ pour tout $k > m$ et tout $k < -m'$.*

Ensembles limites et traces. Si l'on appelle le tracé du système limite **tracé limite**, on peut voir que, tout comme le langage limite, il se comporte bien avec l'ensemble limite, comme nous en avons déjà fait la remarque dans la preuve de la proposition 4.7.2.

Fait 4.7.24. *Le tracé $\tau_F^{\Omega \mathcal{P}} = T_F^{\mathcal{P}}(\Omega_F)$ du système limite d'un SS (Λ, F) est l'ensemble limite du tracé : $\tau_F^{\Omega \mathcal{P}} = \Omega_{\tau_F^{\mathcal{P}}}$, si \mathcal{P} est une partition en ouverts de Λ .*

Le système limite d'un SS F étant surjectif, on peut définir son bitracé; sans risque d'ambiguïté, nous le noterons τ_F^* et l'appellerons **bitracé** de F . C'est donc le sous-décalage bilatère correspondant au tracé limite τ_F^{Ω} . On peut également considérer le bitracé $\tau_F^{*\mathcal{P}}$ relatif à une partition \mathcal{P} , qui correspond à $\tau_F^{\Omega \mathcal{P}}$. On remarque que $\tau_F^* = A^{\mathbb{Z}}$ si et seulement si $\tau_F = A^{\mathbb{N}}$.

On peut avoir envie de classifier les SS non plus suivant leurs tracés, mais suivant leurs bitracés (ou tracés limites). Par le corollaire 2.6.24 et le fait précédent, on peut montrer que les deux premières classes

ne sont pas modifiées : tout SS (A, F) est *équicontinu* (resp. de *type fini*) si et seulement si son système limite $F|_{\Omega}$ aussi. On retrouve, pour les AC, la caractérisation de la périodicité limite par la prépériodicité (cf proposition 4.7.2), alors équivalente à l'équicontinuité.

En revanche, les systèmes **limite-sofiques** peuvent ne pas être *sofiques* (cf exemple 2.6.25).

Dans le cas général des AC, parallèlement à la proposition 3.5.1 et en remarquant que l'ensemble limite d'un sous-décalage déterministe est toujours un sous-décalage déterministe, on peut voir que le bitracé de F en contient un ; il n'est en revanche plus nécessaire ici que le sous-décalage déterministe fasse intervenir l'alphabet A complètement.

Fait 4.7.25. *Le bitracé d'un AC sur l'espace $A^{\mathbb{M}}$ contient un sous-décalage déterministe $\mathcal{O}_{\varsigma}(A')$, où $\varsigma : A' \rightarrow A'$ et $A' \subset A$.*

4.8 Entropie

Dans le cadre des SS, l'entropie prend une formulation (relativement) plus agréable, du fait que les FCC forment une *base* et sont des sous-décalages :

$$\mathcal{H}(F) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{H}(\tau_F^{(k)}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |\mathcal{L}_n(\tau_F^{(k)})|}{n}.$$

Si F est un AC de diamètre centré \tilde{d} , le *chevauchement* nous donne également l'expression :

$$\mathcal{H}(F) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{H}((\tau_F^{\tilde{d}})^{[k]}).$$

Si $k \in \mathbb{N}$, on peut remarquer que le tracé $\tau_F^{(2k)}$ de largeur $2k$ est essentiellement inclus dans le produit $(\tau_F^{(k)})^2$; cela permet d'obtenir la borne (très ample) : $\mathcal{H}(\tau_F^{(2k)}) \leq 2\mathcal{H}(\tau_F^{(k)})$. Puisque $\mathcal{H}(F) \geq \mathcal{H}(\tau_F^{(k)})$, on en déduit le fait suivant.

Fait 4.8.1. *Un ACP a une entropie nulle si et seulement si chacun de ses tracés également.*

Corollaire 4.8.2. *Un ACP sofique a une entropie strictement positive si et seulement si chacun de ses tracés est universel.*

On peut borner l'entropie d'un AC par l'entropie de ses deux facteurs canoniques gauche et droit.

Proposition 4.8.3. *Tout ACP (A, F) d'ancre et d'anticipation centrées $\tilde{m}, \tilde{m}' \in \mathbb{N}$ a une entropie inférieure ou égale à la somme de celles des ses facteurs canoniques gauche et droit :*

$$\mathcal{H}(F) \leq \mathcal{H}(\tau_F^{\tilde{m}}) + \mathcal{H}(\tau_F^{\tilde{m}'}) .$$

Preuve. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \geq \tilde{m} + \tilde{m}'$. Alors par le fait 3.5.4, on voit qu'il y a une injection :

$$\begin{aligned} \phi : \quad \mathcal{L}_n(\tau_F^k) &\rightarrow \mathcal{L}_n(\tau_F^{\tilde{m}}) \times \mathcal{L}_{k-\tilde{m}-\tilde{m}'}(A) \times \mathcal{L}_n(\tau_F^{\tilde{m}'}) \\ z = (z^j)_{0 \leq j < n} &\mapsto (\pi_{[0, \tilde{m}]}(z), z_{[\tilde{m}, k-\tilde{m}']}^0, \pi_{[k-\tilde{m}', k]}(z)) , \end{aligned}$$

qui se traduit sur les cardinaux par l'inégalité suivante :

$$|\mathcal{L}_n(\tau_F^k)| \leq |\mathcal{L}_n(\tau_F^{\tilde{m}})| |\mathcal{L}_n(\tau_F^{\tilde{m}'})| |\mathcal{L}_{k-\tilde{m}-\tilde{m}'}(A)| .$$

En passant au logarithme, et en supprimant le terme négligeable devant n , on obtient que l'entropie relative à n'importe quelle partition en cylindres de largeur $k \geq \tilde{m} + \tilde{m}'$ vaut :

$$\mathcal{H}_{\{[u]_{|u| \in A^k}\}}(F) \leq \mathcal{H}(\tau_F^{\tilde{m}}) + \mathcal{H}(\tau_F^{\tilde{m}'}) . \quad \square$$

Pour un AC de rayon r , on obtient donc l'encadrement : $\mathcal{H}(\tau_F^r) \leq \mathcal{H}(F) \leq 2\mathcal{H}(\tau_F^r)$.

Asymétriser le rayon permet cependant d'obtenir une égalité dans le cas unilatère, pour lesquels le facteur canonique gauche est un système vide.

Corollaire 4.8.4 ([116]). *Un AC unidirectionnel F de rayon $r \in \mathbb{N}$ a une entropie égale à celle de son facteur canonique :*

$$\mathcal{H}(F) = \mathcal{H}(\tau_F^r) .$$

On a le même résultat pour les AC positivement expansifs, puisqu'ils sont conjugués à leur tracé ; la remarque 4.6.9 nous permet même de généraliser aux positivement expansifs d'un côté, puisque tout tracé τ_F^k est conjugué au tracé canonique τ_F^r .

Proposition 4.8.5. *Un AC F positivement expansif à gauche (resp. à droite) de rayon $r \in \mathbb{N}$ a une entropie $\mathcal{H}(F) = \mathcal{H}(\tau_F^r)$.*

On retrouve donc le résultat de [83] : les *permutifs* étant soit unidirectionnels, soit positivement expansifs d'un côté (cf fait 4.6.6), ils ont une *entropie* égale à celle de leur *facteur canonique*.

Cette simplification de l'expression de l'entropie dans des cas particuliers amène tout naturellement un espoir de généralisation.

Question 4.8.6 ([83]). Existe-t-il une largeur $k \in \mathbb{N}$ (calculable) telle que $\mathcal{H}(F) = \mathcal{H}(\tau_F^{(k)})$?

On peut, d'autre part, obtenir une majoration simple de l'entropie d'un ACP en termes de celle de son domaine et de son diamètre.

Proposition 4.8.7 ([38]). *Soit (A, F) un ACP de diamètre centré \tilde{d} . Alors $\mathcal{H}(F) \leq \tilde{d}\mathcal{H}(A)$.*

Conclusion

Nous avons repris dans ce chapitre les nombreuses notions introduites dans le chapitre 1. Beaucoup se simplifient lorsque l'on entre dans le cadre de la topologie de Cantor sur les espaces symboliques. Ainsi, on a souvent une caractérisation en termes de tracés.

En ce qui concerne les AC unidimensionnels, nous avons vu que toutes les notions de nilpotence, jusqu'à la nilpotence asymptotique, sont équivalentes, de même que la périodicité limite, la prépériodicité et l'équicontinuité, ou encore que la quasi-équicontinuité et la non-sensibilité. Entre les deux dernières classes, la périodicité asymptotique reste une propriété assez incomprise.

Une question ouverte assez importante concerne les propriétés qui pourraient être déduites directement depuis un tracé particulier de l'AC : c'est le cas, donc, de la nilpotence, ainsi que de l'équicontinuité ; peut-on généraliser ce type de caractérisations, par exemple aux transitivités ou au calcul de l'entropie ?

Hormis les propriétés immédiates et les nilpotences, les différents comportements dynamiques présentés dans ce chapitre sont très sensibles au décalage : une composition avec le décalage peut changer du tout au tout un comportement stable en comportement instable, puisque le décalage lui-même est fortement instable (expansif et mélangeant) alors que l'identité est fortement stable (équicontinue et bijective). Cette remarque a conduit notamment à l'introduction de nouvelles topologies pour l'étude des AC, comme celles de Besicovitch ou Weyl (cf [50]), dont l'invariance par décalage amène des dynamiques complètement différentes (cf [113, 117]).

En restant dans la topologie de Cantor, une étude focalisée sur l'action intrinsèque de la règle locale d'un AC – indépendamment de son ancre – peut être menée en considérant les classes d'AC à décalage près. Initiée par les travaux de Milnor sur l'entropie (cf [118]) et poursuivie par ceux de Sablik sur l'équicontinuité (cf [38, 79]), cette approche demeure un sujet d'ouverture assez intéressant ; elle a récemment été spécialisée notamment par Denny et Formenti aux AC surjectifs dans [64] ou additifs dans [10].

D'autre part, beaucoup de résultats présentés dans ce chapitre sont fortement sensibles à la dimension. Les automates cellulaires en dimension supérieure sont très différents des unidimensionnels, et des études

ont été menées pour mieux cerner ces spécificités, notamment [66]. On peut par exemple voir, par un simple argument combinatoire et le fait que la trace est lipschitzienne, qu'il n'y a pas d'AC bidimensionnels expansifs ni positivement expansifs. D'autre part, il existe des AC qui ne sont ni sensibles ni quasi-équicontinus, puisque la construction du théorème 4.5.6 se base sur une concaténation de mots bloquants qui laisserait des «trous» en dimension 2.

D'autres différences importantes entre les dimensions apparaissent dans les problèmes d'indécidabilité, tant les sous-décalages bidimensionnels contiennent intrinsèquement une complexité bien plus grande que les unidimensionnels. Afin de bien comprendre tous ces changements fondamentaux entre les dimensions, on pourrait s'intéresser aux restrictions d'AC en dimension 2 à des sous-décalages intermédiaires, comme par exemple les automates de sable, tels que présentés dans [119, 110].

Chapitre 5

Traçabilité

On a vu dans les chapitres précédents certaines classes particulières de SS et d'AC et quelles étaient alors les propriétés spécifiques de leurs tracés. On s'intéresse dans ce chapitre, d'une certaine manière, à un point de vue inverse : on se demande si un sous-décalage ayant des propriétés particulières peut être vu comme le tracé d'un SS. Posée telle quelle, cette question est trop vaste puisque les sous-décalages sont évidemment leur propre tracé. Nous allons étudier le cas des AC, pour lesquels, comme vu précédemment, le tracé est très contraint par le fait que toutes les cellules évoluent de manière identique. Cette question apparaît dans [120].

On dit qu'un sous-décalage $\Sigma \subset A^{\mathbb{N}}$ est **traçable** (par F) s'il est le tracé (de largeur 1) d'un AC F . Tous les sous-décalages sofiques ne sont pas traçables, notamment ceux qui, comme $\mathcal{O}_\sigma(\infty(001)^\infty)$, ne contiennent pas de sous-décalage déterministe (cf proposition 3.5.1), ou alors les sous-décalages faiblement nilpotents qui ne sont pas nilpotents (cf théorème 4.7.15). Nous allons présenter des conditions suffisantes pour la traçabilité, en nous limitant aux sous-décalages sofiques et aux AC unidimensionnels bilatères.

Le cas le plus simple est représenté par les sous-décalages markoviens, qui sont tous traçables.

Proposition 5.0.8 ([121]). *Tout sous-décalage unilatère (resp. bilatère) markovien est le tracé (resp. bitracé) d'un AC unidirectionnel.*

Preuve. Soit $\Sigma \subset A^{\mathbb{N}}$ un sous-décalage markovien. D'après la proposition 2.6.9, il contient un sous-décalage déterministe \mathcal{O}_ξ , avec $\xi : A \rightarrow A$. On peut alors définir l'AC unilatère F de diamètre 2 et de règle locale :

$$f : A^2 \rightarrow A \\ (a, b) \mapsto \begin{cases} b & \text{si } ab \in \mathcal{L}(\Sigma) \\ \xi(a) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On voit facilement que $F|_\Sigma = \sigma$, donc $T_\sigma(\Sigma) = T_F(\Sigma)$, i.e. $\Sigma \subset \tau_F$. Réciproquement, pour toute configuration $x \in A^{\mathbb{Z}}$, $x_0 f(x_0, x_1) \in \mathcal{L}_2(\Sigma)$. Donc pour tout $x \in A^{\mathbb{Z}}$ et toute génération $j \in \mathbb{N}$, $F^j(x)_0 F^{j+1}(x)_0 \in \mathcal{L}_2(\Sigma)$; puisqu'il s'agit d'un sous-décalage markovien, on obtient $T_F(x) \in \Sigma$. Il en résulte que $\tau_F = \Sigma$. Le cas du bitracé se prouve de manière équivalente. \square

Par le théorème de Weiss, on sait que tout sous-décalage sofique est facteur d'un sous-décalage markovien. On peut donc en déduire le corollaire suivant.

Corollaire 5.0.9. *Tout sous-décalage sofique unilatère est facteur d'un AC unidirectionnel.*

5.1 Polytracés

On commence par aborder un problème plus simple : celui des automates à répartition périodique, dans lesquels les cellules n'ont plus une même règle locale, mais des règles distribuées périodiquement

sur les cellules. Comme vu en section 3.7, cela correspond à prendre un AC sur l'alphabet A^k , ou un sous-alphabet.

Définition 5.1.1 (Polytracé).

- Si Σ est un sous-décalage sur l'alphabet $B \subset (A^k)$ et $k \in \mathbb{N}$, on définit $\pi(\Sigma)$ comme étant le sous-décalage $\bigcup_{0 \leq i < k} \pi_i(\Sigma)$ sur l'alphabet A .
- Si $F : B^{\mathbb{Z}} \rightarrow B^{\mathbb{Z}}$ est un SS, on définit son **polytracé** comme l'ensemble des *projetés* du *tracé* : $\overset{\circ}{\tau}_F = \pi(\tau_F)$.
- On dit qu'un sous-décalage $\Sigma \subset A^{\mathbb{N}}$ est **polytraçable** s'il est le *polytracé* d'un AC sur un tel alphabet $B \subset A^k$, avec $k \in \mathbb{N}$.
- Un sous-décalage est **polytraçable unidirectionnellement** s'il est le *polytracé* d'un AC *unidirectionnel*.

Le polytracé est bien un sous-décalage, en tant qu'union de sous-décalages, mais ce n'est pas un facteur de F en général. Il doit être considéré relativement à un alphabet de base : pour un AC sur l'alphabet $(A^k)^l$, avec $k, l \in \mathbb{N}$, on peut voir un polytracé sur A^k , ou bien un polytracé sur A . On se fera alors au contexte pour comprendre quel est l'alphabet de base (souvent A) considéré. Cette remarque autorise donc à dire que le polytracé d'un produit d'AC est l'union des polytracés des AC projetés.

Remarque 5.1.2. Le *tracé* d'un AC F est le *polytracé* de n'importe lequel de ses *groupés* et *mémorisés horizontaux* : $\forall m \in \mathbb{N}^*, \tau_F = \overset{\circ}{\tau}_{F_{\boxplus m}} = \overset{\circ}{\tau}_{F_{\boxminus m}}$. En particulier, tout sous-décalage polytraçable est le polytracé d'un AC d'ancre 1 et de rayon 1.

Dans cette section, on cherche des conditions suffisantes pour qu'un sous-décalage soit polytraçable unidirectionnellement. Il nous restera, pour obtenir des conditions de traçabilité à proprement parler, à simuler ces automates à répartition périodique par de véritables AC en préservant le polytracé. Ce sera le but des deux sections qui suivront.

Tracés projetés. Intéressons-nous tout d'abord aux **tracés projetés**, *i.e.* les sous-décalages $\pi_q(\tau_F)$, où F est un AC sur $B \subset A^k$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq q < k$, ou bien, sans perte de généralité, les sous-décalages $\pi_0(\tau_F)$.

Remarque 5.1.3. Soient F un AC sur l'alphabet A et Ψ une factorisation lettre à lettre du tracé τ_F dans un sous-décalage $\Sigma \subset B^{\mathbb{N}}$, basée sur une règle locale $\psi : A \rightarrow B$. Alors, l'AC G sur l'alphabet $C = \{(\psi(a), a) \mid a \in A\}$ défini par

$$G : \quad C^{\mathbb{Z}} \rightarrow C^{\mathbb{Z}} \\ (x_i, y_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mapsto (F(x_i), \psi F(x_i))_{i \in \mathbb{Z}} .$$

vérifie $\pi_0(\tau_G) = \Psi(\tau_F) = \Sigma$. Donc un sous-décalage est un *tracé projeté* d'un AC si et seulement s'il est *facteur lettre à lettre* d'un sous-décalage *traçable*.

Proposition 5.1.4. *Tout sous-décalage unilatère sofique est un tracé projeté d'un AC unidirectionnel.*

Preuve. Le théorème de Weiss stipule que tout sofique est facteur lettre à lettre d'un sous-décalage markovien ; par ailleurs nous avons vu dans la proposition 5.0.8 que les sous-décalages markoviens sont traçables par un AC unidirectionnel. La remarque 5.1.3 permet de conclure. \square

Polysimulation. Nous avons donné une condition pour qu'un sous-décalage Σ puisse être vu comme un tracé projeté particulier. Maintenant nous voulons être capable d'encoder les autres colonnes de sorte qu'elles aient une évolution dans Σ .

Définition 5.1.5 (Polysimulation et polyfacteurs).

- Un sous-décalage Σ **polysimule** un autre sous-décalage Γ si Γ est *facteur lettre à lettre* d'un sous-décalage $\Gamma' \subset \Sigma^{(h)}$ où $h \in \mathbb{N}$.
- Γ est un **polyfacteur** de Γ' si, de plus, $\Sigma = \Gamma$.
- Un SDD est **polyuniversel** s'il *polysimule tous* les sous-décalages.

La définition de polyfacteur et remarque 5.1.3 permettent une caractérisation pratique de la polytraçabilité.

Fait 5.1.6.

- *Tout sous-décalage polytraçable (resp. unidirectionnellement) est polyfacteur d'un sous-décalage traçable.*
- *Tout polyfacteur d'un sous-décalage polytraçable (resp. unidirectionnellement) l'est également.*

La polysimulation peut être caractérisée en omettant la condition lettre à lettre.

Proposition 5.1.7. *Un sous-décalage Σ polysimule un autre sous-décalage Γ si et seulement si Γ est facteur d'un sous-décalage $\Gamma' \subset \Sigma^{(h)}$ où $h \in \mathbb{N}$.*

Preuve. En effet, par le fait 2.3.3, si Γ est sous-facteur de $\Sigma^{(n)}$ pour un $n \in \mathbb{N}$, alors il existe un $r \in \mathbb{N}$ tel que Γ est sous-facteur lettre à lettre de $\boxplus_r(\Sigma^{(n)}) \subset \Sigma^{(nr)}$. \square

Le problème de la polytraçabilité des sous-décalages sofiques peut donc se poser ainsi : étant donné un sous-décalage sofique Σ , on sait qu'il est le projeté $\pi_0(\Gamma)$ d'un sous-décalage traçable Γ , mais peut-on alors polysimuler les autres projetés $\pi_i(\Gamma)$ par Σ ?

Remarque 5.1.8. Un sous-décalage Σ est *polyfacteur* de ses *mémorisés* $\boxplus_n(\Sigma)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, puisqu'il leur est conjugué, et que chaque projeté $\pi_i(\boxplus_n(z))$ vaut le décalé $\sigma^i(z)$ pour $i \in \llbracket 0, n \llbracket$ et $z \in \Sigma$.

Nous allons donner maintenant des conditions nécessaires pour qu'un sous-décalage soit polytraçable. Deux cas en particulier permettent de ramener le problème à celui des sous-décalages markoviens, vu ci-dessus : quand le sous-décalage est si simple (STF) que son mémorisé lui ressemble beaucoup, ou bien quand il est si complexe (sofique universel) qu'il peut polysimuler tous les sofiques, en particulier son propre mémorisé.

Sous-décalages de type fini.

Proposition 5.1.9. *Tout STF est polytraçable unidirectionnellement.*

Preuve. Soit Σ un STF d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$. Le mémorisé $\boxplus_k(\Sigma)$ est un sous-décalage markovien (cf fait 2.5.8), donc traçable unidirectionnellement par la proposition 5.0.8 ; nous pouvons conclure par la remarque 5.1.8. \square

Corollaire 5.1.10. *Tout sous-décalage polyfacteur d'un STF est polytraçable unidirectionnellement.*

Preuve. Cela découle directement de la proposition 5.1.9 et du fait 5.1.6. \square

Sous-décalages sofiques universels. Nous étendons maintenant le résultat de polytraçabilité aux sofiques en ajoutant une propriété supplémentaire, qui implique d'être un polyfacteur d'un STF.

La simulation décrite dans le théorème 2.6.40 nous permettrait d'encoder dans Σ n'importe quel sous-décalage, en particulier les autres projetés. Mais cette simulation totale n'est pas directe : nous n'obtenons un encodage d'une lettre que toute les m générations. Ce problème peut être résolu en répétant m encodages les uns à côté des autres. Cela requiert également une fonction «horloge» qui signalera à chaque génération laquelle, parmi les m copies, doit être considérée comme le code valide.

Lemme 5.1.11. *Si un décalage complet est un sous-facteur d'un SDD itéré (X, F^n) pour un $n \in \mathbb{N}$, alors c'est un sous-facteur du produit $\mathcal{C}_n \times (X, F)^{(n)}$.*

Preuve. Soit $(Y \subset X, F)$ un sous-système et $\Phi : Y \rightarrow A^{\mathbb{N}}$ une fonction surjective telle que $\Phi F^n = G\Phi$. L'application

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} : \quad \llbracket 0, n \llbracket \times Y^{(n)} &\rightarrow A^{\mathbb{N}} \\ (i, y_0, \dots, y_{n-1}) &\mapsto (\Phi(F^j(y_{i+j \bmod n})))_{j \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

est un morphisme, puisque pour tout $(i, y_0, \dots, y_{n-1}) \in \llbracket 0, n \llbracket \times Y^{(n)}$, on a :

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(i+1 \bmod n, F(y_0), \dots, F(y_{n-1})) &= (\Phi(F^{j+1}(y_{i+1+j \bmod n})))_{j \in \mathbb{N}} \\ &= \sigma \tilde{\Phi}(i, y_0, \dots, y_{n-1}) . \end{aligned}$$

De plus, $\tilde{\Phi}$ est surjective dans $A^{\mathbb{N}}$. En effet, si $z \in A^{\mathbb{N}}$, alors pour $0 \leq i < n$, la surjectivité de Φ et nous donne $y_i \in Y$ tel que $\Phi(y_i) = (1z_{nj+i})_{j \in \mathbb{N}}$, où 1 est une lettre quelconque de A . Par construction, pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $i \in \llbracket 0, n \llbracket$, $\tilde{\Phi}(0, F^n(y_0), F^{n-1}(y_1), \dots, F(y_{n-1}))_{nj+i} = \Phi(F^{nj+i}(F^{n-i}(y_i)))_0 = \sigma^{j+1}\Phi(y_i)_0 = z_{nj+i}$. Donc $(0, F^n(y_0), F^{n-1}(y_1), \dots, F(y_{n-1}))_{nj+i}$ est un antécédent de z , ce qui fait de $\tilde{\Phi}$ une factorisation. \square

La proposition 2.6.42 permet à l'horloge d'évoluer selon Σ aussi, ce qui, avec le lemme précédent, nous donne une équivalence supplémentaire pour le théorème 2.6.40.

Proposition 5.1.12. *Un sous-décalage sofique est polyuniversel si et seulement s'il est universel.*

Preuve .

- Supposons que Σ est un sous-décalage sofique et $n \in \mathbb{N}$ le pas tel que le décalage complet $\mathbb{2}^{\mathbb{N}}$ est sous-facteur de (Σ, σ^n) (cf théorème 2.6.40). Alors, par le lemme 5.1.11, c'est un sous-facteur de $\mathcal{C}_n \times (\Sigma, \sigma)^{(n)}$; par la proposition 2.6.42, \mathcal{C}_n est un sous-facteur de (Σ, σ) . Par conséquent, par les faits 1.3.2 et 1.2.3, $\mathbb{2}^{\mathbb{N}}$ est sous-facteur de $(\Sigma, \sigma)^{(n+1)}$. On peut se ramener à la polysimulation par la proposition 5.1.7.
- Réciproquement, si Σ est un sous-décalage polyuniversel, alors il polysimule un sous-décalage indénombrable, donc il existe une puissance $n \in \mathbb{N}$ telle que $\Sigma^{(n)}$ est indénombrable, ce qui n'est possible que si Σ l'est également. Par le théorème 2.6.40, Σ est alors universel. \square

Proposition 5.1.13. *Tout sous-décalage sofique universel est polytraçable unidirectionnellement.*

Preuve. Soit Σ un sous-décalage sofique universel. Par le théorème de Weiss, il est facteur lettre à lettre d'un STF Γ , qui, lui-même, par la proposition 5.1.12, est facteur lettre à lettre d'un sous-décalage $\Gamma' \subset \Sigma^{(n)}$ pour un $n \in \mathbb{N}$. Ce sous-décalage peut être pris de type fini par le corollaire 2.5.13. Donc Σ est polytraçable par le corollaire 5.1.10. \square

Polytraçabilité. Nous pouvons donc polytracer les sous-décalages sofiques, soit de type fini (les plus simples), soit universels (les plus complexes). Entre ces deux classes se trouve un vide constitué des sous-décalages qui sont trop simples pour simuler n'importe quel autre sous-décalage, mais trop complexes pour être directement conjugués à leur propre mémorisé.

Parmi ces sous-décalages intermédiaires, les sous-décalages faiblement nilpotents qui ne sont pas nilpotents, comme $(0^*1 + \lambda)0^\infty$, ne sont pas polytraçables puisqu'ils seraient alors le projeté d'un tracé faiblement nilpotent non nilpotent, ce que le théorème 4.7.15 interdit. En revanche, il en existe qui sont polytraçables, comme l'exemple suivant, qui n'est ni un STF, ni universel.

Exemple 5.1.14. Le sous-décalage $\overline{\mathcal{O}_\sigma((0^*1 + 1^*)0^\infty)}$ est *sofique* et *ni universel ni de type fini*. Il est pourtant *polytraçable* : l'idée est d'accomplir une évolution en parallèle des sous-décalages $\mathcal{O}_\sigma(0^*10^\infty)$ et $\overline{\mathcal{O}_\sigma(1^*0^\infty)}$, ce dernier étant un STF et servant de «tuteur» au premier. Formellement, on utilise l'AC

unilatère sur l'alphabet $\{(0, 1), (1, 1), (0, 0)\}$, de rayon 1 et de règle locale :

$$f : \begin{array}{ccc} (\mathbb{2}^2)^2 & \rightarrow & \mathbb{2}^2 \\ ((a_0, b_0), (a_1, b_1)) & \mapsto & \begin{cases} (0, 0) & \text{si } a_0 = 1 \text{ ou } b_0 = 0 \\ (0, 1) & \text{si } b_0 b_1 = 1 \\ (1, 1) & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

5.2 Tracés partiels

On se demande maintenant quelles sont les conditions pour qu'un sous-décalage polytraçable Σ soit **partiellement traçable**, *i.e.* $\Sigma = \tau_F$, où F est un ACP sur un STF A .

Cela revient en quelque sorte à «dégrouper» l'AC d'origine pour considérer chaque cellule individuellement. On peut rattacher cela au problème de la simulation d'AC partitionnés, résolu dans [122].

On considère donc ici un sous-décalage Σ qui est le polytracé d'un AC $G : B^{\mathbb{Z}} \rightarrow B^{\mathbb{Z}}$ où $B \subset A^k$ et $k \in \mathbb{N}^*$; nous allons essayer de simuler celui-ci par un ACP $F : A \rightarrow A$, avec $A \subset A^{\mathbb{N}}$. Quitte à passer au groupé horizontal $G_{\boxplus_{r-1}}$, qui a le même polytracé, on peut supposer que le rayon r de G est 1.

Pour ce faire, on a un «codage» standard \boxplus_k des configurations de $B^{\mathbb{Z}}$ en configurations de $A^{\mathbb{Z}}$. Il faut alors pouvoir retrouver l'antécédent d'une configuration par ce codage, ce de manière locale (pour espérer obtenir un AC).

Gel. On se place sur le sous-décalage $\mathcal{O}_\sigma(\boxplus_k(B^{\mathbb{Z}})) = \bigcup_{0 \leq i < k} \sigma^i(\infty B^\infty)$. Pour pouvoir retrouver sans ambiguïté le décalage i à effectuer pour avoir une configuration de ${}^\infty B^\infty$, on va ajouter l'hypothèse de gel.

Définition 5.2.1 (Code gelé). Un code $W \subset A^h$ est **p -gelé**, pour des entiers $p, h \in \mathbb{N}$, si pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $A^i W$ et $W A^i$ ne s'intersectent pas.

Cette notion présente tout son intérêt quand elle est vue en termes de motifs dans des configurations infinies : ceux-ci ne peuvent alors pas se chevaucher de $h - p$ lettres (ou plus).

Remarque 5.2.2. Si $p, h \in \mathbb{N}$ et $W \subset A^h$, les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. W est p -gelé.
2. Aucun mot de longueur supérieure ou égale à $h - p$ n'est à la fois un préfixe et un suffixe de W .
3. $[W]_0 \cap [W]_i = \emptyset$ si $i \in \llbracket -p, p \rrbracket \setminus \{0\}$.
4. $[W]_i \cap [W]_j = \emptyset$ si $0 < |j - i| \leq p$.

Le gel a quelques propriétés pratiques de simple bon sens.

Fait 5.2.3.

- Si $W \subset A^h$ est p -gelé, $V \subset A^k$ et $U \subset A^l$, avec $k, l \in \mathbb{N}$, alors VWU est encore p -gelé.
- Si W est p -gelé, alors il est aussi q -gelé, pour tout $q < k$.
- Si W est p -gelé, alors tous ses sous-ensembles le sont également.
- Un code p -gelé ne contient aucun mot uniforme. En particulier, il n'est pas plein.

Une propriété qui nous intéresse particulièrement ici apparaît quand p est suffisamment grand.

Proposition 5.2.4. Soient $h \in \mathbb{N}$ et $W \subset A^h$ un code $\lfloor \frac{h}{2} \rfloor$ -gelé. Alors W^2 est $(h - 1)$ -gelé et $\mathcal{O}_\sigma(\boxplus_h(B^{\mathbb{M}})) = \bigsqcup_{0 \leq i < h} \sigma^i(\infty B^\infty)$ est une union disjointe et un $2h$ -STF.

Preuve. Supposons que W est $\lfloor \frac{h}{2} \rfloor$ -gelé. Alors, par le fait 5.2.3, W^2 est $\lfloor \frac{h}{2} \rfloor$ -gelé aussi. De plus, si $\lfloor \frac{h}{2} \rfloor < i < h$, alors $A^i W^2 \cap W^2 A^i \subset A^i (W A^{h-i} \cap A^{h-i} W) A^i = \emptyset$; donc W^2 est $(h - 1)$ -gelé. En conséquence, si $1 \leq i < h$, alors ${}^\infty B^\infty \cap \sigma^i(\infty B^\infty) \subset [BB]_0 \cap [BB]_i = \emptyset$, donc l'union est bien disjointe. Supposons que $x \in A^{\mathbb{Z}}$ tel que $\forall i \in \mathbb{Z}, z_{\llbracket i, i+2h \rrbracket} \in \mathcal{L}(\mathcal{O}_\sigma(\infty B^\infty))$. Montrons par récurrence sur $k \geq 2h$ qu'il existe

$i \in \llbracket 0, h \llbracket$ et $y \in \sigma^i(\infty B^\infty)$ tels que $x_{\llbracket 0, k \llbracket} = y_{\llbracket 0, k \llbracket}$. Le cas de base correspond exactement à notre hypothèse, au centre. Supposons que $i \in \llbracket 0, h \llbracket$, $y \in \sigma^i(\infty B^\infty)$ et $k \geq 2h$ soient tels que $x_{\llbracket 0, k \llbracket} = y_{\llbracket 0, k \llbracket}$. Par hypothèse, on sait qu'il existe $i' \in \llbracket 0, h \llbracket$, $y' \in \sigma^{i'}(\infty B^\infty)$ tels que $x_{\llbracket k-2h, k \llbracket} = y'_{\llbracket k-2h, k \llbracket}$. On obtient $x \in [B]_{\lfloor \frac{k-1}{h} \rfloor h-i} \cap [B]_{\lfloor \frac{k-1}{h} \rfloor h-i'}$, donc par le fait 5.2.3, $i = i'$. De plus, si l'on définit $z \in \sigma^i(\infty B^\infty)$ par $z_{\llbracket -\infty, \lfloor \frac{k-1}{h} \rfloor h-i \llbracket} = x_{\llbracket -\infty, \lfloor \frac{k-1}{h} \rfloor h-i \llbracket}$ et $z_{\llbracket \lfloor \frac{k-1}{h} \rfloor h-i, \infty \llbracket} = y_{\llbracket \lfloor \frac{k-1}{h} \rfloor h-i, \infty \llbracket}$, alors $x_{\llbracket 0, k \llbracket} = z_{\llbracket 0, k \llbracket}$; on a bien montré l'hérédité de la propriété. Dans le cas bilatère, un prolongement similaire de la récurrence vers la gauche nous donne finalement, à la limite, qu'il existe $i \in \llbracket 0, h \llbracket$ tel que $x \in \sigma^i(\infty B^\infty)$. \square

Notons qu'un sous-décalage du type $\mathcal{O}_\sigma(\infty B^\infty)$ n'est pas toujours un STF.

Exemple 5.2.5. Si $B = \{00, 01, 10\}$, alors $\mathcal{O}_\sigma(\infty B^\infty)$ vu comme sous-décalage sur $\mathcal{2}$ est de *type infini*. Un langage interdit est $111 + 1(00)^*01$.

À l'inverse, remarquons que le fait que $\mathcal{O}_\sigma(\infty B^\infty)$ soit un h -STF n'implique pas le gel, comme on peut le voir par exemple si $B = \mathcal{2}^2$.

Dégroupage. Cette hypothèse de gel suffisamment forte permet une sorte de dégroupage de l'espace ∞B^∞ et ainsi une transformation d'un AC sur B en AC (partiel) sur A . Si G est un AC de rayon 1 sur $B \subset A^h$, on définit son **dégroupé** $h^{\text{ème}}$ par l'ACP $\boxtimes_h G$ sur le sous-décalage $\Lambda = \mathcal{O}_\sigma(\infty B^\infty)$, de rayon $2h - 1$ et de règle locale :

$$\begin{aligned} f : \mathcal{L}_{4h-1}(\Lambda) &\rightarrow A \\ w &\mapsto g(u^{-1}, u^0, u^1)_i \text{ si } w \in A^{h-1-i} u^{-1} u^0 u^1 A^i, u^{-1}, u^0, u^1 \in B \text{ et } i \in \llbracket 0, h \llbracket . \end{aligned}$$

Par dégroupé, on entend une sorte d'opération inverse du groupage horizontal. Notons qu'une opération inverse du groupage vertical consisterait en quelque sorte à une recherche de racines.

Proposition 5.2.6. Soit G un AC sur un alphabet $B \subset A^h$ qui est $\lfloor \frac{h}{2} \rfloor$ -gelé, de rayon 1 et de règle locale $g : A^3 \rightarrow A$. Alors on peut construire le dégroupé $\boxtimes_h G$, qui est conjugué hors-contexte à $h \times G$ et a un tracé $\tau_{\boxtimes_h G} = \overset{\circ}{\tau}_G$.

Preuve. La définition de la règle locale f ci-dessus n'est pas ambiguë puisque le i est unique par la propriété de gel. Pour tout décalage $i \in \llbracket 0, h \llbracket$, $\boxtimes_h G \sigma^i$ est une conjugaison hors-contexte de $(\sigma^{h-i}(\infty B^\infty), \boxtimes_h G)$ dans (B^M, G) . Par construction, $f(A^{h-1} u^{-1} u^0 u^1 A^{h-1}) = g(u^{-1} u^0 u^1)$, donc par récurrence sur la génération $j \in \mathbb{N}$, on voit que si $i \in \llbracket 0, h \llbracket$ et $x \in \sigma^i(\infty B^\infty)$, alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $\boxtimes_h G^j(x)_0 = G^j((x_{\llbracket kh-i, (k+1)h-i \llbracket})_{i \in \mathbb{Z}})_i$. On a bien $\tau_{\boxtimes_h G} = \bigcup_{0 \leq i < h} \pi_i(\tau_G)$. \square

Barrières. La condition de gel pour les mots de B est très restrictive et, en particulier, n'est pas respectée par la plupart des cas étudiés dans la section 5.1. En revanche, B peut être modifié de façon à obtenir cette propriété, en se juxtaposant à un ensemble de mots fortement gelés, appelés barrières.

Définition 5.2.7 (Barrière). Une **barrière** pour le code $B \subset A^k$, avec $k \in \mathbb{N}$, est un couple $(\Upsilon, \delta_\Upsilon)$ constitué d'un code $\lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor$ -gelé $\Upsilon \subset A^l$ et d'une fonction $\delta_\Upsilon : \Upsilon \rightarrow \Upsilon$. Cette dernière peut être vue comme la règle locale d'un AC $\Delta_\Upsilon : \Upsilon^{\mathbb{Z}} \rightarrow \Upsilon^{\mathbb{Z}}$ de rayon 0 et de polytracé $\overset{\circ}{\tau}_{\Delta_\Upsilon} = \bigcup_{0 \leq i < l} \pi_i(\mathcal{O}_{\delta_\Upsilon})$.

Remarque 5.2.8. Si $B = A^k$, avec $k \in \mathbb{N}$, alors la longueur l d'un code de *barrière* $\Upsilon \subset A^l$ pour B doit être strictement supérieure à k .

En pratique, on construira des barrières qui fonctionnent pour n'importe quel code $B \subset A^k$, donc cette condition sera respectée.

Les barrières vont donc être utilisées pour séparer de façon non ambiguë les mots représentant des lettres de B .

Proposition 5.2.9. Soient $G : B^{\mathbb{Z}} \rightarrow B^{\mathbb{Z}}$ un AC, où $B \subset A^k$, et $(\Upsilon \subset A^l, \delta_{\Upsilon})$ une barrière pour B . Alors on peut construire le dégroupé $F = \boxtimes_{k+l}(\Delta_{\Upsilon} \times G)$ sur le sous-décalage $\Lambda = \mathcal{O}_{\sigma}(\infty)(\Upsilon B)^{\infty}$. G est un facteur hors-contexte et $\tau_F = \overset{\circ}{\tau}_G \cup \overset{\circ}{\tau}_{\Delta_{\Upsilon}}$.

Preuve. Si $\Upsilon \subset A^l$ est $\lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor$ -gelé, alors, par le fait 5.2.3, $\Upsilon B \subset A^{k+l}$ l'est également. On applique alors la proposition 5.2.6 à l'AC $\Delta_{\Upsilon} \times G$, vu sur l'alphabet ΥB . Il ne suffit plus qu'à remarquer que G est facteur hors-contexte de $\Delta_{\Upsilon} \times G$, qui est lui-même facteur hors-contexte de $(k+l) \times \Delta_{\Upsilon} \times G$. \square

Le résultat précédent nous servira notamment lorsqu'on pourra s'arranger pour que le tracé correspondant à l'évolution de la barrière soit inclus dans le polytracé de G .

Exemple 5.2.10. Voici un exemple très simple de code de barrières : $\Upsilon_{(0,1)}^k = \{10^k\}$, où 0 et 1 sont deux lettres distinctes de A .

Pour tous états distincts $0, 1 \in A$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $\Upsilon_{(0,1)}^k$ est k -gelé, car pour tout $i < k$, $A^i 10^k \cap 10^k A^i = \emptyset$.

On peut donc utiliser ce code comme barrière dans la proposition 5.2.9.

Corollaire 5.2.11. Si G est un AC sur $B \subset A^k$, alors on peut construire le dégroupé $\boxtimes_{2k+1}(\text{id}_{\Upsilon_{(0,1)}^k} \times G)$ sur $\Lambda = \mathcal{O}_{\sigma}(\infty)(\Upsilon_{(0,1)}^k B)^{\infty}$. Il est conjugué hors-contexte à $(2k+1) \times G$, puisque $|\Upsilon_{(0,1)}^k| = 1$.

Corollaire 5.2.12. Soit $\Sigma \subset A^{\mathbb{N}}$ un sous-décalage polytraçable contenant deux mots infinis uniformes distincts 0^{∞} et 1^{∞} . Alors Σ est partiellement traçable.

Preuve. Si $\Sigma = \overset{\circ}{\tau}_G$ où G est un AC sur l'alphabet $B \subset A^k$, il suffit d'appliquer la proposition 5.2.9 à la barrière $\Upsilon_{0,1}^k$ évoluant selon $\delta_{\Upsilon_{0,1}^k} : u \mapsto u$. On obtient un AC $F : \Lambda \rightarrow \Lambda$ tel que $\tau_F = \overset{\circ}{\tau}_G \cup \{0^{\infty}, 1^{\infty}\} = \overset{\circ}{\tau}_G$. \square

Barrières dynamiques. Dans le cas où le polytracé ne contient pas deux mots uniformes, on doit trouver une autre condition pour pouvoir construire un code gelé. L'exemple suivant nous donne un code de barrières, qu'on pourra faire évoluer selon une règle non triviale.

Exemple 5.2.13. Soient $p, k \in \mathbb{N}$ tels que $p \geq k$ et $\Upsilon^{p,k} = \{a^p \bar{u} u a^k \mid a \in A, u \in A^k \setminus \{a^k\}\} \subset A^l$, où $l = p + 3k$. Alors le code $\Upsilon^{p,k}$ est p -gelé.

Preuve. Supposons, par l'absurde, qu'on ait deux mots $v = a^p \bar{u} u a^k$ et $w = a'^p \bar{u}' u' a'^k$ et une position $i \in \llbracket 0, p \rrbracket$ telle que $v_{\llbracket i, l \rrbracket} = w_{\llbracket 0, l-i \rrbracket}$. Tout d'abord, on peut remarquer que $a = v_i = w_0 = a'$.

- Si $k \leq i \leq p$, alors on a $\bar{u} = v_{\llbracket p, p+k \rrbracket} = w_{\llbracket p-i, p+k-i \rrbracket} = a^k$; cela est interdit par définition.
- Si $0 \leq i < k$, alors on peut utiliser la symétrie des mots $\bar{u} u$ et $\bar{u}' u'$. On définit $m = \min \{q \in \llbracket 0, l \rrbracket \mid v_q \neq a\} = i + \min \{q \in \llbracket 0, l \rrbracket \mid w_q \neq a\}$. D'une part :

$$\begin{aligned} m &= p + \min \{q \in \llbracket 0, k \rrbracket \mid u_q \neq a\} \\ &= p + k - \max \{q \in \llbracket 0, k \rrbracket \mid \bar{u}_q \neq a\} \\ &= 2p + k - \max \{q \in \llbracket 0, l \rrbracket \mid v_q \neq a\} . \end{aligned} \tag{5.1}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} m &= i + p + \min \{q \in \llbracket 0, k \rrbracket \mid u'_q \neq a\} \\ &= i + p + k - \max \{q \in \llbracket 0, k \rrbracket \mid \bar{u}'_q \neq a\} \\ &= 2i + 2p + k - \max \{q \in \llbracket 0, l \rrbracket \mid v_q \neq a\} . \end{aligned} \tag{5.2}$$

Cela nous donne $i = 0$. \square

Dans le cas où le polytracé considéré admet un mot périodique u^{∞} non uniforme, on peut construire une barrière consistant en un sous-code $\Upsilon_u^k = \left\{ u_i^{k+3|u|} \bar{\gamma}^i(u) \gamma^i(u) u_i^{|u|} \mid 0 \leq i < |u| \right\}$ de $\Upsilon^{k+3|u|, |u|}$, où $\gamma^i(u)$ représente la $i^{\text{ème}}$ rotation $u_i \dots u_{|u|-1} u_0 \dots u_{i-1}$ du mot u .

Corollaire 5.2.14. *Soit $\Sigma \subset A^{\mathbb{N}}$ un sous-décalage polytraçable contenant un mot périodique ${}^{\infty}u^{\infty}$ de période $|u| > 1$. Alors Σ est partiellement traçable.*

Preuve. Si $\Sigma = \overset{\circ}{\tau}_G$, où G est un AC sur l'alphabet $B \subset A^k$, il suffit d'appliquer la proposition 5.2.9 à la barrière Υ_u^k évoluant selon $\delta_{\Upsilon_u^k} : a^{k+3|u|}v\bar{v}a^{|u|} \mapsto v_1^{k+3|u|}\gamma(v)\overline{\gamma(v)}v_1^{|u|}$. Il est aisé de voir que $\overset{\circ}{\tau}_{\Delta_{\Upsilon_u^k}} = \mathcal{O}_{\sigma}(u^{\infty})$, ce qui nous permet d'obtenir un AC $F : A \rightarrow A$ tel que $\tau_F = \overset{\circ}{\tau}_G$. \square

Traçabilité partielle. Nous avons traité deux cas de polytracés dans les deux sous-sections précédentes. En fait, nous allons voir que, dans le cas sofique, seuls les polytracés nilpotents ne s'y ramènent pas ; en effet, on ne peut pas imaginer de barrières nilpotentes, puisqu'un ensemble gelé ne peut contenir de mot uniforme. Cependant, il est aisé de les tracer partiellement avec une méthode plus directe.

Lemme 5.2.15. *Tout sous-décalage nilpotent est partiellement traçable.*

Preuve. Soit $\Sigma \subset A^{\mathbb{N}}$ un sous-décalage tel que $\sigma^J(\Sigma)$ est réduit à un singleton $\{0^{\infty}\}$ pour un $J \in \mathbb{N}$. Soient $B = \{0^{3J}\bar{u}u0^J \mid u \in \mathcal{L}_J(\Sigma)\} \subset A^h$ avec $h = 6J$ et Δ_B l'AC sur B de rayon 0 et de règle locale :

$$\delta_B : \quad B \rightarrow B \\ 0^{3J}\bar{u}u0^J \mapsto 0^{3J+1}\overline{u_{\llbracket 0, J-2 \rrbracket}}u_{\llbracket 0, J-2 \rrbracket}0^{J+1} .$$

Remarquons tout d'abord que pour $i \in \llbracket 4J, 6J \rrbracket$, $\pi_i(T_{\Delta_B}(0^{3J}\bar{u}u0^J)) = \sigma^{i-4J}(u0^{\infty})$; pour $i \in \llbracket 0, 4J \rrbracket$, $\pi_i(T_{\Delta_B}(0^{3J}\bar{u}u0^J)) = \sigma^{4J-1-i}(u0^{\infty})$. Globalement, $\overset{\circ}{\tau}_{\Delta_B} = \Sigma$. D'autre part, en tant que sous-code de $\Upsilon^{3J, J}$, $C = B \setminus \{0^{6J}\}$ est $3J$ -gelé. Par la proposition 5.2.6, on peut donc construire sans ambiguïté sur $A = \mathcal{O}_{\sigma}({}^{\infty}B^{\infty})$ un ACP F de rayon $h - 1$ et de règle locale :

$$f : \mathcal{L}_{2h-1}(A) \rightarrow A \\ w \mapsto \begin{cases} \delta_B(u) & \text{si } w = A^i u A^{h-1-i}, u \in C \text{ et } i \in \llbracket 0, h \rrbracket \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

qui vérifie bien $\tau_F = \overset{\circ}{\tau}_{\Delta_B} = \Sigma$. \square

Proposition 5.2.16. *Tout polytracé sofique est partiellement traçable.*

Preuve. Par le corollaire 2.4.9, un sous-décalage sofique admet toujours un mot périodique u^{∞} . S'il est unique, alors le sous-décalage est faiblement nilpotent par le fait 2.6.28 ; puisqu'il s'agit d'un polytracé, il est nilpotent par le théorème 4.7.15, donc partiellement traçable par le lemme 5.2.15. S'il y a plusieurs mots périodiques distincts et qu'il en existe un non uniforme, on peut appliquer le corollaire 5.2.14 ; dans le cas contraire il y a plusieurs mots périodiques uniformes distincts et on peut appliquer le corollaire 5.2.12. \square

Corollaire 5.2.17. *Tous les STF et tous les sous-décalages soifiques universels sont partiellement traçables.*

5.3 Tracés

On cherche maintenant à généraliser les résultats de la section précédente pour trouver des conditions de traçabilité par un AC, non plus sur un STF en général, mais sur le décalage complet $A^{\mathbb{Z}}$. On considère toujours un sous-décalage Σ qui est le polytracé d'un AC F de rayon 1 sur l'alphabet $B \subset A^h$, où $h \in \mathbb{N}^*$, et nous allons effectuer le même genre de construction que pour les tracés partiels : les cellules ayant un voisinage **valide**, *i.e.* structuré par des barrières, évoluent en mode **exécution** comme précédemment. Cette fois cependant, il nous faudra gérer également les configurations de $A^{\mathbb{Z}}$ qui ne sont pas dans $\mathcal{O}_{\sigma}({}^{\infty}B^{\infty})$, dites **invalides**. On veut pour ces configurations un comportement à la fois simple et qui n'influe pas sur le tracé.

Prolongement. Lorsqu'on a un ACP F sur un STF $\Lambda \subset A^{\mathbb{Z}}$ d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$, on peut le prolonger par continuité sur l'ensemble des configurations de $A^{\mathbb{Z}}$ en appliquant un mode par **défaut** quand le voisinage n'est pas un mot de Λ (en s'arrangeant pour que le diamètre soit plus grand que k). Le tracé s'en retrouve alors sensiblement modifié. Prenons comme mode par défaut une fonction $\xi : A \rightarrow A$, qui a l'avantage de ne pas dépendre d'une quelconque structure de la configuration. L'autre avantage, dans le problème de la traçabilité d'un sous-décalage, est qu'on sait déjà que tous les sous-décalages considérés contiennent bien un sous-décalage déterministe \mathcal{O}_ξ .

Considérons que F a un diamètre $d \in \mathbb{N}$, une ancre $m \in \mathbb{N}$ et une règle locale $f : \mathcal{L}_d(\Lambda) \rightarrow A$. Quitte à l'agrandir, on peut supposer que $d \geq k$. Alors on peut prolonger F sur $A^{\mathbb{Z}}$ en l'AC $F + \xi$ de diamètre d , d'ancre m et de règle locale :

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \quad & A^d \rightarrow A \\ u = (u_i)_{-m \leq i < d-m} \mapsto & \begin{cases} f(u) & \text{si } u \in \mathcal{L}_d(\Lambda) \\ \xi(u_0) & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Remarque 5.3.1. Pour toute fonction $\xi : A \rightarrow A$ et tout ACP F sur le STF Λ , $F + \xi$ admet F comme sous-système. En particulier, $\tau_F \subset \tau_{F+\xi}$.

En combinant le corollaire 5.2.11 avec la remarque précédente, on retrouve la construction classique suivante.

Fait 5.3.2. *Tout AC G sur l'alphabet $B \subset A^k$, $k \in \mathbb{N}^*$ est sous-facteur cellulaire du prolongement $\boxtimes_{2k+1}(\text{id}_{\Upsilon_{(0,1)}^k} \times G) + \xi$ de son dégroupé, qui est un AC sur A , avec $\xi : A \rightarrow A$.*

Un cas particulier pratique est obtenu quand ξ renvoie une lettre constante 0. Si $l \in \mathbb{N}$, on notera $F + 0^l$ l'AC défini sur $A^{\mathbb{Z}}$ par un diamètre $l + k$ (en le supposant plus grand que celui d de F), une ancre m et une règle locale :

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \quad & A^{l+k} \rightarrow A \\ u = (u_i)_{-m \leq i < l+k-m} \mapsto & \begin{cases} f(u) & \text{si } u \in \mathcal{L}_{l+k}(\Lambda) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Cette notation sous-entend donc le choix de l'ordre pour un même STF. Mais il suffit, dans notre construction, de s'assurer que le diamètre de F n'est pas trop petit pour qu'on obtienne la conséquence suivante.

Proposition 5.3.3. *Soient F un ACP sur un STF Λ et $x \notin \Lambda$. Alors l'image de x par $F + 0^l$ contient le sous-mot 0^l .*

Preuve. Supposons que Λ est d'ordre k et que m est l'ancre de F . Alors il existe une cellule $i \in \mathbb{M}$ telle que $x_{\llbracket i, i+k \rrbracket} \notin \mathcal{L}_k(\Lambda)$. Par construction, aucune cellule $n \in \llbracket i + m - l, i + m \rrbracket$ n'a un voisinage $\llbracket n - m, n - m + l + k \rrbracket$ valide, donc $(F + 0^l)(x)_n = 0$. \square

Voici un exemple qui ne concerne pas le problème de la traçabilité, mais qui permet de comprendre le type de simulation permise par notre construction.

Exemple 5.3.4. Soit F un AC sur l'alphabet $\mathbb{2}$. Alors le dégroupé $\tilde{G} = \boxtimes_5(\text{id}_{\Upsilon_{(0,1)}^2} \times \sigma \times F)$ peut être prolongé par continuité en $G = \tilde{G} + 0$ sur l'espace $\mathbb{2}^{\mathbb{Z}}$. G admet alors F comme sous-facteur et a un tracé complet $\mathbb{2}^{\mathbb{N}}$. En particulier, si F n'est pas transitif, il peut tout de même avoir un tracé transitif. La complexité du tracé de largeur 1 (ici c'est un sous-décalage markovien) ne rend donc pas compte de la complexité de l'AC (ici F peut être nul, ou intrinsèquement universel) : on peut voir que G n'est pas sofique si F ne l'est pas.

En revanche, ce type de prolongement n'est pas satisfaisant pour notre problème puisqu'il crée des tracés mutants, qui changent leur mode entre exécution et défaut. Dans la suite, nous allons nous resservir

des solutions du problème de la polytraçabilité, afin de créer un troisième mode, qui va empêcher la prolifération des zones invalides : le mode **frontière**.

Macrocellules. Considérons un code $B \subset A^h$. On définit une **macrocellule** (valide) d'une configuration $x \in A^{\mathbb{Z}}$ comme étant un sous-mot $x_{\llbracket j, j+h \rrbracket} \in B$, tel que pour tout $i \in \llbracket j, j+h \rrbracket$, $x_{\llbracket i, i+h \rrbracket} \notin B$, de telle sorte qu'aucune cellule ne puisse avoir plusieurs interprétations différentes – décalées l'une par rapport à l'autre – de son voisinage comme un mot de B . De manière équivalente, $x_{\llbracket j, j+2h \rrbracket} \in \Theta_B = BA^h \setminus \bigcup_{i \in \llbracket 0, h \rrbracket} A^i BA^{h-i}$.

Remarque 5.3.5. Par construction, Θ_B est h -gelé pour tout $B \subset A^h$.

Si, de plus, B est $\lfloor \frac{h}{2} \rfloor$ -gelé, cela implique la non trivialité de Θ_B , qui égale alors $BA^h \setminus \bigcup_{i \in \llbracket \lfloor \frac{h}{2} \rfloor, h \rrbracket} A^i BA^{h-i}$. En effet, la proposition 5.2.4 nous donne $BB \subset \Theta_B$: l'ensemble $\mathcal{O}_\sigma(\infty B^\infty)$ des configurations valides n'a que des macrocellules valides. On en déduit en particulier que $\Theta_B A^h \cap A^h \Theta_B = B \Theta_B$. On notera en revanche, grâce au dernier point du fait 5.2.3, que $\Theta_B \neq A^{2h}$; tout n'est pas macrocellule.

Pour un voisinage constitué de macrocellules successives, on peut utiliser le mode exécution. Le mode par défaut peut, quant à lui, être utilisé lorsque le voisinage ne comporte aucune macrocellule. Pour ne pas que les zones d'invalidité se répandent, il va maintenant falloir définir un mode frontière, lorsque le voisinage contient une macrocellule juxtaposée à une zone invalide, en s'assurant que l'évolution de cette macrocellule pourra influencer celle de ses voisines éventuelles de gauche. Cela peut être réalisé en ajoutant quelques conditions sur l'AC de départ. L'extension des AC en un automate semifini présentée dans la proposition 3.7.1 va nous permettre de gérer des configurations partiellement valides.

Autodésorganisation. Il peut arriver, lorsque $B \subsetneq A^h$ que des barrières encadrent des zones invalides. Il vaudrait mieux alors pouvoir les supprimer, de peur qu'après application du mode par défaut, la zone ne devienne une macrocellule valide. La suppression doit être définitive : on veut interdire aux barrières d'apparaître. C'est en quelque sorte une «autodésorganisation», puisque la cellule doit pouvoir reconnaître, depuis son voisinage, le cas où elle doit supprimer la structure pour que cette zone soit à jamais vide d'information. Tout cela est possible en ajoutant une condition permettant de construire une barrière distinguable du mode par défaut.

Un sous-décalage Σ a un **cycle distinct du défaut** (CDD) s'il contient un sous-décalage *déterministe* \mathcal{O}_ξ et un mot périodique w^∞ , avec $\xi : A \rightarrow A$ et $w \in A^+ \setminus \xi(A)^+$. On peut alors définir le code de barrières $\Upsilon_{\xi, w}^k = \left\{ a^{k+3|w|} \gamma^j(w) \overline{\gamma^j(w)} a^{|w|} \mid a \in \xi(A), j < |w| \right\}$. En tant que sous-code de $\Upsilon^{k+3|w|, |w|}$, il est $(k+3|w|)$ -gelé. On peut le faire évoluer par la fonction

$$\delta_{\Upsilon_{\xi, w}^k} : \begin{array}{l} \Upsilon_{\xi, w}^k \rightarrow \Upsilon_{\xi, w}^k \\ a^{k+3|w|} \overline{u \bar{u} a}^{|w|} \mapsto \xi(a)^{k+3|w|} \overline{\gamma(u) \overline{\gamma(u)} \xi(a)}^{|w|} . \end{array}$$

Le polytracé correspondant à ce code de barrières est bien dans le sous-décalage souhaité.

Lemme 5.3.6.

$$\overset{\circ}{\tau}_{\Upsilon_{\xi, w}^k} \subset \mathcal{O}_\xi \cup \mathcal{O}_\sigma(w^\infty) .$$

Preuve. Soit $u = a^{k+3|w|} \gamma^j(w) \overline{\gamma^j(w)} a^{|w|}$, avec $a \in \xi(A)$ et $j < |w|$. Si $i \in \llbracket 0, k+3|w| \rrbracket \sqcup \llbracket k+5|w|, k+6|w| \rrbracket$, alors la fonction ξ est toujours appliquée et $\pi_i(T_{\Delta_{\Upsilon_{\xi, w}^k}}(u)) = \mathcal{O}_\xi(a)$. Si $i \in \llbracket k+3|w|, k+4|w| \rrbracket$, alors une rotation est toujours appliquée et $\pi_i(T_{\Delta_{\Upsilon_{\xi, w}^k}}(u)) = \sigma^{j+i-k}(w^\infty)$. Par symétrie, on remarque que si $i \in \llbracket k+4|w|, k+5|w| \rrbracket$, alors $\pi_i(T_{\Delta_{\Upsilon_{\xi, w}^k}}(u)) = \pi_{2k+8|w|-i}(T_{\Delta_{\Upsilon_{\xi, w}^k}}(u))$. \square

Remarque 5.3.7. Ce code de barrières a une propriété supplémentaire par rapport à $\Upsilon^{k+3|w|, |w|}$ (cf exemple 5.2.13) : l'application du mode par défaut ne peut pas faire apparaître de barrières.

En effet, pour tout mot de $u \in \Upsilon_{\xi, w}^k$, il existe une cellule $i \in \llbracket k+3|w|, k+4|w| \rrbracket$ telle que $u_i \notin \xi(A)$.

Voilà la construction fondamentale de cette section, que l'on va pouvoir appliquer ensuite aux codes correspondant à cette nouvelle barrière.

Lemme 5.3.8. *Soient $\xi : A \rightarrow A$, $B \subset \xi(A)^p(\xi(A)^p)^C$ un code p -gelé et \tilde{G} un automate semifini sur l'alphabet B , d'ancre 0 et de diamètre 2. Alors on peut construire un AC $F : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ tel que $\tau_F = \tau_{\tilde{G}} \cup \mathcal{O}_{\xi}$.*

Preuve. Le gel de B permet de définir sans ambiguïté l'AC F de diamètre $d = 8p - 1$, d'ancre $m = 2p - 1$ et de règle locale :

$$f : A^d \rightarrow A$$

$$w \mapsto \begin{cases} \tilde{g}(u^0, u^1)_i & \text{si } \begin{cases} w \in A^{m-i}u^0u^1u^2A^i, i \in \llbracket 0, m \rrbracket, \\ u^0u^1, u^1u^2 \in \Theta_B \end{cases} & \text{(exécution)} \\ \tilde{g}(u^0, \lambda)_i & \text{si } \begin{cases} w \in A^{m-i}u^0u^1u^2A^i, i \in \llbracket 0, m \rrbracket, \\ u^0u^1 \in \Theta_B, u^1u^2 \notin \Theta_B \end{cases} & \text{(frontière)} \\ \xi(w_0) & \text{sinon (défaut).} \end{cases}$$

Il reste à montrer que les trois parties de la définition sont stables : une macrocellule restera toujours une macrocellule et inversement. Cette définition nous donne directement :

$$F([\Theta_B]_0) \subset [B]_0 . \quad (5.3)$$

D'autre part, l'apparition dans une configuration d'une lettre qui n'est pas dans $\xi(A)$ signifie qu'on a appliqué une des deux premières parties de la définition (exécution ou frontière) et qu'on est sur la moitié droite de B :

$$F^{-1}([\xi(A)]_0^C) \subset \bigcup_{p \leq i < 2p} [\Theta_B]_{-i} . \quad (5.4)$$

Par hypothèse, $[B]_0 \subset \bigcup_{p \leq i < 2p} [\xi(A)]_i^C$, ce qui, combiné à (5.4), nous donne :

$$F^{-1}([B]_0) \subset \bigcup_{-p \leq i \leq p} [\Theta_B]_i .$$

En d'autres termes, si $x \in F^{-1}([B]_0)$, alors $x \in [\Theta_B]_i$ pour un $i \in \llbracket -p, p \rrbracket$. Dans ce cas, $F(x) \in [B]_0 \cap F([\Theta_B]_i) \subset [B]_0 \cap [B]_i$ (de (5.3)). Mais puisque B est p -gelé, on en déduit que $i = 0$:

$$F^{-1}([B]_0) \subset [\Theta_B]_0 .$$

En combinant avec (5.3), on obtient :

$$F^{-1}([B]_0) = [\Theta_B]_0 . \quad (5.5)$$

La définition des macrocellules nous donne $[\Theta_B]_0 = [B]_0 \setminus \bigcup_{1 \leq i < k} [B]_i$; par conséquent :

$$F^{-1}([\Theta_B]_0) = F^{-1}([B]_0) \setminus \bigcup_{1 \leq i < k} F^{-1}([B]_i) . \quad (5.6)$$

Puisque Θ_B est k -gelé, (5.3) nous donne

$$F^{-1}([\Theta_B]_0) = [\Theta_B]_0 . \quad (5.7)$$

On obtient donc une partition en trois ensembles disjoints et F -invariants :

$$\begin{aligned} A^{\mathbb{Z}} &= X_1 \sqcup X_2 \sqcup X_3 \\ \text{où } X_1 &= \bigcup_{0 \leq i < 2p} \bigcap_{q \in \mathbb{Z}} [B]_{2pq-i} \text{ (configurations valides),} \\ X_2 &= \bigcup_{0 \leq i < 2p; q \in \mathbb{N}} [\Theta_B]_{-i} \cap [\Theta_B]_{2pq-i}^C \text{ (configurations partiellement valides au centre),} \\ X_3 &= \bigcap_{0 \leq i < 2p} [\Theta_B]_i^C \text{ (configurations invalides au centre).} \end{aligned}$$

Le sous-décalage tracé peut donc être décomposé de la même manière :

$$\tau_F = T_F(X_1) \cup T_F(X_2) \cup T_F(X_3) .$$

Remarquons que $X_1 = \mathcal{O}_\sigma(\infty B^\infty)$ et que $F|_{X_1}$ est l'ACP défini dans la proposition 5.2.6 ; par conséquent sa contribution $T_F(X_1)$ au tracé égale le polytracé $\overset{\circ}{\tau}_{\tilde{G}|_{B^{\mathbb{Z}}}}$ de l'automate semifini correspondant.

Par la troisième partie de la définition, le mode par défaut sur la cellule centrale ne consiste qu'en l'application de ξ , donc $T_F(X_3) = \{(\xi^j(a))_{j \in \mathbb{N}} \mid a \in A\}$.

Soit maintenant $x \in X_2$, *i.e.* il existe $i \in \llbracket 0, 2p \rrbracket$ et $q \in \mathbb{N}$ tels que $x_{\llbracket -i, 2p(q+2)-i \rrbracket} = u^0 \dots u^{q-1} u^q u^{q+1}$, avec $u^s u^{s+1} \in \Theta_B$ pour $0 \leq s < q$ et $u^q u^{q+1} \notin \Theta_B$. On peut voir $u = u^0 \dots u^{q-1}$ comme un mot fini de B^+ . La définition et une récurrence immédiate nous donnent que pour toute génération $j \in \mathbb{N}$, $F^j(x)_{\llbracket 2pq-i, 2p(q+2)-i \rrbracket} \notin \Theta_B$ et pour tout $s \in \llbracket 0, q \rrbracket$, $F^j(x)_{\llbracket 2ps-i, 2p(s+2)-i \rrbracket} \in \Theta_B$ et $F^j(x)_{\llbracket 2ps-i, 2p(s+1)-i \rrbracket} = \tilde{G}^j(u)_s$. Il résulte que $T_F(x) = \pi_i(T_{\tilde{G}}(u))$, donc $T_F(X_2) = \overset{\circ}{\tau}_{\tilde{G}|_{B^+}}$.

On obtient bien, globalement, $\tau_F = \overset{\circ}{\tau}_{\tilde{G}} \cup \mathcal{O}_\xi$. □

Lemme 5.3.9. *Soient G un AC unidirectionnel sur l'alphabet $B \subset A^k$, $\xi : A \rightarrow A$ et $(\Upsilon, \delta_\Upsilon)$ une barrière pour B , avec $p \leq k$ et $\Upsilon \subset \xi(A)^k (\xi(A)^p)^C$. Alors on peut construire un AC $F : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ tel que $\tau_F = \overset{\circ}{\tau}_G \cup \overset{\circ}{\tau}_{\Delta_\Upsilon} \cup \mathcal{O}_\xi$.*

Preuve. Quitte à passer au groupé, on peut supposer que le rayon de G est 1. On peut appliquer la proposition 3.7.1 à l'AC $\Delta_\Upsilon \times G$ vu sur l'alphabet ΥB : il peut être étendu en un automate semifini \tilde{G} sur l'alphabet ΥB , d'ancre 0, de diamètre 2, de même tracé $\tau_{\tilde{G}} = \tau_{\Delta_\Upsilon \times G}$, donc de même polytracé $\overset{\circ}{\tau}_{\tilde{G}} = \overset{\circ}{\tau}_{\Delta_\Upsilon} \cup \overset{\circ}{\tau}_G$. On applique maintenant le lemme 5.3.8 à \tilde{G} : on peut construire un AC F sur l'alphabet A tel que $\tau_F = \overset{\circ}{\tau}_{\tilde{G}} \cup \mathcal{O}_\xi = \overset{\circ}{\tau}_{\Delta_\Upsilon} \cup \overset{\circ}{\tau}_G \cup \mathcal{O}_\xi$. □

Lemme 5.3.10. *Soient $\xi : A \rightarrow A$ et G un AC unidirectionnel sur l'alphabet $B \subset A^k$ et $w \in A^+ \setminus \xi(A)^+$ tel que le mot périodique w^∞ est dans le tracé τ_F . Alors on peut construire un AC $F : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ tel que $\tau_F = \overset{\circ}{\tau}_G \cup \mathcal{O}_\xi$.*

Preuve. On peut appliquer le lemme 5.3.9 à G avec $\Upsilon = \Upsilon_{\xi, w}^k$, qui est $(k + 3|w|)$ -gelé en tant que sous-code de $\Upsilon^{k+3|w|, |w|}$ (cf exemple 5.2.13) et vérifie bien $\Upsilon_{\xi, w}^k \subset \xi(A)^{k+3|w|} (\xi(A)^{3|w|})^C$ par la remarque 5.3.7. On obtient un AC F tel que $\tau_F = \overset{\circ}{\tau}_G \cup \overset{\circ}{\tau}_{\Delta_{\Upsilon_{\xi, w}^k}} \cup \mathcal{O}_\xi = \overset{\circ}{\tau}_G \cup \mathcal{O}_\xi$ grâce au lemme 5.3.6. □

Proposition 5.3.11. *Tout sous-décalage CDD polytraçable unidirectionnellement est traçable.*

Preuve. Supposons qu'on a un AC unidirectionnel $G : B^{\mathbb{Z}} \rightarrow B^{\mathbb{Z}}$ dont le polytracé $\overset{\circ}{\tau}_G$ contient un sous-décalage déterministe \mathcal{O}_ξ et un mot périodique w^∞ , avec $\xi : A \rightarrow A$ et $w \in A^+ \setminus \xi(A)^+$. On peut appliquer directement le lemme 5.3.10 pour construire un AC $F : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ tel que $\tau_F = \overset{\circ}{\tau}_G \cup \mathcal{O}_\xi = \overset{\circ}{\tau}_G$. □

Cette condition pour la transformation des polytracés en tracés est assez restrictive ; c'est cependant elle qui permet la suppression des barrières encadrant des zones invalides.

Traçabilité. Voici le résultat qui combine les résultats sur la polytraçabilité et la traçabilité.

Corollaire 5.3.12 ([52]). *Tous les STF CDD et tous les sofiques universels CDD sont traçables.*

Preuve. Ceci découle directement des propositions 5.3.11, 5.1.9 et 5.1.13. \square

Voici un exemple de sous-décalage traçable qui n'est pas concerné par le corollaire 5.3.12.

Exemple 5.3.13 (Dénombrable CDD polyfacteur d'un STF). Le sous-décalage $(0^*1+1^*)0^\infty$ est *sofique*, de *type infini*, *dénombrable*, mais *traçable*.

Preuve. Le sous-décalage $\Gamma = \overline{\mathcal{O}_\sigma((0,1)^*(1,1)(0,0))^\infty}$ sur l'alphabet $\mathcal{2}^2$ est un sous-décalage markovien, donc traçable. On peut voir facilement que $\pi_0(\Gamma) = 0^*10^\infty + 0^\infty$ et $\pi_1(\Gamma) = 1^*0^\infty$, l'union des deux égalant bien le sous-décalage demandé. De plus, il est CDD puisqu'il contient le sous-décalage déterministe $A0^\infty$ et le cycle 1^∞ . Il est donc traçable. \square

Nous avons vu dans la proposition 3.5.1 que les sous-décalages traçables doivent tous contenir un sous-décalage déterministe. Cette condition n'est, en revanche, pas suffisante, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 5.3.14 (STF fini contenant un sous-décalage déterministe, mais non traçable). Aucun AC ne *trace* le sous-décalage $\Sigma = \{0^\infty, (01)^\infty, (10)^\infty\}$, même si c'est un *STF* contenant un sous-décalage *déterministe*.

Preuve. Par contradiction, supposons qu'on ait un AC F de tracé $\tau_F = \Sigma$, de diamètre d , d'ancre m et de règle locale f . Il est alors surjectif (et même involutif), puisque pour toute configuration $x \in A^\mathbb{Z}$, $F^2(x) = x$. Grâce au théorème 4.1.1, il est équilibré *i.e.* $\forall a \in A, |f^{-1}(a)| = |A|^{d-1}$. En particulier, $|f^{-1}(1)| = |A^m 0 A^{d-m-1}|$. De plus, de la définition de Σ , $f^{-1}(1) \subset A^m 0 A^{d-m-1}$. L'égalité des cardinaux nous donne $A^m 0 A^{d-m-1} = f^{-1}(1)$. Cela amène la contradiction $0^\infty \notin \Sigma$. \square

Cependant, la condition CDD n'est pas non plus nécessaire, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 5.3.15 (Sous-décalage non CDD traçable). Soit f la règle locale d'ancre 3 et de diamètre 7 telle que $f(u_{-3}000111) = 1$, $f(000111u_3) = 0$, $f(u_{-3}001011) = 0$, $f(001011u_3) = 1$ et $f(u) = u_0$ sinon. Le tracé de l'AC correspondant est $\tau_F = \{0^\infty, (10)^\infty, (01)^\infty, 1^\infty\}$. Dans ce cas, τ_F est *fini* mais pas *CDD*.

Le cas qui se situe entre la condition de contenir un sous-décalage déterministe et la condition CDD est très obscur, même parmi les sous-décalages les plus simples, les nilpotents. En effet, un sous-décalage nilpotent ne peut être CDD, puisqu'il contiendrait alors un mot périodique différent de 0^∞ ; pourtant, le tracé de n'importe quel AC nilpotent est nilpotent. Certains nilpotents, comme l'exemple suivant, ne sont pas traçables.

Exemple 5.3.16 (Sous-décalage nilpotent non traçable). Aucun AC ne *trace* le sous-décalage $\mathcal{O}_\sigma((\lambda + 1 + 01 + 001 + 21)0^\infty)$.

Preuve. Supposons que F soit un AC sur l'alphabet $\{0, 1, 2\}$ de tracé $\tau_F = \mathcal{O}_\sigma((2+00)10^\infty)$. On remarque que, si $x \in \{1, 2\}^\mathbb{Z}$, alors pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $F(x)_i = x_i - 1$, donc $F(\{1, 2\}^\mathbb{Z}) = \{0, 1\}^\mathbb{Z} \supset F(A^\mathbb{Z})$. On en déduit $F^2(A^\mathbb{Z}) \subset F^2(\{1, 2\}^\mathbb{Z}) = \{\infty 0^\infty\}$, ce qui contredit le fait que $0010^\infty \in \tau_F$. \square

On obtient donc une question importante, qui peut paraître paradoxale puisqu'elle concerne les sous-décalages les plus simples, mais qui se justifie par le fait que trop de simplicité empêche de structurer les configurations d'AC.

Question 5.3.17 ([52]). Peut-on caractériser simplement les sous-décalages *nilpotents* (resp. *sofiques*) *traçables* ?

On pourrait imaginer classifier la complexité des sous-décalages en termes du diamètre minimal d'un AC qui les tracerait. Par exemple, le diamètre 1 correspond uniquement aux sous-décalages déterministes. Les sous-décalages markoviens non déterministes ont un diamètre minimal 2 et les k -STF un diamètre minimal au plus k . Pour les sous-décalages sofiques en général, cela correspond (pour la polytraçabilité) à un problème de minimisation d'automates finis (non déterministes et avec tous les états finaux et initiaux) puisque les sous-décalages markoviens dont ils sont facteurs correspondent à des systèmes d'étiquettes de graphes, mais également de minimisation de la longueur des cycles pris en compte dans la construction de la barrière, ce qui nous amène à un diamètre minimal autour de 8 fois le nombre de sommets dans le pire des cas.

5.4 Bitracés

Nous avons vu certains sous-décalages comme des tracés d'AC. Évidemment, les sous-décalages bilatères correspondant à leurs ensembles limites sont les bitracés des mêmes AC. Cependant, on n'a qu'une très faible liberté de mouvement dans nos constructions d'AC dont le tracé est complètement imposé, car on doit pouvoir partir de toute configuration et l'évolution est trop restreinte pour pouvoir donner une structure à la plupart d'entre elles. Dans le cas du bitracé, on se donne le droit de faire quelques modifications initiales à l'orbite, avant de rester dans le tracé imposé. Ce relâchement du problème va simplifier quelque peu les contraintes sur les barrières. Nous allons pour cela nous ramener aux tracés d'ACP.

Dégroupage total. On va reconsidérer ici les simulations du type de celles présentées dans la section précédente, mais en supposant $B = A^k$. La particularité est que l'on peut toujours considérer les barrières comme encadrant une zone valide; elles n'ont donc plus besoin d'être effacées, mais sont autorisées à évoluer selon le mode par défaut : $\delta_\Upsilon = \xi^{(l)}$. On peut prendre alors un code de barrière assez simple : $\Upsilon_\xi^k = \{ab^{k+1} \mid \forall j \in \mathbb{N}, \xi^j(a) \neq \xi^j(b)\}$.

Lemme 5.4.1. *Le code $\Upsilon^k = \{ab^{k+1} \mid a \neq b\} \subset a^{k+2}$ est k -gelé.*

Preuve. Si $u = ab^{k+1}$ et $v = a'b^{k+1}$ sont tels que $u_{\llbracket i, k+1 \rrbracket} = v_{\llbracket 0, k+1-i \rrbracket}$ avec $1 \leq i \leq k$, alors d'une part, $b = u_i = v_0 = a'$ et d'autre part, $b = u_{i+1} = v_1 = b'$; ce qui nous donne, avec $a' = b'$, que v n'est pas un mot de la barrière. \square

Lemme 5.4.2. *Si $\xi : A \rightarrow A$ n'est pas nilpotente, alors Υ_ξ^k n'est pas vide. $(\Upsilon_\xi^k, \xi^{(k+2)})$ est alors une barrière pour A^k .*

Preuve. Par le dernier point du fait 2.6.10, on voit que Υ_ξ^k n'est pas vide si ξ n'est pas nilpotent. De plus, Υ_ξ^k est k -gelé, en tant que sous-code de Υ^k (cf lemme 5.4.1). Enfin, si ab^{k+1} est un mot de la barrière Υ_ξ^k , i.e. $\forall j \in \mathbb{N}, \xi^j(a) \neq \xi^j(b)$, alors en particulier $\forall j \in \mathbb{N}, \xi^j \xi(a) \neq \xi^j \xi(b)$, donc $\xi^{(k+2)}(ab^{k+1})$ est bien toujours dans Υ_ξ^k . \square

Voilà maintenant la construction fondamentale de cette section.

Lemme 5.4.3. *Soient $\xi : A \rightarrow A$, $B \subset A^{2p}$ un code p -gelé $\xi^{(2p)}$ -préinvariant et \tilde{G} un automate semifini d'ancre 0, de diamètre 2, de règle locale $\tilde{g} : B(B \cup \lambda)^2 \rightarrow B$ et tel que $\pi_{\llbracket 0, p \rrbracket}(\tilde{G}) = \xi^{(p)}$. Alors on peut construire un AC $F : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ tel que $\tau_F = \overset{\circ}{\tau}_{\tilde{G}} \cup \mathcal{O}_\xi$.*

Preuve. Le gel de B permet de définir sans ambiguïté l'AC F de diamètre $d = 10p - 1$, d'ancre $m = 2p - 1$

et de règle locale :

$$f: A^d \rightarrow A$$

$$w \mapsto \begin{cases} \tilde{g}(u^0, u^1)_i & \text{si } \begin{cases} w \in A^{m-i} u^0 u^1 u^2 u^3 A^i, i \in \llbracket 0, m \rrbracket, \\ u^0, u^1 \in B, u^2 u^3 \in \Theta_B \end{cases} \quad (\text{exécution}) \\ \tilde{g}(u^0, \lambda)_i & \text{si } \begin{cases} w \in A^{m-i} u^0 u^1 u^2 A^i, i \in \llbracket 0, m \rrbracket, \\ u^0 \in B, u^1 u^2 \in \Theta_B, u^2 u^3 \notin \Theta_B \end{cases} \quad (\text{frontière}) \\ \xi(w_0) & \text{sinon (défaut).} \end{cases}$$

On notera l'existence implicite d'une «frontière extérieure», sous-cas du mode par défaut : la dernière d'une juxtaposition finie de macrocellules évolue selon ξ afin de ne pas risquer de créer une nouvelle macrocellule à sa droite dans le chevauchement entre les deux modes. En effet, les hypothèses font qu'aucun des modes exécution ou défaut ne peut créer un mot de B de toute pièce ; le seul risque était qu'il apparaisse sur le chevauchement entre deux modes ; on interdit cela en imposant que le chevauchement se fasse sur une «macrocellule de non-droit», qui applique le mode par défaut. Exprimons cette stabilité formellement.

- Soit $x \in [B]_0$; supposons qu'il existe une cellule $i \in \llbracket 0, 2p \llbracket$ telle que $F(x)_k \neq \xi(x_k)$. La cellule k applique alors le mode exécution ou frontière, donc $x \in [B\Theta_B]_i$ avec $k - 2p < i \leq k$. Le gel de B nous donne que i et $i + 2p$ ne sont pas entre $-p$ et p . Puisque $i > k - 2p \geq -2p$, on a $i > p$; donc la position dans Θ_B de la cellule considérée $k - i$ est inférieure à p et notre hypothèse $F(x)_k \neq \xi(x_k)$ contredit l'hypothèse sur \tilde{G} . On a montré $F(x)_{\llbracket 0, 2p \llbracket} = \xi^{(2p)}(x_{\llbracket 0, 2p \llbracket}) \in B$. Il en résulte :

$$F([B]_0) \subset [B]_0 . \quad (5.8)$$

- Soit maintenant x une configuration telle que $F(x) \in [B]_0$; supposons qu'il y a une cellule $k \in \llbracket 0, 2p \llbracket$ telle que $F(x)_k \neq \xi(x_k)$. Il existe alors $i \in \llbracket k - 2p, k \llbracket$ tel que $x \in [B\Theta_B]_i$. Mais alors $F(x) \in [BB]_i$ grâce à (5.8) et le gel de B nous donne que $i, i + 2p \notin \llbracket -p, p \llbracket$. Puisque $i > k - 2p \geq -2p$, on a $i > p$; donc la position dans Θ_B de la cellule considérée $k - i$ est inférieure à p et notre hypothèse $F(x)_k \neq \xi(x_k)$ contredit l'hypothèse sur \tilde{G} . Similairement à ci-dessus, on conclut :

$$F^{-1}([B]_0) \subset [B]_0 . \quad (5.9)$$

- L'équation (5.9) peut s'écrire $F([B^C]_0) \subset [B^C]_0$ et la définition des macrocellules peut s'écrire $[\Theta_B]_0 = [B]_0 \cap \bigcap_{1 \leq i < 2p} [B^C]_i$. En combinant avec (5.8), on obtient :

$$F([\Theta_B]_0) \subset [\Theta_B]_0 . \quad (5.10)$$

- Supposons maintenant qu'on a une configuration x telle que $F(x) \in [\Theta_B]_0$. Alors on sait déjà par (5.9) que $x \in [B]_0$. Si, de plus, x était dans un cylindre $[B]_i$ avec $i \in \llbracket 0, 2p \llbracket$, alors $F(x)$ aussi par (5.8), ce qui contredirait notre hypothèse. On obtient :

$$F^{-1}([\Theta_B]_0) \subset [\Theta_B]_0 . \quad (5.11)$$

On a donc une partition $A^{\mathbb{Z}} = X_1 \sqcup X_2 \sqcup X_3$ en trois ensembles disjoints et F -invariants, avec :

$$X_1 = \bigcup_{0 \leq i < 2p} \bigcap_{q \in \mathbb{Z}} [B]_{2pq-i} \quad (\text{configurations valides}),$$

$$X_2 = \bigcup_{0 \leq i < 2p; q > 0} [B\Theta_B]_{-i} \cap [\Theta_B]_{2pq-i}^C \quad (\text{configurations partiellement valides au centre}),$$

$$X_3 = \bigcap_{0 \leq i < 2p} [B\Theta_B]_i^C \quad (\text{configurations invalides au centre}).$$

Le sous-décalage tracé peut donc être décomposé de la même manière :

$$\tau_F = T_F(X_1) \cup T_F(X_2) \cup T_F(X_3) .$$

Remarquons que $X_1 = \mathcal{O}_\sigma(\infty B^\infty)$ et que $F|_{X_1}$ est l'ACP défini dans la proposition 5.2.6 ; par conséquent sa contribution $T_F(X_1)$ au tracé égale le polytracé $\overset{\circ}{\tau}_{\tilde{G}|_{B^\mathbb{Z}}}$ de l'AC correspondant.

Par la troisième partie de la définition, le mode par défaut sur la cellule centrale ne consiste qu'en l'application de ξ ; par conséquent $T_F(X_3) = \{(\xi^j(a))_{j \in \mathbb{N}} \mid a \in A\}$.

Soit maintenant $x \in X_2$, i.e. il existe $i \in \llbracket 0, 2p \rrbracket$ et $q > 0$ tels que $x_{\llbracket -i, 2p(q+2) - i \rrbracket} = u^0 \dots u^q u^{q+1} u^{q+2}$, avec $u^s u^{s+1} \in \Theta_B$ pour $0 \leq s \leq q$ et $u^{q+1} u^{q+2} \notin \Theta_B$. On peut voir $u = u^0 \dots u^{q-1}$ comme un mot fini de B^+ . La définition et une récurrence immédiate nous donnent que pour toute génération $j \in \mathbb{N}$, $F^j(x)_{\llbracket 2p(q+1) - i, 2p(q+3) - i \rrbracket} \notin \Theta_B$ et pour tout $s \in \llbracket 0, q \rrbracket$, $F^j(x)_{\llbracket 2ps - i, 2p(s+2) - i \rrbracket} \in \Theta_B$ et pour tout $s \in \llbracket 0, q \rrbracket$, $F^j(x)_{\llbracket 2ps - i, 2p(s+1) - i \rrbracket} = \tilde{G}^j(u)_s$. Il résulte que $T_F(x) = \pi_i(T_{\tilde{G}}(u))$, donc $T_F(X_2) = \overset{\circ}{\tau}_{\tilde{G}|_{B^+}}$.

On obtient bien, globalement, $\tau_F = \overset{\circ}{\tau}_{\tilde{G}} \cup \mathcal{O}_\xi$. □

Notons que le lemme précédent reste vrai quand la règle locale a une ancre et un diamètre plus grands, en définissant correctement la nouvelle règle sur les extrémités des mots finis ; notre restriction a cependant légèrement facilité la lisibilité.

Lemme 5.4.4. *Soient $\xi : A \rightarrow A$, G un AC unidirectionnel sur l'alphabet A^k et $(\Upsilon \subset A^l, \xi^{(l)})$ une barrière pour A^k . Alors on peut construire un AC $F : A^\mathbb{Z} \rightarrow A^\mathbb{Z}$ tel que $\tau_F = \overset{\circ}{\tau}_G \cup \mathcal{O}_\xi$.*

Preuve. Quitte à passer au groupé, on peut supposer que le rayon de G est 1. Soit Δ_Υ l'AC correspondant à la règle locale ξ . On peut appliquer la proposition 3.7.1 à l'AC $\Delta_\Upsilon \times G$ vu sur l'alphabet ΥA^k : il peut être étendu en un automate semifini \tilde{G} sur l'alphabet ΥA^k , d'ancre 0, de diamètre 2, de même tracé $\tau_{\tilde{G}} = \tau_{\Delta_\Upsilon \times G}$, donc de même polytracé $\overset{\circ}{\tau}_{\tilde{G}} = \overset{\circ}{\tau}_{\Delta_\Upsilon} \cup \overset{\circ}{\tau}_G$.

Notons, d'une part, par la remarque 5.2.8, que $l > k$ et d'autre part, que ΥA^k est évidemment préinvariant par $\xi^{(k+l)}$. On peut donc, par le lemme 5.4.3, construire un AC F sur l'alphabet A tel que $\tau_F = \overset{\circ}{\tau}_{\tilde{G}} \cup \mathcal{O}_\xi = \overset{\circ}{\tau}_G \cup \mathcal{O}_\xi$. □

Proposition 5.4.5. *Soit G un AC unidirectionnel sur l'alphabet A^k , avec $k \in \mathbb{N}^*$, et $\xi : A \rightarrow A$ non nilpotent tel que le polytracé $\overset{\circ}{\tau}_G$ contient le sous-décalage déterministe \mathcal{O}_ξ . Alors on peut construire un AC F sur l'alphabet A de tracé $\tau_F = \overset{\circ}{\tau}_G$.*

Preuve. Soit $\xi : A \rightarrow A$ non nilpotent telle que le sous-décalage déterministe \mathcal{O}_ξ est inclus dans $\overset{\circ}{\tau}_G$. On peut appliquer le lemme 5.4.4 à G avec $\Upsilon = \Upsilon_\xi^k$, qui est $\frac{k+l}{2}$ -gelé par le lemme 5.4.2 et $\xi^{(l)}$ -invariant par construction, avec $l = k + 2$. On obtient un AC F tel que $\tau_F = \overset{\circ}{\tau}_G \cup \mathcal{O}_\xi = \overset{\circ}{\tau}_G$. □

La construction précédente impose les deux restrictions suivantes à nos sous-décalages : admettre un sous-décalage déterministe non nilpotent et surtout que l'AC de départ soit défini sur l'alphabet complet A^k , ce qui n'est assurément pas le cas des polytracés vus dans la section 5.1. Mais cela donne une condition plus précise, qui nous va nous permettre une étude particulière des bitracés.

Corollaire 5.4.6. *Soit Σ le polytracé d'un AC unidirectionnel sur l'alphabet A^k . Si Σ contient un sous-décalage déterministe non nilpotent ou si Σ est CDD, alors Σ est traçable.*

Preuve. Ceci découle directement des propositions 5.4.5 et 5.3.11. □

Ici aussi on laisse un cas non résolu entre les deux conditions : lorsque tout sous-décalage déterministe contenu dans Σ est 0-nilpotent, que Σ admet des cycles contenant d'autres lettres que 0, mais aucune d'entre elles ne disparaît à la première génération par les fonctions $\xi : A \rightarrow A$ correspondantes. Cela n'est possible que quand il y a beaucoup de lettres.

Corollaire 5.4.7. *Tout polytracé sofique d'un AC non nilpotent sur l'alphabet \mathfrak{Z}^k , avec $k \in \mathbb{N}^*$, et qui contient un sous-décalage déterministe, est traçable.*

Preuve. Il y a trois sous-décalages déterministes sur \mathfrak{Z} .

- Si Σ contient $(1 + \lambda)(01)^\infty$, alors la proposition 5.4.5 permet de conclure.
- Si Σ est le polytracé d'un AC, contient $\mathfrak{Z}a^\infty$, avec $a \in \mathfrak{Z}$, et n'est pas nilpotent, donc par le théorème 4.7.15 pas faiblement nilpotent, alors par le fait 2.6.28, il admet un cycle ${}^\infty w^\infty$ avec $w \in \mathfrak{Z}^+ \setminus a^+$; il est donc CDD et la proposition 5.3.11 permet de conclure.

□

Bitraçabilité. On définit naturellement le **bipolytracé** d'un AC F comme le sous-décalage $\overset{\circ}{\tau}_F^* = \Omega_\sigma(\overset{\circ}{\tau}_F) = \pi(\tau_F^*) = \overset{\circ}{\tau}_{F|\Omega}$, qui peut être vu comme bilatère.

Lemme 5.4.8. *Si G est un AC unidirectionnel sur $B \subset A^k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, alors on peut construire un AC unidirectionnel \tilde{G} sur A^k ayant le même bipolytracé $\overset{\circ}{\tau}_G^* = \overset{\circ}{\tau}_{\tilde{G}}^*$.*

Preuve. Soient d, m, g le diamètre, l'ancre et la règle locale de G . Il suffit d'effectuer une projection $\psi : A^k \rightarrow B$ au départ; on définit l'AC \tilde{G} sur A^k , de même ancre m et diamètre d et de règle locale :

$$\tilde{g} : \begin{array}{ccc} (A^k)^d & \rightarrow & A^k \\ u = (u_i)_{-m \leq i < d-m} & \mapsto & \begin{cases} g(u) & \text{si } u \in B^d \\ \psi(u_0) & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

On voit, par construction, que $\tilde{G}((A^k)^\mathbb{Z}) = B^\mathbb{Z}$ et que $\tilde{G}|_{B^\mathbb{Z}} = G$, autrement dit, dès la deuxième étape, on ne fait plus qu'appliquer G . Donc leurs deux systèmes limites sont identiques et leurs bitracés aussi. □

En intégrant le résultat du corollaire 5.4.7, on voit que tous les sous-décalages surjectifs sur \mathfrak{Z} qui sont un bipolytracé et contiennent un sous-décalage déterministe sont le bitracé d'un AC. On peut généraliser cela à tout alphabet.

Proposition 5.4.9. *Soit un AC unidirectionnel G sur l'alphabet $B \subset A^k$, avec $k \in \mathbb{N}^*$, tel que $\overset{\circ}{\tau}_G^*$ est sofique et contient un sous-décalage déterministe $\mathcal{O}_\xi^*(A')$, avec $A' \subset A$. Alors, il existe un AC F sur l'alphabet A tel que $\tau_F^* = \overset{\circ}{\tau}_G^*$.*

Preuve. Tout d'abord, grâce au lemme 5.4.8, on peut supposer que $B = A^k$.

- Si τ_F est faiblement nilpotent, alors $\tau_F^* = \{\infty 0^\infty\}$ par la proposition 2.6.30; n'importe quel AC nilpotent fait donc l'affaire, comme l'AC nul.
- Si ξ n'est pas nilpotent, alors on peut appliquer la proposition 5.4.5 pour construire l'AC F , qui aura comme tracé le polytracé de G .
- Si ξ est 0-nilpotent, avec $0 \in A$, on définit :

$$\xi' : \begin{array}{ccc} A & \rightarrow & A \\ a & \mapsto & 0, \end{array}$$

qui présente l'intérêt d'avoir le même ensemble limite $\{\infty 0^\infty\}$ que ξ . Puisque le tracé τ_F n'est pas faiblement 0-nilpotent, il contient un mot périodique w^∞ , avec $w \in A^+ \setminus 0^+ = A^+ \setminus \xi'(A)^+$. On peut alors appliquer le lemme 5.3.10 pour construire un AC $F' : A^\mathbb{Z} \rightarrow A^\mathbb{Z}$ tel que $\tau_{F'} = \overset{\circ}{\tau}_G \cup \mathcal{O}_{\xi'}$. On obtient alors $\tau_F^* = \overset{\circ}{\tau}_G^* \cup \{\infty 0^\infty\} = \overset{\circ}{\tau}_G^*$. □

Ici, la constructibilité de l'AC correspondant n'est plus garantie, car il faudrait pouvoir décider dans lequel des trois cas de la preuve on se trouve; en particulier décider la nilpotence. On obtient tout de même le résultat, non effectif, suivant.

Corollaire 5.4.10. *Tout bipolytracé contenant un sous-décalage déterministe est le bitracé d'un AC.*

Bien sûr, n'importe quel sous-décalage surjectif est la limite d'un sous-décalage (notamment de lui-même), ce qui nous permet d'établir le résultat suivant.

Corollaire 5.4.11. *Tout STF bilatère contenant un sous-décalage déterministe et tout sous-décalage bilatère sofique universel contenant un sous-décalage déterministe, est le bitracé d'un AC.*

Notons que, contrairement à la condition nécessaire au tracé, on n'a ici besoin que d'un sous-décalage déterministe sur un alphabet $A' \subset A$ et non plus sur l'alphabet A en entier.

5.5 Autres sous-décalages remarquables

Dans cette section, nous inspectons quelques propriétés de sous-décalages particuliers liés à des AC.

Conjugués de tracés. Dans l'étude des systèmes dynamiques, il est souvent pertinent de quotienter par la relation de conjugaison, puisqu'elle exprime un parallélisme exact entre l'évolution de deux systèmes. On ne sait pas si la polytraçabilité est un invariant de conjugaison ou non. En revanche, la traçabilité n'en est pas un, et la condition CDD non plus. Par exemple, tout STF est conjugué à un sous-décalage *markovien*, qui est *traçable*, mais l'exemple 5.3.14 ou encore $\mathcal{O}_\sigma((001)^\infty)$ nous montrent des STF non traçables.

Facteurs colonnes. Notre construction s'adapte aisément aux FCC de largeur quelconque des AC. En effet, si l'on se donne un sous-décalage Σ sur l'alphabet A^k , on peut effectuer les deux mêmes étapes que précédemment : d'une part, Σ est polytraçable si c'est un STF ou un sous-décalage sofique universel. D'autre part, on peut dégrouper l'AC obtenu si son projeté $\pi(\Sigma)$ est CDD, de façon à transformer le polytracé en tracé de largeur k .

Facteurs diamétraux. Un problème assez intéressant consisterait à étudier le facteur diamétral (de largeur égale au diamètre) des AC. Ce problème est, lui, très différent de celui du tracé (de largeur 1 avec diamètre de l'AC non borné). On pourrait déjà limiter le diamètre des AC étudiés en fonction de la largeur. Par exemple, si $d \in \mathbb{N}$, quels sont les sous-décalages sur A^{d-1} qui sont facteurs colonnes de largeur $d-1$ d'un AC de diamètre d ? De manière équivalente (modulo un groupage), est-il le tracé d'un AC de rayon 1? Il est difficile de se rendre compte si ce problème est plus proche de celui du tracé de largeur 1 ou de celui du tracé de largeur d .

Tracés directionnels. Bien sûr, comme déjà remarqué, prendre le tracé en une cellule autre que la cellule centrale de la configuration ne change pas le sous-décalage tracé, puisque cela correspond à appliquer un décalage préalable à la configuration initiale.

On pourrait se demander s'il y aurait une différence à prendre un tracé directionnel, *i.e.* $T_F^{<s>} : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{N}}$ pour un $s \in \mathbb{R}$. Quand $s \in \mathbb{N}$, cela correspond exactement au tracé de l'AC décalé $\sigma^s F$, *i.e.* la même règle locale prise avec ancre $m-s$. Par conséquent, tant que l'on raisonne à rayon non borné, le problème est le même.

Maintenant, que se passe-t-il si l'on impose une direction particulière, par exemple si l'on se restreint aux AC unidirectionnels? Notre transformation du polytracé en tracé est basée sur un encodage de macrocellules en une séquence de cellules qui, pour comprendre leur macrocellule d'origine, doivent pouvoir lire leur environnement des deux côtés; cela ne serait pas possible dans ce cas...

On pourrait même imaginer étudier le tracé d'AC en dimension supérieure. Il n'est alors pas clair qu'il n'y a pas de sous-décalages traçables supplémentaires. En particulier, on ne sait pas s'il existe des sous-décalages faiblement nilpotents qui ne soient pas nilpotents – même s'ils seraient alors très surprenants.

Conclusion

Ce chapitre a présenté quelques conditions suffisantes pour qu'un sous-décalage sofique soit le tracé d'un automate à répartition périodique, d'un automate cellulaire partiel ou d'un automate cellulaire. Dans les deux premiers cas, les conditions présentées sont simples – STF ou sofiques universels – mais laissent un vide dont le comblement semble lié à la notion de polysimulation. Dans le troisième, la complétude de la simulation impose des barrières assez difformes, qui empêchent une condition aussi intuitive. Une caractérisation des sous-décalages sofiques traçables est une généralisation attendue, mais difficile.

Enfin, réinsistons sur le fait que notre étude ne concerne que les sous-décalages sofiques, ce qui n'est bien évidemment pas le cas de tous les tracés d'AC. Par exemple le tracé de l'AC σ Min n'est pas sofique (*cf* exemple 3.6.1). Il semble difficile à envisager une généralisation de nos constructions à ce cas, puisque les sous-décalages sofiques sont exactement ceux pour lesquels les possibilités de prolonger un mot peuvent être représentées de façon finie (sommet du graphe) ; gérer le cas algébrique par exemple requerrait une information qui s'étend dans la configuration (par exemple avec des particules se déplaçant arbitrairement loin avant de rebondir) et pas uniquement un polytracé sur un nombre fini de cellules.

Chapitre 6

Décidabilité

Ce chapitre présente quelques résultats récents sur la décidabilité de propriétés des automates cellulaires, notamment en relation avec les sous-décalages facteurs, ainsi que quelques résultats classiques, d'une part parce qu'ils sont à la base des réductions permettant les preuves d'indécidabilité, mais aussi parce qu'ils sont fondamentaux pour la compréhension de l'imprédictibilité des automates cellulaires.

Par exemple, dès la dimension 2, même les propriétés immédiates d'injectivité et de surjectivité sont imprévisibles à partir de la règle locale [13]. Cela vient surtout de l'indécidabilité du problème de la pavabilité prouvée par Berger [123] : à partir de la connaissance de contraintes, même très locales, d'agencement d'objets, on ne sait pas décider si l'on va pouvoir recouvrir le plan ; c'est en particulier le cas pour les cellules obtenues par application de l'automate cellulaire.

On se restreindra ici toujours aux AC de dimension 1. Dans ce cas, l'injectivité et la surjectivité sont décidables [102, 103] – on peut en effet lire la surjectivité à partir du graphe de Bruijn, par le fait 2.2.6. En revanche, toutes les propriétés de dynamique à long terme, même les plus simples, sont indécidables. Intuitivement, l'évolution de l'automate cellulaire introduit dans le temps une seconde dimension et ces propriétés correspondent alors d'une certaine manière à des problèmes de pavage du plan. Il va de soit que, pour un autre monoïde dans lequel \mathbb{Z} pourrait être plongé, les problèmes sont au moins aussi complexes ; les résultats d'indécidabilité sont donc toujours vrais en particulier pour les AC sur des espaces $A^{\mathbb{Z}^l}$, où $l \geq 1$.

Les algorithmes que l'on recherche prennent en entrée un AC, exprimé de façon finie par son diamètre, son ancre et sa table de transition qui associe à chaque voisinage un état par la règle locale. Lorsque l'on considérera des algorithmes sur les sous-décalages, on sera bien obligés de se restreindre à des classes représentables : les STF seront représentés par leur liste de mots interdits minimaux, les sous-décalages sofiques par une matrice représentant leur graphe.

6.1 Nilpotence et premières conséquences.

Les problèmes indécidables sur les automates cellulaires se ramènent souvent à la nilpotence, prouvée indécidable par Kari dans [12], en y réduisant une version du problème de la pavabilité renforcée par la restriction aux jeux de tuiles déterministes. Ces derniers correspondent en quelque sorte aux diagrammes espace-temps d'AC 0-envahissants dans lesquels l'état 0 n'apparaît pas ; celui-ci représente alors l'impossibilité de prolonger le pavage.

Ainsi, la nilpotence est indécidable, même si l'on se restreint à la classe des AC envahissants.

Théorème 6.1.1 ([12]). *Le problème*

Instance: un AC 0-envahissant F .

Question: F est-il 0-nilpotent ?

est indécidable.

Comportement très proche de la nilpotence, mais distinct (cf section 4.2), la nilpotence sur les périodiques a également été prouvée indécidable, grâce à l'existence de jeux de tuiles qui ne peuvent paver le plan que de manière aperiodique.

Théorème 6.1.2 ([104]). *Le problème*

Instance: un AC 0-envahissant F .

Question: F est-il 0-nilpotent sur les périodiques?

est indécidable.

Cette restriction sur les AC envahissants prend tout son intérêt grâce à la caractérisation de la proposition 4.2.8.

Corollaire 6.1.3. *La 0-nilpotence (resp. sur les périodiques) des AC est inséparable de la non 0-mortalité globale.*

En particulier, il est indécidable de savoir si un état particulier va apparaître dans toute orbite, ou de manière équivalente, s'il va apparaître dans tout tracé. D'autre part, la 0-nilpotence est indécidable, tout comme la nilpotence (sans fixer l'état à l'avance).

Il est à noter que la nilpotence et la nilpotence sur les périodiques sont des propriétés qui dépendent exclusivement de la règle locale et non de l'ancre : nous avons vu en section 4.2 qu'elles n'étaient pas altérées par composition avec un décalage. Cela permet de dire notamment que, dans ce cadre, les résultats d'indécidabilité sont équivalents entre les AC unilatères et les AC bilatères.

Indécidabilité à alphabet fixé. L'indécidabilité des propriétés vient de l'infinité des AC en faisant varier deux paramètres : le diamètre et l'alphabet. Lorsque ce n'est pas précisé, on considère donc que nos algorithmes prennent en entrée des AC de diamètre et d'alphabet quelconques ; de manière équivalente, par la simulation de la remarque 3.3.2, on peut fixer un rayon égal à 1 sans que cela n'altère l'indécidabilité d'un problème. En revanche, les résultats d'indécidabilité à alphabet fixé sont plus forts. Nous allons montrer quelques résultats de ce type, en faisant varier le diamètre et en fixant l'alphabet à $\mathbb{2}$ – qui peut être plongé dans n'importe quel autre alphabet non trivial.

Pour adapter un résultat d'indécidabilité sur alphabet quelconque, il faut donc pouvoir le simuler par l'alphabet $\mathbb{2}$. Les opérations de dégroupage à base de barrières, présentés dans la section 5.2, vont donc nous servir.

Nous donnons ici une preuve de l'indécidabilité de la nilpotence qui illustre ce genre de constructions, grâce à un codage binaire des états. Ce résultat est déjà présent dans [124] en utilisant un codage unaire.

Lemme 6.1.4. *Soit G un AC bilatère sur l'alphabet $B \subset \mathbb{2}^k$, où $k \in \mathbb{N}$, tel que le mot 0^k est envahissant, $h = 2k + 1$ et $F = \boxtimes_h(\text{id}_{\Upsilon_{(0,1)}^k} \times G) + 0^{2k}$ le prolongement sur $\mathbb{2}^{\mathbb{Z}}$ de son dégroupé. Alors $F_{\wedge 0^{2k}}$ est nilpotent si et seulement si G l'est.*

Preuve. Par le corollaire 4.2.9, il suffit de montrer que F est globalement 0^{2k} -mortel si et seulement si G est globalement 0^k -mortel. Soit $A = \infty(\Upsilon_{(0,1)}^k B)^\infty$ le STF des macrocellules formées grâce à la barrière de l'exemple 5.2.10. Notre construction est telle que G est conjugué à la restriction $F|_A$ par chaque fonction $\Phi_l : B^{\mathbb{M}} \rightarrow \sigma^l(A)$ définie pour $l \in \llbracket 0, k \rrbracket$, $x \in B^{\mathbb{Z}}$, $i \in \mathbb{Z}$ par $\Phi_l(x)_{\llbracket ih, (i+1)h \rrbracket} = 10^k x_{i-l}$.

- Si G est globalement 0^k -mortel, alors toute configuration $y \in \mathcal{O}_\sigma(A)$ est égale à $\Phi_l(x)$, pour $l \in \llbracket 0, k \rrbracket$ et $x \in B^{\mathbb{M}}$. Il existe donc une génération $j \in \mathbb{N}$ et une cellule $i \in \mathbb{Z}$ telles que $\Phi_l(x)_{\llbracket ih, (i+1)h \rrbracket} = 10^k 0^k$. De plus, par la proposition 5.3.3, toute configuration $x \notin \mathcal{O}_\sigma(A)$ voit apparaître 0^{2k} dans son image $F(x)$.

- Réciproquement, supposons que G ne soit pas globalement 0^k -mortel. Alors il existe une configuration $x \in B^{\mathbb{Z}}$ telle qu'en toute cellule $i \in \mathbb{Z}$ et toute génération $j \in \mathbb{N}$, $G^j(x)_i \neq 0^k$. On construit la configuration $y = \Phi_0(x) \in {}^\infty(\Upsilon_{(0,1)}^k B)^\infty$; par conjugaison, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $F^j(y)_{\llbracket ih, (i+1)h \rrbracket} = 10^k G^j(x)_i$; jamais, dans l'orbite de y , n'apparaît le mot envahissant 0^{2k} . \square

Théorème 6.1.5. *Le problème*

Instance: *un AC F sur l'alphabet \mathfrak{A} avec un mot envahissant.*

Question: *F est-il nilpotent ?*

est indécidable.

Preuve. On peut montrer le résultat sur les AC bilatères; la nilpotence n'étant pas altérée par composition avec un décalage ou coupage des configurations, il sera encore vrai pour les AC unilatères. Une procédure de décision de la nilpotence d'un tel AC contredirait le théorème 6.1.1 : on pourrait décider la nilpotence d'un AC G envahissant sur alphabet B quelconque de la façon suivante.

- On peut supposer, quitte à renommer les lettres, que $B \subset \mathfrak{A}^k$, avec $k \in \mathbb{N}$, et que l'état envahissant de G est 0^k .
- Par le corollaire 5.2.11, on peut construire le dégroupé $\boxtimes_{2k+1}(\text{id}_{\Upsilon_{(0,1)}^k} \times G)$.
- On peut facilement construire son prolongé $F = \boxtimes_{2k+1}(\text{id}_{\Upsilon_{(0,1)}^k} \times G) + 0^{2k}$.
- On peut construire $F_{\wedge 0^{2k}}$.
- On teste si ce dernier est nilpotent; cela nous donne exactement la réponse pour G grâce au lemme 6.1.4. \square

Stabilité. Grâce aux graphes de Bruijn du fait 2.2.6, on peut voir que les images $F^j(\Lambda)$ des itérés d'un ACP F sur un sous-décalage sofique Λ sont calculables, pour $j \in \mathbb{N}$. Il en résulte que, si l'on présuppose la stabilité d'un ACP, l'ensemble limite est alors calculable : il suffit de trouver une génération $j \in \mathbb{N}$ telle que $F^j(\Lambda) = F^{j+1}(\Lambda)$.

Fait 6.1.6. *L'ensemble limite des ACP stables est calculable.*

En particulier, on peut facilement déterminer si un tel AC est nilpotent – l'ensemble limite est alors réduit à un singleton. On en déduit que cette condition de stabilité n'est pas décidable.

Corollaire 6.1.7. *L'instabilité des AC sur l'alphabet \mathfrak{A} est inséparable de leur nilpotence.*

Sensibilité. Nous avons déjà remarqué que la nilpotence n'était pas altérée par décalage. En revanche, la sensibilité l'est au point que tout AC non nilpotent devient sensible quand il est suffisamment décalé (cf proposition 4.5.8). Si l'on disposait d'une procédure de décision pour la sensibilité, on pourrait l'appliquer à tous les automates cellulaires, après les avoir décalé de la valeur de leur rayon, pour savoir s'ils sont nilpotents.

Proposition 6.1.8 ([125]). *La sensibilité est inséparable de la nilpotence pour les AC obliques sur l'alphabet \mathfrak{A} admettant un mot envahissant.*

Toutes les classes d'AC situées entre les AC sensibles et les AC nilpotents sont alors indécidables.

Corollaire 6.1.9. *La sensibilité, la quasi-équicontinuité, l'équicontinuité (la préperiodicité), la périodicité asymptotique sont des propriétés indécidables pour les AC sur l'alphabet \mathfrak{A} .*

Comme la nilpotence, ces propriétés sont indécidables aussi bien pour les AC bilatères que pour les AC unilatères.

On retrouve le résultat de [124] : les classes de la classification de Gilman basée sur l'équicontinuité sont indécidables, hors-mis la dernière, qui reste un problème ouvert assez important.

Question 6.1.10. Le problème

Instance: un AC F .

Question: F est-il *positivement expansif*?

est-il décidable ?

Automates cellulaires réversibles. Jusqu'à il y a peu, on ne disposait d'aucun exemple de problèmes indécidables prenant en entrée des AC présumés injectifs, ou tout du moins surjectifs. Ce vide a été comblé récemment, notamment pour la périodicité [126] et l'expansivité [125].

Pour un récapitulatif intéressant sur les problèmes indécidables sur les AC ou sur les AC réversibles, on se référera à [111].

6.2 Simulation

Produit contrôlé. Le fait que le problème de la nilpotence reste indécidable lorsqu'on se restreint aux AC envahissants permet d'utiliser un état particulier comme contrôle d'un autre AC. Cette construction amène des résultats d'indécidabilité pour les problèmes qu'on peut «cacher», au moins partiellement, par un sous-système particulier, comme dans [14, 53].

Considérons le ϕ -amalgamé F de deux AC F_1 et F_2 sur les alphabets disjoints A_1 et A_2 reliés par la projection $\phi : A_2 \rightarrow A_1$ et $A = A_1 \sqcup A_2$. Soient de plus N et N' deux AC sur les alphabets B et $B' \supset B$ respectivement, avec $0 \in B$ envahissant pour N . Soient f, n, n' les règles locales de F, N, N' , et d, m leur diamètre et leur ancre, que l'on peut supposer communs. On construit le **produit contrôlé** $F \circlearrowleft_{(0, A_1)}(N, N')$ de mêmes diamètre d et ancre m , d'alphabet $A \times B'$ et de règle locale :

$$g : \begin{array}{l} (A \times B')^d \rightarrow A \times B' \\ (a_i, b_i)_{-m \leq i < d-m} \mapsto \begin{cases} (f(a), n(b)) & \text{si } a \in A_2^d \text{ et } b \in (B \setminus \{0\})^d \\ (f(a), n'(b)) & \text{sinon .} \end{cases} \end{array}$$

L'AC simule alors F et N indépendamment (première partie de la règle) jusqu'à ce qu'un 0 apparaisse et qu'ils changent tous deux de règle; ce bouleversement ne peut se produire pour chaque cellule qu'une seule fois, puisque par la suite les lettres de l'alphabet de la composante de gauche restent dans A_1 ; les deux composantes simulent alors respectivement F_1 et N' (deuxième partie de la règle).

Remarque 6.2.1. Puisque N est envahissant, on sait que les diamètres des AC considérés sont strictement plus grands que 1. Par définition du ϕ -amalgamé et de \circlearrowleft , on peut alors voir que $A_1 \times B'$ est *envahissant* pour $F \circlearrowleft_{(0, A_1)}(N, N')$.

Lemme 6.2.2.

- Si N est nilpotent, alors $F \circlearrowleft_{(0, A_1)}(N, N')$ et $(F_1 \times N')$ ont le même système limite.
- Sinon, F_2 est le premier projeté d'un sous-système de $F \circlearrowleft_{(0, A_1)}(N, N')$.

Preuve.

- Supposons que N est nilpotent. Par la définition du produit \circlearrowleft , aucune orbite ne fait toujours intervenir la première partie de la règle : $F \circlearrowleft_{(0, A_1)}(N, N')$ est alors globalement $A_1 \times B'$ -mortel et, par la remarque 6.2.1 et la proposition 4.2.2, $\Omega_{F \circlearrowleft_{(0, A_1)}(N, N')} \subset (A_1 \times B')$. La restriction du produit à ce sous-alphabet est $F_1 \times N'$ (on applique toujours la deuxième règle). Leurs ensembles limites sont donc égaux.
- Dans le cas contraire, il existe, par la proposition 4.2.8, une configuration $x \in B^{\mathbb{M}}$ qui n'est pas globalement 0-mortelle par N ; on définit le sous-décalage $\Lambda = \overline{\mathcal{O}_\sigma(\mathcal{O}_N(x))}$. Alors $A_2^{\mathbb{M}} \times \Lambda$ est $F \circlearrowleft_{(0, A_1)}(N, N')$ -invariant et sa première projection est F_2 . \square

Puisqu'ils sont ramenés à la nilpotence d'un AC envahissant quelconque N , les deux cas présentés dans le lemme ci-dessus sont récursivement inséparables dès qu'ils sont disjoints – lorsque F_1 et F_2 sont suffisamment différents.

Simulation. Ce produit contrôlé va donc nous permettre de faire intervenir les simulations (sous-factorisations) dans des résultats d'indécidabilité. Le premier exemple d'utilisation avec deux AC suffisamment différents est lorsque l'un est nilpotent et l'autre non.

Un cas particulier est donné lorsque $A_1 = \{q\}$ est un alphabet trivial à une lettre. Si F est un AC sur l'alphabet $A \not\ni q$ et ϕ la projection de A dans $\{q\}$, alors on note $F + q$ le ϕ -amalgamé de F et de l'AC nul $\text{id}_{\{q\}}$. Soit N un AC sur B avec un état envahissant 0 et $\bar{0}$ l'AC nul sur B , i.e. $\forall x \in B^{\mathbb{M}}, \bar{0}(x) = \infty 0^\infty$. Alors le produit $(F + q) \circlearrowleft_{(0,A)} (N, \bar{0})$ a la propriété intéressante d'hériter de la nilpotence éventuelle de N , grâce au lemme 6.2.2.

Remarque 6.2.3.

- Si N est 0-nilpotent, alors $(F + q) \circlearrowleft_{(0,A)} (N, \bar{0})$ est $(q, 0)$ -nilpotent.
- Sinon, F est sous-facteur lettre à lettre de $(F + q) \circlearrowleft_{(0,A)} (N, \bar{0})$.

Proposition 6.2.4. *Soit $F : A^{\mathbb{M}} \rightarrow A^{\mathbb{M}}$ un AC non nilpotent. Alors, la nilpotence des AC envahissants est inséparable du fait d'avoir F comme sous-facteur lettre à lettre.*

Preuve. Supposons que l'on dispose d'une procédure qui sépare ces deux propriétés. Si N est un AC 0-envahissant, alors on peut appliquer notre algorithme à $(F + q) \circlearrowleft_{(0,A)} (N, \bar{0})$. Par la remarque 6.2.3, il est nilpotent dès que N l'est ; dans le cas contraire il admet F comme sous-facteur lettre à lettre, donc ne peut pas être nilpotent. On pourrait ainsi décider si N est nilpotent, ce qui contredirait le théorème 6.1.1. \square

Simulation cellulaire. Même si l'on a utilisé dans la construction précédente une sous-factorisation cellulaire, il s'avère que N peut être un sous-décalage quelconque, ce qui ne rend pas l'idée d'une simulation effective, i.e. qui impliquerait une restriction plus visuelle. Remplacer la nilpotence par la nilpotence sur les périodiques, comme dans [127], va nous permettre d'avoir des configurations non immortelles assez régulières (simulation par blocs).

Lemme 6.2.5.

- Si N est nilpotent sur les périodiques, alors $(F + q) \circlearrowleft_{(0,A)} (N, \bar{0})$ aussi.
- Sinon, F_2 est sous-facteur par blocs hors-contexte de $F \circlearrowleft_{(0,A_1)} (N, N')$. De plus, celui-ci simule par blocs hors-contexte exactement F_2 .

Preuve.

- La remarque 6.2.1 nous permet de caractériser la nilpotence sur les périodiques comme énoncé dans le corollaire 4.2.13. Si $F \circlearrowleft_{(0,q)} N$ admet une configuration périodique qui n'est pas globalement $(q, 0)$ -mortelle, alors sa deuxième composante est une configuration périodique de N qui n'est pas globalement 0-mortelle ; N ne peut donc pas être nilpotent sur les périodiques.
- Réciproquement, si N admet une configuration périodique qui n'est pas globalement 0-mortelle, celle-ci admet dans son orbite – finie – une configuration $y \in B^{\mathbb{M}}$ non globalement 0-mortelle, qui est p -périodique par σ et q -périodique par N , avec $p, q \in \mathbb{N}^*$. Le p -groupé horizontal de F est alors facteur hors-contexte, par la projection π_1 , de la restriction à l'alphabet $\{(a_i, N^j(y)_i)_{0 \leq i < p} \mid (a_i)_{0 \leq i < p} \in A^p \text{ et } j \in \mathbb{N}\}$ du p -groupé horizontal de $F \circlearrowleft_{(0,A_1)} (N, N')$. D'autre part, y est une configuration uniforme quiescente du (p, q) -groupé de N . Le (p, q) -groupé de F est alors conjugué, par π_1 , à la restriction à l'alphabet $\{(a_i, y_i)_{0 \leq i < p} \mid (a_i)_{0 \leq i < p} \in A^p\}$ du (p, q) -groupé de $F \circlearrowleft_{(0,A_1)} (N, N')$. \square

Par rapport à la proposition 6.2.4, on a donc pu ajouter la condition *par blocs*, qui est très importante dans l'idée de pouvoir se représenter la simulation intuitivement. Nous avons également vu que l'on pouvait ajouter une condition d'exactitude, mais au prix d'un groupage vertical.

Proposition 6.2.6. *Soit $F : A^{\mathbb{M}} \rightarrow A^{\mathbb{M}}$ un AC qui n'est pas nilpotent sur les périodiques. Alors la nilpotence sur les périodiques des AC envahissants est inséparable du fait de simuler par blocs hors-contexte directement totalement (resp. simuler par blocs hors-contexte exactement) $(A^{\mathbb{M}}, F)$.*

Preuve. Supposons que l'on dispose d'une procédure qui sépare ces deux propriétés. Si N est un AC 0-envahissant, alors on peut appliquer notre algorithme à $(F + q) \circlearrowleft_{(0,A)} (N, \bar{0})$. Par le lemme 6.2.5, il est nilpotent sur les périodiques dès que N l'est; dans le cas contraire il admet F comme sous-facteur, donc ne peut pas être nilpotent sur les périodiques. On pourrait ainsi décider si N est nilpotent sur les périodiques, ce qui contredirait le théorème 6.1.2. \square

Un **filtre principal** pour une relation de simulation est une classe d'AC qui est stable par la relation «être simulé par» et qui possède un élément, dit minimal, que tous les éléments de la classe simulent. Si on considère une telle classe ne contenant pas d'AC nilpotent sur les périodiques, alors toute procédure de décision représenterait une séparation récursive entre la classe des AC nilpotents sur les périodiques et ceux qui simulent un de ses éléments minimaux.

Corollaire 6.2.7. *Toute filtre principal de l'ensemble des AC pour les ordres de simulation par blocs hors-contexte directe totale (resp. simulation par blocs hors-contexte exacte) qui ne contient pas d'AC nilpotent sur les périodiques, est indécidable.*

On retrouve essentiellement le résultat de [127] de l'indécidabilité des classes d'AC intrinsèquement universels pour la simulation par blocs hors-contexte exacte, puisqu'elle n'est pas vide et est strictement plus haute que l'idéal des nilpotents sur les périodiques.

En revanche, on ne sait pas s'il existe des automates cellulaires intrinsèquement universels au sens de la simulation complète (cf [31]). Remarquons que, même s'il en existait, notre construction ne nous donnerait pas l'indécidabilité, puisqu'elle utilise un sous-système strict et non un facteur cellulaire complet.

Ensembles limites. Une construction similaire aux précédentes, toujours à base de couches différentes interagissant lorsque l'une atteint un état précis, a été utilisée par Kari pour montrer un théorème à la Rice sur les ensembles limites d'AC.

Théorème 6.2.8 ([14]). *Pour toute propriété \mathcal{P} qui est vérifiée par au moins un ensemble limite d'AC, mais pas tous, le problème*

Instance: *un AC G .*

Question: *l'ensemble limite Ω_G vérifie-t-il la propriété \mathcal{P} ?*

est indécidable.

Des variantes de cette formulation ont été prouvées pour différents systèmes dynamiques, avec souvent des restrictions supplémentaires. En particulier, un théorème à la Rice sur les pavages serait une sorte de généralisation du théorème précédent, puisque l'ensemble limite d'un AC représente l'ensemble des lignes horizontales du pavage représenté par ses diagrammes espace-temps. Plusieurs résultats s'en rapprochent.

Dans [128, 129] est établie l'indécidabilité des problèmes de l'inclusion et de l'égalité d'un *STF bidimensionnel* avec un autre, fixé.

Dans [130, 131], il est prouvé que pour toute famille de systèmes dynamiques pour laquelle le produit est calculable et l'équivalence au système vide est décidable, toute propriété non vide, stable par produit, et fautive pour le système vide est *indécidable*. En particulier, pour les jeux de tuiles de Wang, cela rend indécidable des problèmes sur le nombre de pavages possibles à décalages près ou la *factorisation* d'un système non vide particulier.

On peut également citer le résultat établi dans [132], basé sur un théorème à la Kleene : tout *filtre* non trivial pour la relation de *simulation exacte* sur les *pavages* de Wang est *indécidable*.

Toutes les constructions présentées dans cette section sont basées sur une augmentation de l'alphabet. Les résultats d'indécidabilité sont donc obtenus pour des alphabets non fixés. Parvenir à un théorème à la Rice sur les ensembles limites d'AC avec un alphabet fixé paraît compliqué. En effet, la surjectivité devient une propriété de l'ensemble limite, alors qu'elle est décidable. Deux possibilités de généralisation semblent alors pertinentes. La première consiste à se demander si les propriétés *topologiques* de l'ensemble limite sont indécidables, *i.e.* les propriétés de l'ensemble à homéomorphisme près, ce qui permet de contourner le problème de la surjectivité, alors équivalent à la perfection de l'ensemble limite. La deuxième consiste ni plus ni moins qu'à tenter de prouver que la surjectivité est la seule propriété décidable sur les ensembles limites (*cf* [133]).

6.3 Tracés

Nous allons établir un théorème à la Rice «perpendiculaire» à celui de Kari : sur le bitracé des AC, ou de manière équivalente sur leur tracé limite (*cf* fait 4.7.24). Contrairement au résultat sur les ensembles limites, qui concerne les configurations atteintes arbitrairement tard elles-mêmes, on intègre ici une notion *dynamique* en s'intéressant à l'évolution de ces configurations. Les réductions reposent sur les constructions présentées dans la section 5.2, le dégroupage nous permettant même de raisonner à alphabet fixé.

Propriétés sur les polytracés limites. Comme pour les conditions de traçabilité, on simplifie tout d'abord le problème en s'intéressant aux tracés des automates à répartition périodique, *i.e.* les polytracés d'AC sur des alphabets puissances de A : les problèmes sont plus difficiles puisqu'on s'autorise à avoir une règle différente selon les cellules, tout en ne regardant toujours qu'une largeur de 1. On note $\overset{\circ}{\tau}_F^\Omega$ le polytracé limite de l'AC F .

Soient G un AC sur $\mathcal{Z}^{\mathbb{M}}$, $\xi : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$ une règle locale de rayon 0, $N' : \mathcal{Z}^{\mathbb{M}} \rightarrow \mathcal{Z}^{\mathbb{M}}$ l'AC correspondant. On construit les alphabets $A_1 = \{(a, a, b) \mid a, b \in \mathcal{Z}\}$ et $A_2 = \mathcal{Z}^3 \setminus A_1$, ainsi que les AC $F_1 = (N' \times N' \times G)|_{A_1}$, $F_2 = (\sigma \times \sigma \times G)|_{A_2}$ et F un ϕ -amalgamé de F_1 et F_2 , avec $\phi : A_2 \rightarrow A_1$. On peut alors appliquer le lemme 6.2.2 à n'importe quel AC 0-envahissant N sur l'alphabet \mathcal{Z} .

Le produit que l'on a défini à la section précédente se compose ici de quatre couches : la quatrième est celle qui contrôle, avec son état envahissant 0 ; la troisième, toujours indépendante, simule l'évolution de G ; Lorsque les deux premières composantes sont distinctes, elles simulent des décalages (complets) qui vont «masquer» le tracé de G . Lorsqu'un état 0 apparaît dans la dernière couche, elles vont s'arrêter, s'unifier, puis appliquer un mode par défaut ξ – dont on s'arrangera pour qu'il soit contenu dans le tracé de G .

Lemme 6.3.1.

- Si N est nilpotent, alors le polytracé limite $\overset{\circ}{\tau}_{F \circlearrowleft(0, A_1)(N, N')}^\Omega$ du produit contrôlé vaut $\Omega_{\mathcal{O}_\xi \cup \tau_G}$.
- Sinon, son polytracé $\overset{\circ}{\tau}_{F \circlearrowleft(0, A_1)(N, N')}$ est le décalage complet $\mathcal{Z}^{\mathbb{N}}$.

Preuve .

- Par le lemme 6.2.2, si N est nilpotent, alors le système limite de $F \circlearrowleft(0, A_1)(N, N')$ égale celui de $(N' \times N' \times G)|_{A_1} \times N'$. Le tracé de ce dernier a bien pour union de projetés : $\mathcal{O}_\xi \cup \mathcal{O}_\xi \cup \tau_G \cup \mathcal{O}_\xi$.
- Dans le cas contraire, notre produit admet un sous-système dont les trois premiers projetés sont $(\sigma \times \sigma \times G)|_{A_2}$. Le premier projeté est bien un décalage complet, puisque pour tout mot infini $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$, il en existe un autre $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ distinct en toute cellule $i \in \mathbb{N}$, $a_i \neq b_i$; ainsi le polytracé contient $\pi_0(\{(a_0, a_1, b) \in \mathcal{Z}^3 \mid a_0 \neq a_1\}) = \mathcal{Z}^{\mathbb{N}}$. \square

Propriétés sur les tracés limites. Comme dans la section 5.2, nous allons maintenant simuler les AC sur des alphabets à plusieurs couches pour transformer le résultat sur les polytracés limites en résultat sur les tracés limites.

Lemme 6.3.2. *Soit F un AC unilatère non nilpotent et de tracé non complet. Étant donné un AC G sur $\mathbb{2}$, il est inséparable de savoir si son tracé limite τ_G^Ω est $\mathbb{2}^{\mathbb{N}}$ ou τ_F^Ω .*

Preuve. Soit N un AC unilatère 0-envahissant.

- Supposons que le tracé τ_F contient un sous-décalage déterministe \mathcal{O}_ξ non nilpotent, avec $\xi : \mathbb{2} \rightarrow \mathbb{2}$ (cf fait 4.7.25), que l'on peut utiliser comme règle de N' dans l'AC unilatère produit $F \circlearrowleft_{(0, A_1)}(N, N')$, tel que défini plus haut. Le sous-décalage déterministe \mathcal{O}_ξ nous permet également d'utiliser la proposition 5.4.5 pour transformer $F \circlearrowleft_{(0, A_1)}(N, N')$ en un AC \tilde{F} sur l'alphabet $\mathbb{2}$ tel que $\tau_{\tilde{F}}^\Omega = \overset{\circ}{\tau}_{F \circlearrowleft_{(0, A_1)}(N, N')}$.
- Si le tracé – non nilpotent – τ_F ne contient aucun sous-décalage déterministe non nilpotent, alors il contient un mot périodique w^∞ , avec $w \in A^+ \setminus 0^+$. On peut définir l'AC nul $N' = \bar{0}$ sur $\mathbb{2}^{\mathbb{N}}$ et $\xi' : a \mapsto 0$ sa règle locale. En remarquant que w^∞ et $\Omega_{\mathcal{O}_\xi} = \{0^\infty\}$ sont aussi dans le tracé limite de $F \circlearrowleft_{(0, A_1)}(N, N')$, on peut appliquer le lemme 5.3.10 pour construire un AC \tilde{F} sur $\mathbb{2}$ tel que $\tau_{\tilde{F}}^\Omega = \overset{\circ}{\tau}_{F \circlearrowleft_{(0, A_1)}(N, N')}$.

Dans les deux cas, on obtient par le lemme 6.3.1 que si N est nilpotent, alors $\tau_{\tilde{F}}^\Omega = \tau_F^\Omega$, sinon $\tau_{\tilde{F}}^\Omega = \mathbb{2}^{\mathbb{N}}$. Si l'on pouvait séparer ces deux cas, on contredirait donc le théorème 6.1.1 d'indécidabilité de la nilpotence des AC envahissants unilatères. \square

On voit en particulier, comme prouvé dans [53], qu'il est indécidable de savoir si un AC a un tracé complet – puisqu'il existe des AC pour lesquels ce n'est pas le cas. Mais cela concerne également les autres propriétés non triviales des tracés limites.

Théorème 6.3.3. *Pour toute propriété \mathcal{P} qui est vérifiée par le tracé limite d'au moins un AC sur l'alphabet $\mathbb{2}$, mais pas tous, le problème*

Instance: *un AC bilatère G sur l'alphabet $\mathbb{2}$.*

Question: *le tracé limite τ_G^Ω vérifie-t-il la propriété \mathcal{P} ?*

est indécidable.

Preuve. Considérons une telle propriété \mathcal{P} . Quitte à passer à sa complémentaire, on peut supposer que le décalage complet ne vérifie pas \mathcal{P} . Si \mathcal{P} n'est vérifiée que par des singletons, alors \mathcal{P} est équivalente à la propriété de 0-nilpotence, de 1-nilpotence ou de nilpotence, qui sont toutes trois indécidables par le théorème 6.1.1.

Dans le cas contraire, \mathcal{P} est vérifiée par le tracé limite τ_F^Ω d'un AC $F : \mathbb{2}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{2}^{\mathbb{Z}}$ non nilpotent. Si un algorithme permettait de décider la propriété \mathcal{P} , il permettrait alors de séparer le bitracé τ_F^Ω de $\mathbb{2}^{\mathbb{N}}$ parmi les bitracés d'AC sur $\mathbb{2}$, ce qui contredirait le lemme 6.3.2. \square

Le dégroupage impose, contrairement aux sections précédentes, de se limiter à l'espace bilatère $A^{\mathbb{Z}}$. Il n'est pas clair que toutes les propriétés restent indécidables pour les AC unilatères.

Le problème du tracé de largeur 1 est un sous-problème de celui de la projection selon une droite d'un pavage régi par des contraintes locales (STF bidimensionnel). On en déduit donc le résultat d'indécidabilité suivant, qu'il était vain de tenter de relier au théorème de Rice sur les ensembles limites (à alphabet variable), puisque, comme la surjectivité, la propriété n'est pas intrinsèque à l'ensemble, mais liée à l'alphabet de départ.

Corollaire 6.3.4. *Pour toute propriété \mathcal{P} qui est vérifiée par le projeté horizontal d'un STF bidimensionnel sur l'alphabet $\mathbb{2}$, mais pas tous, le problème*

Instance: un STF $\Sigma \subset 2^{\mathbb{Z}^2}$.

Question: le projeté horizontal de Σ vérifie-t-il la propriété \mathcal{P} ?

est indécidable.

Étant donné un jeu de tuiles et des contraintes locales, il est par exemple indécidable de savoir si l'on peut compléter n'importe quelle ligne infinie de tuiles en un pavage du plan.

Le théorème 6.3.3 présente donc un résultat d'indécidabilité très fort sur le tracé des AC. On peut le généraliser à tous les facteurs colonnes d'une largeur donnée quelconques d'un AC, puisqu'ils peuvent se ramener à la largeur 1 par groupage. On s'est arrangé, comme dans le chapitre 5, pour étaler la complexité en largeur pour que le tracé de largeur 1 devienne presque insignifiant. Il en découle donc le même type de questions que pour le problème de la traçabilité : est-il possible d'avoir un résultat d'indécidabilité sur le facteur diamétral d'un AC, ou du moins sur le tracé pour des AC de rayon borné ?

Notre construction paraît difficilement adaptable à ce sur-problème, puisqu'elle part du principe d'une simulation qui peut encoder l'information en autant de bits que nécessaires. De plus, le facteur diamétral est tellement particulier qu'il admet des propriétés à la limite qui ne sont pas triviales mais décidables : on sait par exemple que le mot $(0^{\vec{d}})^{\mathbb{N}}$ apparaît dans le facteur diamétral limite d'un AC F si et seulement si sa règle locale f vérifie $f(0^{\vec{d}}) = 0$.

Néanmoins, on peut tout de même prouver quelques propriétés indécidables sur des facteurs dont la largeur dépend du rayon. Nous allons voir dans la section suivante que de nombreuses propriétés du facteur diamétral sont indécidables.

6.4 Décidabilité des systèmes sofiqes

Dans cette partie, nous nous intéressons particulièrement aux sous-décalages et AC sofiqes, dans laquelle des calculs sont possibles et les problèmes deviennent décidables.

Décidabilité sur les sous-décalages sofiqes. Les sous-décalages sofiqes sont représentables sous la forme d'un graphe dont il sont le système d'étiquettes. Nous pouvons donc nous demander quelles sont les opérations ou les questions que l'on peut automatiser en prenant un tel graphe en entrée. L'appartenance d'un mot fini au langage du sous-décalage n'est pas difficile, puisqu'il s'agit d'un automate fini. L'égalité des sous-décalages est également décidable.

D'autre part, grâce aux caractérisations données dans la sous-section 2.6.2, on peut voir que des propriétés topologiques complexes dans le cas général sont décidables pour cette sous-classe, puisqu'elles se ramènent à des parcours ou des tests de composantes fortement connexes sur des graphes : *nilpotences*, *(pré) périodicités*, *équicontinuité*, *autotransitivité*, *sensibilité*, *transitivités*, *mélanges*, ainsi que la *chaîne-transitivité* (cf [134]) et même l'*universalité*.

On peut également calculer les *ensembles limite* et *asymptotique*, ainsi que l'*ordre* (le cas et échéant) et l'*entropie*, grâce à la théorie spectrale (cf [42]) – ce qui n'est pas le cas pour tous les sous-décalages finiment représentables (cf [135]). Les opérations de *factorisation*, *chevauchement*, *produit*, *projection* se révèlent aussi assez simples, comme vu avec les faits 2.3.1, 2.3.10 et 2.2.6. En revanche les problèmes de la décidabilité de la *conjugaison* et de la *factorisation* entre deux sous-décalages sofiqes sont toujours ouverts. Malgré ce problème ouvert assez important, les sous-décalages sofiqes sont des systèmes qu'il est facile de bien connaître effectivement.

Calculabilité des facteurs sofiqes. Qu'en est-il des propriétés d'un AC sofique en général ? Pour les propriétés que l'AC partage avec son facteur canonique, on peut se ramener à leur décidabilité sur ce sous-décalage, grâce à la calculabilité de celui-ci, prouvée par di Lena dans [47, 121]. Nous en redonnons ici une preuve, puisqu'il s'agit d'un résultat fondamental dans l'étude des tracés. Elle utilise la quasi-

caractérisation des facteurs canoniques d'AC de la proposition 3.5.12 en termes d'autochevauchement et de compatibilité.

Lemme 6.4.1. *Soit Σ le sous-décalage d'étiquettes d'un graphe fortement résoluble à n sommets, sur l'alphabet $A^{\tilde{d}}$, qui est autochevauchant et compatible avec un AC $F : A^M \rightarrow A^M$ de diamètre centré $\tilde{d} \in \mathbb{N}^*$. Alors $\tau_F^{\tilde{d}} = \Sigma$ si et seulement si les langages d'ordre $n^{\tilde{d}}$ du tracé $\tau_F^{2\tilde{d}-1}$ et du chevauché $\Sigma^{[\tilde{d}-1]}$ coïncident.*

Preuve. Puisque Σ est autochevauchant et compatible avec F , la proposition 3.5.12 nous donne déjà $\Sigma \subset \tau_F^{\tilde{d}}$. Par projection, il y a égalité si et seulement si $\Sigma^{[\tilde{d}-1]} = \tau_F^{2\tilde{d}-1}$, ou encore si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{L}_k(\Sigma^{[\tilde{d}-1]}) = \mathcal{L}_k(\tau_F^{2\tilde{d}-1})$. Nous allons montrer cette condition par récurrence sur k , dans le cas où elle est vraie pour $k = n^{\tilde{d}}$.

Soit $k \geq n^{\tilde{d}}$ tel que $\mathcal{L}_k(\Sigma^{[\tilde{d}-1]}) = \mathcal{L}_k(\tau_F^{2\tilde{d}-1})$ et $u \in \mathcal{L}_{k+1}(\tau_F^{2\tilde{d}-1})$; montrons que $u \in \mathcal{L}_{k+1}(\Sigma^{[\tilde{d}-1]})$. Par compatibilité, une simple application de la règle locale de F nous donne déjà $\mathcal{L}_{k+1}(\Sigma) = \mathcal{L}_{k+1}(\tau_F^{\tilde{d}})$. Donc, si l'on note $u^q = \pi_{\llbracket q, q+\tilde{d} \rrbracket}(u)$ pour $0 \leq q < \tilde{d}$, alors $u^q \in \mathcal{L}_{k+1}(\Sigma)$. Soit $(c_j^q)_{0 \leq j \leq k+1}$ l'unique chemin du graphe fortement résoluble dont l'étiquette est u^q et tel que c_0^q est le sommet initial particulier v_0 du graphe. Puisque les c_j^q sont parmi $n < k+1$ sommets du graphe, on peut voir par le principe des tiroirs, similairement à la proposition 2.4.8, qu'il existe $j \leq k+1$ et $i < j$ tels que $\forall q \in \llbracket 0, \tilde{d} \rrbracket, c_i^q = c_j^q$. On peut donc construire les mots $\tilde{u}^q = u_0^q \dots u_i^q u_{j+1}^q \dots u_{k+1}^q$, pour $0 \leq q < \tilde{d}$, qui sont chevauchants, et qui sont les étiquettes des chemins $c_0^q, \dots, c_i^q, c_{j+1}^q, \dots, c_{k+1}^q$; ils sont donc bien dans $\mathcal{L}_{k+1-j+i}(\Sigma)$, donc dans $\mathcal{L}_{k+1-j+i}(\tau_F^{\tilde{d}})$. Par la proposition 3.5.3, le chevauchement $\tilde{u} = \tilde{u}^0 \odot \dots \odot \tilde{u}^{\tilde{d}-1}$ est dans $\mathcal{L}_{k+1-j+i}(\tau_F^{2\tilde{d}-1})$. Puisque $k+1-j+i < k+1$, l'hypothèse de récurrence nous donne que $\tilde{u} \in \mathcal{L}_{k+1-j+i}(\Sigma^{[\tilde{d}-1]})$, i.e. il est le préfixe d'un mot infini $\tilde{u}z \in \Sigma^{[\tilde{d}-1]}$ avec $z \in \Sigma^{[\tilde{d}-1]}$. Chaque projeté $\tilde{u}^q z^q \pi_{\llbracket q, q+\tilde{d} \rrbracket}(\tilde{u}z)$, avec $0 \leq q < \tilde{d}$, est un mot infini de Σ ayant \tilde{u}^q comme préfixe. L'unique chemin d'étiquette $\tilde{u}z$ partant du sommet v_0 s'écrit donc $c_0^q, \dots, c_i^q, c_{j+1}^q, \dots, c_{k+1}^q, \dots$. On peut refaire la boucle : $c_0^q, \dots, c_{k+1}^q, \dots$ et trouver ainsi son étiquette $u^q z^q$ telle que pour $0 \leq q < \tilde{d}-1$, $u^q z^q$ et $u^{q+1} z^{q+1}$ sont chevauchants. Autrement dit, le chevauchement $uz = u^0 z^0 \odot \dots \odot u^{\tilde{d}-1} z^{\tilde{d}-1}$ est dans $\Sigma^{[\tilde{d}-1]}$, donc u est bien dans le langage de $\Sigma^{[\tilde{d}-1]}$.

La réciproque vient directement de l'autochevauchement du facteur canonique (cf proposition 3.5.5). \square

Proposition 6.4.2 ([47]). *Le problème*

Instance: *un sous-décalage sofique Σ et un AC F .*

Question: *Σ est-il le facteur diamétral de F ?*

est décidable.

Preuve. On a pris comme convention que Σ est représenté en entrée par un graphe. Nous avons vu que le chevauchement et les projections sont calculables. On peut donc facilement décider si Σ est autochevauchant. La condition de compatibilité est encore plus facile : elle peut s'écrire sous forme d'inclusion dans un sous-décalage markovien particulier. Si ces deux propriétés ne sont pas vérifiées, Σ n'est pas le facteur canonique, par la remarque 3.5.11.

On peut donc également calculer le $(\tilde{d}-1)$ -chevauchement de Σ . Étant donné un graphe quelconque, on peut facilement le déterminer en un graphe fortement résoluble, comme vu dans le fait 2.4.5; soit n le nombre de sommets du graphe obtenu. Pour chaque mot de longueur $n^{\tilde{d}}$, on teste son appartenance à $\Sigma^{[\tilde{d}-1]}$ (par automate) et à $\tau_F^{2\tilde{d}-1}$, (par le triangle de calcul du fragment correspondant de longueur $n^{\tilde{d}}(\tilde{d}-1)+1$ de configuration initiale); on vérifie qu'il appartient soit aux deux, soit à aucun des deux. Si c'est le cas pour tous les mots, Σ est le facteur canonique, par le lemme 6.4.1. \square

Grâce à ce résultat, on peut calculer le facteur diamétral d'un AC, si on le sait sofique. Il suffit d'énumérer tous les sous-décalages sofiques jusqu'à trouver le bon. Par le théorème 3.6.9, cela concerne exactement les AC sofiques. Une fois qu'on connaît effectivement le facteur diamétral, les tracés de largeur plus grandes peuvent être obtenus par chevauchement, et ceux de largeur plus petite par projection – ces deux opérations sont calculables à partir de la partition en ouverts impliquée.

Corollaire 6.4.3. *La fonction qui à tout AC sofique F et toute partition \mathcal{P} associe le tracé $\tau_F^{\mathcal{P}}$ est calculable.*

Décidabilité sur les automates cellulaires sofiques. On peut déduire du corollaire 6.4.3 que toutes les propriétés de l'AC qui se traduisent en une propriété du facteur canonique – ou d'un FCC d'une largeur calculable – qui est décidable pour les sous-décalages sofiques, le deviennent pour les AC sofiques.

Corollaire 6.4.4 ([47]). *La nilpotence, la périodicité, la prépériodicité (équicontinuité), l'expansivité positive des AC sofiques sont des propriétés décidables.*

La classification de Gilman-Kůrka devient donc presque décidable dans la sous-classe des AC sofiques ; on ne sait toujours pas si l'on peut y séparer la sensibilité et la quasi-équicontinuité.

Question 6.4.5 ([121]). *La sensibilité des AC sofiques est-elle décidable ?*

Grâce aux faits 2.6.22 et 2.6.26, les tracés limites ou asymptotiques sont tous calculables.

Dans le cas général, l'entropie d'un AC est incalculable, comme cela a été montré dans [136]. Mais puisque l'entropie d'un AC sofique unidirectionnel égale celle de son facteur canonique, on obtient encore le résultat suivant.

Corollaire 6.4.6 ([47]). *L'entropie d'un AC sofique unidirectionnel est calculable.*

Ce résultat pourrait être étendu à tous les AC sofiques si la réponse à la question 4.8.6 était positive, au moins dans le cas sofique.

De même, la remarque 3.5.8 prend ici tout son sens : puisque l'on sait décider une propriété, comme la transitivité, sur le sous-décalage représentant une observation si celui-ci est sofique, il serait intéressant de savoir s'il existe une précision particulière avec laquelle observer notre système pour savoir si lui aussi a cette propriété.

Indécidabilité de la soficité.

Théorème 6.4.7. *La non-soficité des AC est inséparable de la nilpotence.*

Preuve. Si l'on avait un algorithme pour séparer les AC non sofiques des AC nilpotents, alors il nous permettrait de décider la nilpotence d'un AC quelconque, en lui appliquant après le test de nilpotence des AC sofiques. \square

De nombreux résultats en découlent. Outre les propriétés énoncées ci-dessous, qui se situent entre la nilpotence et la soficité, on peut remarquer que la complexité d'un tracé sofique, en terme du nombre de sommets du graphe minimal le représentant, n'est pas bornable récursivement par rapport à l'AC de départ.

Corollaire 6.4.8. *Les classes des AC sofiques, des AC qui ont la propriété de pistage, des AC de type fini, ou des AC à tracés sofiques dénombrables sont indécidables.*

On retrouve également l'indécidabilité de la prépériodicité, déjà établie avec le corollaire 6.1.9, ou encore de la classe des AC dont les FCC sont des STF, qui avait été prouvée dans [46].

Calculabilité des facteurs de type fini. Grâce à la propriété 3.6.4, on sait que la sous-classe des AC dont tous les facteurs colonnes suffisamment larges sont de type fini est décidable parmi les AC sofiques : il suffit en effet de vérifier que le facteur canonique, sofique, est bien de type fini.

En revanche, on ne sait pas si la sous-classe des AC de type fini est décidable parmi les AC sofiques : il faudrait en effet pouvoir borner la largeur de la partition qui donne un sous-décalage de type fini.

Conjecture 6.4.9. Le problème

Instance: un AC F sofique.

Question: F est-il de type fini?

est décidable.

On peut néanmoins voir un équivalent du corollaire 6.4.3.

Proposition 6.4.10. *La fonction qui à tout AC F de type fini et toute partition \mathcal{P} associe une partition \mathcal{P}' et le tracé $\tau_F^{\mathcal{P}'}$ tels que $T_F^{\mathcal{P}}$ est décomposable par $T_F^{\mathcal{P}'}$ et $\tau_F^{\mathcal{P}'}$ est un SFT est calculable.*

Preuve. On peut construire un algorithme qui prend un AC F de type fini et une partition \mathcal{P}' en entrée et qui agit comme suit :

- On calcule le facteur diamétral de F , puisqu'on sait qu'il est sofique.
- On énumère toutes les partitions plus fines que \mathcal{P} , en calculant, par des chevauchements et des factorisations lettre à lettre du facteur diamétral, les tracés correspondants et en testant à chaque fois s'ils sont de type fini.

Lorsqu'on en a trouvé un de type fini, on sait alors qu'il permet de décomposer la trace $T_F^{\mathcal{P}}$ puisqu'il est pris sur une partition plus fine. L'algorithme termine toujours puisque par hypothèse il existe une telle partition. \square

Soficité effective. Les espaces de configurations tels qu'on les a utilisés sont en fait des **espaces symboliques effectifs** selon la terminologie de [17], *i.e.* il existe une énumération d'une base d'ouvervés – les cylindres – pour laquelle l'intersection et la complémentation calculables. Dans ce cadre, on dira qu'un SS est **effectivement sofique** (resp. **effectivement de type fini**) s'il est sofique et si, étant donné une partition en ouverts, le tracé (resp. un facteur de type fini dont il est facteur) correspondant est calculable – sous la forme d'un graphe. Les corollaires 6.4.3 et 6.4.10 impliquent évidemment la décidabilité du problème à AC fixé.

Corollaire 6.4.11. *Tout AC sofique (resp. de type fini) l'est effectivement.*

On peut obtenir un résultat analogue sur les systèmes équicontinus, si l'on définit l'**équicontinuité effective** d'un SS effectif (A, F) comme la calculabilité, à partir d'un rayon $k \in \mathbb{N}$, d'un rayon $l \in \mathbb{N}$ tel que $\forall x, \left| T_F^{(l)}(x_{\langle k \rangle}) \right| = 1$.

Proposition 6.4.12. *Tout SS équicontinu l'est effectivement.*

Preuve. Soit $(A \subset A^{\mathbb{M}}, F)$ un SS équicontinu et $k \in \mathbb{N}$. On peut trouver un coefficient $l \in \mathbb{N}$ qui correspond de la façon suivante : on énumère les entiers $l \in \mathbb{N}$ jusqu'à en trouver un tel que pour tout mot $u \in A^{\langle r_l \rangle}$, $T_F^{(k)}([u]) = T_F^{(k)}([u_{\langle l \rangle}])$ (cf théorème 1.12.15) ; un tel l existe par hypothèse. \square

Corollaire 6.4.13. *Tout SS équicontinu est effectivement de type fini.*

Preuve. Soit $(A \subset A^{\mathbb{M}}, F)$ un SS équicontinu et $k \in \mathbb{N}$. Une fois que l'on connaît $l \in \mathbb{N}$ tel que pour tout mot $u \in A^{\langle l \rangle}$, $T_F^{(k)}([u])$ est un singleton, alors on sait que le cardinal de $\tau_F^{(k)}$ est inférieur ou égal à $|A^{\langle l \rangle}|$. Donc ce sous-décalage est (p, q) -prépériodique avec $p+q \leq |A^{\langle l \rangle}|$. On peut prendre comme langage interdit l'ensemble des mots de longueur $|A^{\langle l \rangle}|$ que l'on voit dans les tracés – facile à calculer – et renvoyer le sous-décalage correspondant. \square

On peut également définir la propriété de **pistage effectif** comme celle des SS effectifs pour lesquels un algorithme prenant en entrée $k \in \mathbb{N}$ renvoie $l \in \mathbb{N}$ tel que toute 2^{-l} -chaîne est 2^{-k} -pistée.

Proposition 6.4.14. *Un SS a la propriété de pistage effectif si et seulement s'il a la propriété de pistage et est effectivement sofique.*

Preuve.

- Soit $(A \subset A^{\mathbb{M}}, F)$ un SS qui a la propriété de pistage effectif et $k \in \mathbb{N}$. On peut trouver $l \in \mathbb{N}$ tel que $\pi_{\langle k \rangle}(\mathcal{A}_2(\tau_F^{(l)})) = \tau_F^{(k)}$. La 2-approximation du tracé $\tau_F^{(l)}$ est facilement calculable, de même que la projection ; on obtient donc le tracé $\tau_F^{(k)}$.
- Réciproquement, soit (A, F) un SS effectivement sofique qui a la propriété de pistage. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on peut trouver un coefficient $l \in \mathbb{N}$ tel que toutes les 2^{-l} -chaînes sont 2^{-k} -pistées, en énumérant tous les $l \in \mathbb{N}$ jusqu'à en trouver un tel que $\tau_F^{(k)} = \pi_{\langle k \rangle}(\mathcal{A}_2(\tau_F^{(l)}))$ – ce qui est aisément décidable pour des sous-décalages sofiques. \square

On retrouve donc que les SS équicontinus ont la propriété de pistage effectif, comme prouvé dans [17]. D'autre part, on voit que tous les AC qui ont la propriété de pistage l'ont effectivement.

Ainsi, dans cette classe de SS effectivement sofiques, on peut voir que toutes les opérations simples sur les tracés sont calculables.

Automates cellulaires décidables. Nous avons vu que de nombreuses propriétés pouvaient être décidées sur les AC sofiques. Il s'agit en fait d'une sous-classe d'AC définis comme étant assez simples pour que l'on puisse prévoir un tant soit peu leur comportement : les AC décidables.

Dans [15, 137], la décidabilité des AC est définie comme la décidabilité du problème de l'atteignabilité des configurations. Dans [138], elle est définie pour les SS à partir de la logique temporelle, dans [17] à partir d'un problème de vérification de modèle relativement à un *automate de Müller*. Une simplification consiste à qualifier un AC (A, F) de **décidable** si c'est le cas du problème

Instance: une partition \mathcal{P} en ouvermés de A et un sous-décalage sofique $\Sigma \subset \mathcal{P}^{\mathbb{N}}$.

Question: le tracé $\tau_F^{\mathcal{P}}$ intersecte-t-il Σ ?

Cette définition correspond donc au fait que l'on peut prévoir à long terme si une orbite, faite avec une certaine observation (diamètre de \mathcal{P}) a une chance d'avoir une trajectoire donnée. Les sous-décalages sofiques sont bien sûr décidables, puisqu'on peut calculer leur intersection ; en conséquence, tous les SS effectivement sofiques aussi, en particulier les AC sofiques. On peut imaginer distinguer des classes décidables plus grandes, comme les SS effectivement algébriques, qui ont des tracés algébriques calculables. La classe des AC effectivement algébriques est toujours inséparable des nilpotents ; en revanche, on ne sait pas si elle contient tous les AC algébriques.

La vérification de modèle amène également des notions d'universalité, liées à la complétude du problème ci-dessus pour les problèmes récursivement énumérables. On trouve également une notion d'universalité dans [18], reliée à la complexité du problème de l'appartenance au bassin d'un sous-décalage attracteur. Ces notions d'universalité n'ont que peu de liens avec l'universalité intrinsèque. Pour n'importe laquelle des notions de simulation pertinentes vues en section 3.2, tout SS universellement intrinsèque pour une famille de SS Turing-puissante, comme les AC, reste universel pour toutes les notions précédemment mentionnées, car les problèmes de vérification de modèle d'un système simulé sont des sous-problèmes de ceux du système simulant. Mais aucune sorte de réciproque n'est vraie, puisque la simulation cellulaire apporte beaucoup plus qu'une simple simulation de calcul.

Plusieurs points de vue se détachent donc dans l'étude des SS et des AC comme modèles de calcul : soit on se ramène toujours au modèle de base qu'est la machine de Turing, soit on considère plutôt des puissances de calcul relatives, en comparant les différents systèmes entre eux.

Conclusion

Ce chapitre illustre le fait que la dynamique à long terme des automates cellulaires est incompréhensible, au sens informatique. Outre des résultats classiques d'indécidabilité, comme pour la nilpotence, dont nous avons revisité une preuve à alphabet fixé, on a montré que la dynamique à long terme d'une cellule particulière ne correspond elle aussi qu'à des propriétés indécidables ; cela correspond à une sorte d'équivalent vertical du théorème de Rice sur les ensembles limites.

Conclusion

LA dynamique des systèmes dynamiques, des systèmes symboliques, des automates cellulaires, reste encore largement incomprise. Parmi les pistes pour tenter de la cerner, outre la décidabilité, la puissance de calcul, la topologie, la mesure, on peut adopter une approche symbolique, en transformant l'étude de ces systèmes complexes en systèmes plus simples, les décalages de mots infinis. Cette vision peut se justifier par l'observation de phénomènes, lors d'une expérience physique, à travers un instrument qui, à chaque instant, permet une mesure approchée de l'état de l'environnement.

La transformation en question, qui est une factorisation topologique, est particulièrement intuitive dans la topologie de Cantor : elle y correspond à regarder l'évolution des cellules qui sont proches du centre. Par exemple, la convergence vers une configuration se traduit pour les facteurs en une stationnarité ultime. La factorisation est encore plus adaptée aux automates cellulaires, dont la règle locale d'évolution peut être vue à partir des cellules centrales.

Nous avons passé en revue de nombreuses notions classiques, notamment de dynamique topologique. Certaines se transmettent par cette factorisation, d'autres par la transformation inverse ; pour d'autres, le problème reste ouvert : on ne sait pas si l'on peut comprendre, à partir d'une observation faite avec une certaine imprécision, les propriétés correspondantes du phénomène impliqué.

Dans certains cas précis cependant, on sait retrouver un phénomène particulier (un automate cellulaire) qui a pu expliquer une observation donnée. Mais, comme pour la plupart des propriétés sur les automates cellulaires, nous avons montré qu'il n'était pas possible de prévoir à quoi va ressembler l'observation à partir de la donnée du phénomène impliqué.

Cette thèse s'inscrit donc dans les tentatives de compréhension des automates cellulaires, ainsi que de compréhension de notre incompréhension dans ce domaine. Dans ce cadre, les simulations cellulaires, ainsi que la dynamique symbolique, que nous avons définies avec un ancrage topologique, représentent des outils très intéressants. Le premier permet de comprendre la structure des classes d'automates cellulaires et amène une liaison avec la puissance de calcul. Le second permet d'effectuer une certaine projection des dynamiques complexes vers quelque chose que l'on se représente mieux – mais qui reste souvent compliqué.

Il reste néanmoins beaucoup de problèmes pour nous diriger vers une unification des différentes approches de l'étude des automates cellulaires : comprendre mieux les liens entre leurs propriétés topologiques et l'observation dont nous parlions plus haut, mais également entre leurs comportements dynamiques (stables, chaotiques, ...) et leur capacité en tant que modèle de calcul.

Bibliographie

- [1] John von NEUMANN : *Cerebral Mechanisms in Behavior*, chapitre The General and Logical Theory of Automata, pages 1–41. John Wiley, New York, 1951.
- [2] Edgar F. CODD : *Cellular Automata*. Academic Press, New York, 1968.
- [3] Christopher G. LANGTON : Self-reproduction in cellular automata. *Physica D*, 10:135–144, 1984.
- [4] Konrad ZUSE : Rechnender raum. *Elektronische Datenverarbeitung*, 8:336–344, 1967.
- [5] Martin GARDNER : The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game "life". *Scientific American*, 223:120–123, octobre 1970.
- [6] Edward F. MOORE : Machine models of self-reproduction. *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, 14:17–33, 1962.
- [7] John MYHILL : The converse of Moore's Garden-of-Eden theorem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 14:658–686, 1963.
- [8] Fabio FAGNANI et Luciano MARGARA : Expansivity, permutivity, and chaos for cellular automata. *Theory of Computing Systems*, 31(6):663–677, 1998.
- [9] Giovanni MANZINI et Luciano MARGARA : A complete and efficiently computable topological classification of D -dimensional linear cellular automata over \mathbb{Z}_m . *Theoretical Computer Science*, 221:157–177, 1999.
- [10] Alberto DENNUNZIO, Pietro di LENA, Enrico FORMENTI et Luciano MARGARA : Classification of directional dynamics for additive cellular automata. In DURAND [139], pages 40–53.
- [11] Jarkko KARI : *Decision problems concerning Cellular Automata*. Thèse de doctorat, University of Turku, Finland, 1990.
- [12] Jarkko KARI : The nilpotency problem of one-dimensional cellular automata. *SIAM Journal on Computing*, 21(3):571–586, 1992.
- [13] Jarkko KARI : Reversibility of 2D cellular automata is undecidable. *Physica D*, 45(1–3):379–385, septembre 1990.
- [14] Jarkko KARI : Rice's theorem for the limit sets of cellular automata. *Theoretical Computer Science*, 127(2):229–254, 1994.
- [15] Karel ČULIK, II et Sheng YU : Undecidability of cellular automata classification schemes. *Complex Systems*, 2:177–190, 1988.
- [16] Klaus W. SUTNER : Cellular automata and intermediate degrees. *Theoretical Computer Science*, 296(2):365–375, 2003.
- [17] Jean-Charles DELVENNE, Petr KŮRKA et Vincent BLONDEL : Decidability and universality in symbolic dynamical systems. *Fundamenta Informaticæ*, XX:1–25, 2005.
- [18] Pietro di LENA et Luciano MARGARA : Computational complexity of dynamical systems : the case of cellular automata. In *International Conference on Languages, Automata Theory and Applications (LATA'07)* 1st, Tarragona, Spain, avril 2007.

- [19] Elwyn R. BERLEKAMP, John H. CONWAY et Richard K. GUY : *Winning Ways for your mathematical plays*, volume 2. Academic Press, 1982.
- [20] Patrick C. FISCHER : Generation of primes by a one-dimensional real-time iterative array. *Journal of the American Mathematical Society*, 12(3):388–394, juillet 1965.
- [21] Alvy Ray SMITH, III : Real-time language recognition by one-dimensional cellular automata. *Journal of Computer and System Sciences*, 6:233–253, 1972.
- [22] Jacques MAZOYER et Nicolas REIMEN : A linear speed-up theorem for cellular automata. *Theoretical Computer Science*, 101(1):59–98, juillet 1992. Special issue on logic and applications to computer science.
- [23] Edward F. MOORE : The firing squad synchronisation problem. In ADDISON-WESLEY, éditeur : *Sequential machines, Selected papers*, pages 213–214, 1964.
- [24] Jacques MAZOYER et Véronique TERRIER : Signals in one-dimensional cellular automata. *Theoretical Computer Science*, 217(1):53–80, 1999.
- [25] Edwin Roger BANKS : Universality in cellular automata. In *Symposium on Switching and Automata Theory*, IEEE, pages 194–215, Santa Monica, California, 1970.
- [26] Jürgen ALBERT et Karel ČULIK II : A simple universal cellular automaton and its one-way and totalistic version. *Complex Systems*, 1(1):1–16, 1987.
- [27] Bruno MARTIN, I : A universal cellular automaton in quasilinear time and its S-m-n form. *Theoretical Computer Science*, 123(2):199–237, 1994.
- [28] Bruno DURAND et Zsuzsanna RÓKA : The game of life : universality revisited. In *Cellular automata*, pages 51–74, Saissac, 1996. Kluwer Acad. Publ. Dordrecht.
- [29] Jacques MAZOYER et Ivan RAPAPORT : Inducing an order on cellular automata by a grouping operation. In Michel MORVAN, Christoph MEINEL et Daniel KROB, éditeurs : *Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS'98)* 15th, volume 1373 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 116–127, Paris, France, février 1998. Springer Berlin.
- [30] Nicolas OLLINGER : *Automates cellulaires : structures*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Lyon, décembre 2002.
- [31] Guillaume THEYSSIER : *Automates cellulaires : un modèle de complexités*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Lyon, décembre 2005.
- [32] Gustav Arnold HEDLUND : Endomorphisms and automorphisms of the shift dynamical system. *Mathematical Systems Theory*, 3:320–375, 1969.
- [33] Henri POINCARÉ : Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. *Acta Mathematicæ*, 13:1–270, 1890.
- [34] Karel ČULIK, II, Jan K. PACHL et Sheng YU : On the limit sets of cellular automata. *SIAM Journal on Computing*, 18(4):831–842, 1989.
- [35] Mike HURLEY : Attractors in cellular automata. *Ergodic Theory & Dynamical Systems*, 10:131–140, 1990.
- [36] Robert H. GILMAN : Classes of linear automata. *Ergodic Theory & Dynamical Systems*, 7(1):105–118, 1987.
- [37] Bruno MARTIN, II : *Automates cellulaires, information et chaos*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Lyon, février 2001.
- [38] Mathieu SABLİK : *Étude de l'action conjointe d'un automate cellulaire et du décalage : une approche topologique et ergodique*. Thèse de doctorat, Université de Provence, juillet 2006.
- [39] Petr KŮRKA : *Simplicity criteria for dynamical systems*. Habilitation, Charles University, Praha, Czech Republic, 1993.

- [40] Jacques HADAMARD : Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 4:27–73, 1898.
- [41] Marston MORSE et Gustav Arnold HEDLUND : Symbolic dynamics. *American Journal of Mathematics*, 60(4):815–866, octobre 1938.
- [42] Douglas LIND et Brian MARCUS : *An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding*. Cambridge University Press, 1995.
- [43] Petr KŮRKA : Languages, equicontinuity and attractors in cellular automata. *Ergodic Theory & Dynamical Systems*, 17(2):417–433, avril 1997.
- [44] François BLANCHARD et Alejandro MAASS : Dynamical behaviour of Coven’s aperiodic cellular automata. *Theoretical Computer Science*, 163:391–302, 1996.
- [45] François BLANCHARD et Alejandro MAASS : Dynamical properties of expansive one-sided cellular automata. *Israel Journal of Mathematics*, 99:149–174, 1997.
- [46] Pietro di LENA : On computing the topological entropy of one-sided cellular automata. *Journal of Cellular Automata*, 2:121–130, 2007.
- [47] Pietro di LENA : Decidable properties for regular cellular automata. In Gonzalo NAVARRO, Leopoldo E. BERTOSSI et Yoshiharu KOHAYAKAWA, éditeurs : *IFIP International Conference on Theoretical Computer Science (TCS’06)4th*, volume 209 de *International Federation for Information Processing*, pages 185–196, Santiago, Chile, août 2006. Springer-Verlag.
- [48] Gianpiero CATTANEO, Enrico FORMENTI, Luciano MARGARA et Giancarlo MAURI : On the dynamical behavior of chaotic cellular automata. *Theoretical Computer Science*, 217:31–51, 1999.
- [49] Gianpiero CATTANEO, Enrico FORMENTI, Luciano MARGARA et Jacques MAZOYER : A shift-invariant metric on $S^{\mathbb{Z}}$ inducing a non-trivial topology. In Igor PRIVARA et Peter RUZICKA, éditeurs : *International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS’97)22nd*, volume 1295 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 179–188, Bratislava, Slovaquia, août 1997. Springer, Berlin.
- [50] François BLANCHARD, Enrico FORMENTI et Petr KŮRKA : Cellular automata in the Cantor, Besicovitch and Weyl topological spaces. *Complex Systems*, 11(2):107–123, 1999.
- [51] Pierre GUILLON et Gaétan RICHARD : Nilpotency and limit sets of cellular automata. In OCHMAŃSKI et TYSZKIEWICZ [140], pages 375–386.
- [52] Julien CERVELLE, Enrico FORMENTI et Pierre GUILLON : Sofic trace of a cellular automaton. In COOPER *et al.* [141], pages 152–161.
- [53] Julien CERVELLE et Pierre GUILLON : Towards a Rice theorem on traces of cellular automata. In Ludek KUČERA et Antonín KUČERA, éditeurs : *32nd International Symposium on the Mathematical Foundations of Computer Science*, volume 4708 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 310–319, Český Krumlov, Czech Republic, août 2007. Springer-Verlag.
- [54] Ethan AKIN : *The General Topology of Dynamical Systems*, volume 1 de *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, 1993.
- [55] Louis S. BLOCK et William A. COPPEL : *Dynamics in One Dimension*, volume 1513 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1991.
- [56] Walter Helbig GOTTSCHALK et Gustav Arnold HEDLUND : *Topological dynamics*, volume 36 de *Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1955.
- [57] Ivan RAPAPORT : *Inducing an order on cellular automata by a grouping operation*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Lyon, juin 1997.
- [58] Petr KŮRKA : Simulation in dynamical systems and Turing machines. draft, 1993.
- [59] Petr KŮRKA : Universal computation in dynamical systems. draft, 1993.

- [60] Masakazu NASU : Textile systems for endomorphisms and automorphisms of the shift. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 114(546):viii+215, mars 1995.
- [61] Ian PUTNAM : Topological orbit equivalence. *In Operator Algebras, Mathematical Physics and Low Dimensional Topology*. AK Peters Publishing, 1993.
- [62] Gianpiero CATTANEO, Alberto DENNUNZIO et Fabio FARINA : A survey on transitivity in discrete time dynamical systems. Application to symbolic systems and related languages. *Informatique théorique et applications*, 40(2):333–352, 2006.
- [63] Petr KŮRKA : *Topological and symbolic dynamics*. Société Mathématique de France, 2003.
- [64] Luigi ACERBI, Alberto DENNUNZIO et Enrico FORMENTI : Shifting and lifting of cellular automata. *In COOPER et al. [141]*, pages 1–10.
- [65] Fernanda BOTELHO et Max H. GARZON : Boolean neural nets are observable. *Theoretical Computer Science*, 134:51–61, 1994. Corrigendum *ibid.*
- [66] Mathieu SABLİK et Guillaume THEYSSIER : Topological dynamics of 2D cellular automata. *In Arnold BECKMANN, Costas DIMITRACOPOULOS et Benedikt LÖWE, éditeurs : Logic and Theory of Algorithms, 4th Conference on Computability in Europe (CiE'08)*, volume 5028 de *Lecture Notes in Computer Science*, Athens, Greece, juin 2008. Springer-Verlag.
- [67] Petr KŮRKA : Topological dynamics of cellular automata. *In Brian MARCUS et Joachim ROSENTHAL, éditeurs : Codes, Systems and Graphical Models*, volume 123 de *IMA volumes in Mathematics and its Applications*, pages 447–486. Springer-Verlag, 2001.
- [68] Julien CERVELLE : *Complexité dynamique et algorithmique des automates cellulaires*. Habilitation à diriger des recherches, Université Paris-Est, novembre 2007.
- [69] R. ADLER, A. KONHEIM et M. MCANDREW : Topological entropy. *Transactions of the American Mathematical Society*, 114:309–319, 1965.
- [70] Bohuslav BALCAR et Petr SIMON : *Handbook of Boolean Algebras*, chapitre Appendix on general topology, page 1241. Elsevier Science Publishers Ltd., 1989.
- [71] Hao WANG : Proving theorems by pattern recognition II. *Bell Systems Technical Journal*, 40:1–41, janvier 1961.
- [72] Tullio CECCHERINI-SILBERSTEIN et Michel COORNAERT : A generalization of the Curtis-Hedlund theorem. *Theoretical Computer Science*, 400(1–3):225–229, 2008.
- [73] Natasha JONOSKA et Brian MARCUS : Minimal presentations for irreducible sofic shifts. *IEEE Transactions on Information Theory*, 40(6):1818–1825, 1994.
- [74] Benjamin WEISS : Subshifts of finite type and sofic systems. *Monatshefte für Mathematik*, 77(5):462–474, 1973.
- [75] Dora GIAMMARRESI et Antonio RESTIVO : Ambiguity and complementation in recognizable two-dimensional languages. *In AUSIELLO et al. [142]*, pages 5–20.
- [76] William PARRY : Symbolic dynamics and transformations of the unit interval. *Transactions of the American Mathematical Society*, 122:368–378, 1966.
- [77] T.K. Subrahmonian MOOTHATHU : *Studies in Topological Dynamics with Emphasis on Cellular Automata*. Thèse de doctorat, University of Hyderabad, HyderabadIndia, juin 2006.
- [78] Peter WALTERS : *The Structure of Attractors in Dynamical Systems*, volume 668 de *Lecture Notes in Mathematics*, chapitre On the pseudo orbit tracing property and its relationship to stability, pages 231–244. Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg, 1978.
- [79] Mathieu SABLİK : Directional dynamics for cellular automata : A sensitivity to initial condition approach. *Theoretical Computer Science*, 400(1–3):1–18, 2008.

- [80] Jérôme DURAND-LOSE : Intrinsic universality of a 1-dimensional reversible cellular automaton. In Rüdiger REISCHUK et Michel MORVAN, éditeurs : *Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS'97)*14th, volume 1200 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 439–450, Lübeck, Germany, février 1997. Springer.
- [81] Petr KŮRKA : Zero-dimensional dynamical systems, formal languages, and universality. *Theory of Computing Systems*, 32:423–433, 1999.
- [82] Nicolas OLLINGER : Universalities in cellular automata, a (short) survey. In DURAND [139], pages 102–118.
- [83] Pietro di LENA et Luciano MARGARA : Row subshifts and topological entropy of cellular automata. *Journal of Cellular Automata*, 2:131–140, 2007.
- [84] Guillaume THEYSSIER : Amalgamation of cellular automata. In DURAND [139], pages 182–194.
- [85] Robert H. GILMAN : Notes on cellular automata. manuscript, 1988.
- [86] Ethan COVEN : Topological entropy of block maps. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 78:590–594, 1980.
- [87] Pietro di LENA : Extensions of regular endomorphisms of shift spaces. draft, 2007.
- [88] Cristopher MOORE : Unpredictability and undecidability in dynamical systems. *Physical Review Letters*, 64(20):2354–2357, 1990.
- [89] Petr KŮRKA : On topological dynamics of Turing machines. *Theoretical Computer Science*, 174(1): 203–216, mars 1997.
- [90] Anahí GAJARDO : Sofic one head machines. In DURAND [139], pages 54–64.
- [91] Anahí GAJARDO et Jacques MAZOYER : One head machines from a symbolic approach. *Theoretical Computer Science*, 370:34–47, 2007.
- [92] Alejandro MAASS : On the sofic limit set of cellular automata. *Ergodic Theory & Dynamical Systems*, 15:663–684, 1995.
- [93] Stephen WOLFRAM : *A New Kind of Science*. Wolfram Media, mai 2002.
- [94] Matthew COOK : Universality in elementary cellular automata. *Complex Systems*, 15:1–40, 2004.
- [95] Gaétan RICHARD : Rule 110 : Universality and catenations. In DURAND [139], pages 141–160.
- [96] Enrico FORMENTI : *De l'algorithmique du chaos dans les systèmes dynamiques discrets*. Habilitation à diriger des recherches, Université de Provence, 2002.
- [97] Akira MARUOKA et Masayuki KIMURA : Condition for injectivity of global maps for tessellation automata. *Information & Control*, 32(2):158–162, 1976.
- [98] T.K. Subrahmonian MOOTHATHU : Homogeneity of surjective cellular automata. *Discrete & Continuous Dynamical Systems*, 13(1):195–202, juin 2005.
- [99] Francesca FIORENZI : The Garden of Eden theorem for sofic shifts. *Pure Mathematics and Applications*, 11(3):471–484, 2000.
- [100] Bruno DURAND : *Automates cellulaires : réversibilité et complexité*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Lyon, février 1994.
- [101] Bruno DURAND : Global properties of cellular automata. In Eric GOLES et Servet MARTINEZ, éditeurs : *Cellular Automata and Complex Systems*. Kluwer, 1998.
- [102] S. AMOROSO et Y. N. PATT : Decision procedures for surjectivity and injectivity of parallel maps for tessellation structures. *Journal of Computer & System Sciences*, 6:448–464, 1972.
- [103] Eugen CZEIZLER et Jarkko KARI : A tight linear bound on the neighborhood of inverse of cellular automata. In Luís CAIRES, Giuseppe F. ITALIANO, Luís MONTEIRO, Catuscia PALAMIDESSI et Moti YUNG, éditeurs : *International Colloquium on Automata, Languages and Programming*

- (ICALP'05)32nd, volume 3580 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 410–420, Lisboa, Portugal, juillet 2005. Springer Berlin / Heidelberg. Automata and Formal Languages I.
- [104] Jacques MAZOYER et Ivan RAPAPORT : Global fixed point attractors of circular cellular automata and periodic tilings of the plane : undecidability results. *Discrete Mathematics*, 199:103–122, 1999.
- [105] Bruno CODENOTTI et Luciano MARGARA : Transitive cellular automata are sensitive. *The American Mathematical Monthly*, 103(1):58–62, janvier 1996.
- [106] Vincent BERNARDI : *Lois de conservation sur automates cellulaires*. Thèse de doctorat, Université de Provence, décembre 2007.
- [107] François BLANCHARD et Pierre TISSEUR : Some properties of cellular automata with equicontinuity points. *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques*, 36(1):569–582, 2000.
- [108] Mike BOYLE et Bruce KITCHENS : Periodic points for onto cellular automata. *Indagationes Mathematicæ*, 10(4):483–493, 1999.
- [109] John BANKS : Regular periodic decompositions for topologically transitive maps. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 17(3):505–529, 1997.
- [110] Alberto DENNUNZIO, Pierre GUILLON et Benoît MASSON : Stable dynamics of sand automata. In AUSIELLO *et al.* [142], pages 157–169.
- [111] Jarkko KARI : Undecidable properties of the dynamics of one-dimensional cellular automata. In DURAND [139], pages 3–14.
- [112] Masakazu NASU : The dynamics of expansive invertible onesided cellular automata. *Transactions of the American Mathematical Society*, 354(10):4067–4084, 2002.
- [113] François BLANCHARD, Julien CERVELLE et Enrico FORMENTI : Some results about the chaotic behavior of cellular automata. *Theoretical Computer Science*, 349:318–336, juin 2005.
- [114] Masakazu NASU : Textile systems and onesided resolving automorphisms and endomorphisms of the shift. *Ergodic Theory & Dynamical Systems*, 28(2):167–209, 1999.
- [115] Enrico FORMENTI et Petr KÛRKA : Subshift attractors of cellular automata. *Nonlinearity*, 20:105–117, 2007.
- [116] François BLANCHARD : Cellular automata and transducers : a topological view. In *Cellular Automata, Dynamical Systems and Neural Networks*. Kluwer, Dordrecht, 1994.
- [117] Laurent BIENVENU et Mathieu SABLİK : The dynamics of cellular automata in shift-invariant topologies. In Tero HARJU, Juhani KARHUMÄKI et Arto LEPISTÖ, éditeurs : 11th *Conference on Development in Language Theory (DLT'07)*, volume 4588 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 84–95, Turku, Finland, juillet 2007.
- [118] John MILNOR : On the entropy geometry of cellular automata. *Complex Systems*, 2(3):357–385, 1988.
- [119] Alberto DENNUNZIO, Pierre GUILLON et Benoît MASSON : Topological properties of sand automata as cellular automata. In DURAND [139], pages 216–227.
- [120] Marcus PIVATO : KÛrka's classifications of cellular automata, mars 2002. draft.
- [121] Pietro di LENA : *Decidable and Computational properties of Cellular Automata*. Thèse de doctorat, University of Bologna, Italy, décembre 2006.
- [122] Victor POUPET : Translating partitioned cellular automata into classical cellular automata. In DURAND [139], pages 130–140.
- [123] Robert BERGER : The undecidability of the domino problem. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 66:72, 1966.

- [124] Bruno DURAND, Enrico FORMENTI et Georges VAROUCHAS : On undecidability of equicontinuity classification for cellular automata. In Michel MORVAN et Éric RÉMILA, éditeurs : *Discrete Models for Complex Systems (DMCS'03)*, volume AB de *DMTCS Proc.*, pages 117–128. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, juin 2003.
- [125] Jarkko KARI et Ville LUKKARILA : Some undecidable problems for one-dimensional reversible cellular automata. draft, décembre 2007.
- [126] Jarkko KARI et Nicolas OLLINGER : Periodicity and immortality in reversible computing. In OCHMAŃSKI et TYSZKIEWICZ [140], pages 419–430. à lire.
- [127] Nicolas OLLINGER : The intrinsic universality problem of one-dimensional cellular automata. In Helmut ALT et Michel HABIB, éditeurs : *20th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS'03)*, volume 2607 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 632–641, Berlin, Germany, février 2003. Springer-Verlag.
- [128] Julien CERVELLE et Bruno DURAND : Tilings : recursivity and regularity. *Theoretical Computer Science*, 310(1–3):469–477, mars 2004.
- [129] Julien CERVELLE : *Complexité structurelle et algorithmique des pavages et des automates cellulaires*. Thèse de doctorat, Université de Provence, janvier 2002.
- [130] Jean-Charles DELVENNE et Vincent BLONDEL : Quasi-periodic configurations and undecidable dynamics for tilings, infinite words and Turing machines. *Theoretical Computer Science*, 319:127–143, 2004.
- [131] Jean-Charles DELVENNE : *Dynamics, Information and Computation*. Thèse de doctorat, Université Catholique de Louvain, décembre 2005.
- [132] Grégory LAFITTE et Michael WEISS : Computability of tilings. In AUSIELLO *et al.* [142], pages 187–201.
- [133] Jarkko KARI : Theory of cellular automata : A survey. *Theoretical Computer Science*, 334:3–33, 2005.
- [134] Alexandr KAZDA : The chain relation in sofic subshifts. Workshop on Symbolic Dynamics and Coding, juillet 2007.
- [135] Jakob Grue SIMONSEN : On the computability of the topological entropy of subshifts. *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science*, 8:83–96, 2006.
- [136] Karel ČULIK, II, Lyman P. HURD et Jarkko KARI : The topological entropy of cellular automata is uncomputable. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 12(2):255–265, 1992.
- [137] Klaus W. SUTNER : Cellular automata and intermediate reachability problems. *Fundamenta Informaticæ*, 52(1-3):249–256, 2002.
- [138] Jean-Charles DELVENNE, Petr KŮRKA et Vincent BLONDEL : Computational universality in symbolic dynamical systems. In Maurice MARGENSTERN, éditeur : *4th International Conference on Machines, Computations, and Universality (MCU'04)*, volume 3354 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 104–115, Petersbourg, Russia, septembre 2005. Springer-Verlag. v3.
- [139] Bruno DURAND, éditeur. *Journées Automates Cellulaires, 1st Symposium on Cellular Automata (JAC'08)*, Uzès, France, avril 2008. MCCME Publishing House, Moscow.
- [140] Edward OCHMAŃSKI et Jerzy TYSZKIEWICZ, éditeurs. *33rd International Symposium on the Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS'08)*, volume 5162 de *Lecture Notes in Computer Science*, Toruń, Poland, août 2008. Springer-Verlag.
- [141] S. Barry COOPER, Benedikt LÖWE et Andrea SORBI, éditeurs. *Computation and Logic in the Real World, 3rd Conference on Computability in Europe (CiE'07)*, volume 4497 de *Lecture Notes in Computer Science*, Siena, Italy, juin 2007. Springer-Verlag.

- [142] Giorgio AUSIELLO, Juhani KARHUMÄKI, Giancarlo MAURI et Luke ONG, éditeurs. 5th *IFIP International Conference on Theoretical Computer Science (TCS'08)*, volume 273 de *International Federation for Information Processing*, Milano, Italy, septembre 2008. Springer, Boston.
- [143] Shin'ichirou ISHII : Measure theoretic approach to the classification of cellular automata. *Discrete Applied Mathematics*, 39(2):125–136, 1992.

Annexe A

Caractérisations dynamiques

On récapitule ici les équivalences connues entre différentes notions de dynamique dans différents cadres : SDD, SS, ACP, sous-décalages (ssD), AC.

A.1 Propriétés symboliques

(X, F) est de type fini.

SS _____	★ (X, F) est l'extension limite de STF unilatères.
	★ <i>Question</i> : (X, F) a la propriété de pistage ?
AC ou ssD sofique _____	★ (X, F) est effectivement de type fini.
ssD _____	★ (X, F) est essentiellement un sous-décalage markovien.
	★ (X, F) est essentiellement un système d'arcs.
	★ (X, F) est le système d'étiquette d'un graphe synchronisant.
	★ (X, F) est égal à une de ses approximations.
	★ (X, F) est égal à $\bigcap_{j \in \mathbb{M}} \sigma^j(U)$, avec U ouvert.
	★ $\exists k \in \mathbb{N}^*, \forall u, v \in \mathcal{L}_k(X)$ enjambants, $u \oplus v \in \mathcal{L}_{k+1}(X)$.
	★ $\exists k \in \mathbb{N}^*, \forall u \in A^k, \forall v, w \in A^+, vu, uw \in \mathcal{L}(X) \Rightarrow vuw \in \mathcal{L}(X)$.
	★ $\exists k \in \mathbb{N}^*, \forall u \in A^k A^+, u^{-1}X = u_{\ u -k, u }^{-1}X$.
ssD unilatère _____	★ (X, F) est ouvert.

(X, F) est sofique.

SS _____	★ Tous les SUF de (X, F) sont sofiques.
	★ (X, F) est facteur d'un système de type fini.
	★ (X, F) est facteur d'un système sofique.
AC _____	★ (X, F) est effectivement sofique.
ssD _____	★ (X, F) est un système d'étiquettes.
	★ X a un nombre fini de résiduels.
	★ (X, F) est le système d'étiquettes d'un graphe minimal.
	★ (X, F) est facteur résoluble d'un sous-décalage markovien.

A.2 Propriétés immédiates

(X, F) est surjectif.

- SDD _____ $\star \Omega_F = X$.
- SS _____ $\star (\tau_F^{(k)}, \sigma)$ est un sous-décalage surjectif pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- ACP de règle locale (étendue) f _____ $\star f$ est surjective.
- ACP sur un STF transitif _____ $\star \mathcal{H}(F(X)) = \mathcal{H}(X)$.
- _____ $\star F$ est préinjectif.
- _____ \star Pour toute configuration $x \in A^{\mathbb{M}}$, $F^{-1}(x)$ est dénombrable.
- _____ \star Pour toute configuration $x \in A^{\mathbb{M}}$, $F^{-1}(x)$ est fini.
- _____ \star Pour toute configuration $x \in A^{\mathbb{M}}$, $|F^{-1}(x)| \leq |A|^d$.
- _____ $\star \forall q \in A$, la restriction de F aux configurations q -finies est injective.
- AC de règle locale (étendue) f _____ \star Pour tout mot $u \in A^+$, $|\tilde{f}^{-1}(u)| = |A|^d$.
- _____ \star Pour tout mot $u \in A^{d \log_2 |A| (2d + |A|^{2d})}$, $|\tilde{f}^{-1}(u)| = |A|^d$.
- _____ \star Pour toute longueur $k \in \mathbb{N}$, $\forall u, v \in A^k$, $|\tilde{f}^{-1}(u)| = |\tilde{f}^{-1}(v)|$.
- _____ $\star (X, F)$ admet un résiduel de points récurrents.
- _____ $\star (X, F)$ est autotransitif.
- _____ $\star \omega_F$ est dense.
- AC 1D _____ \star La restriction de F aux configurations périodiques est surjective.
- ssD sofique unilatère _____ $\star (X, F)$ est le système d'étiquettes d'un graphe dont tous les sommets ont au moins un arc entrant.

(X, F) est injectif.

- SDD _____ \star Il existe un SDD (X, G) tel que $FG = \text{id}$.
- _____ \star Il existe un SDD (X, G) tel que $GF = \text{id}$.
- ACP sur un STF transitif _____ \star Il existe un AC (X, G) tel que $GF = \text{id}$.
- _____ \star Il existe un AC (X, G) tel que $FG = \text{id}$.
- _____ $\star F$ est bijective.
- AC 1D _____ \star La restriction de F aux configurations périodiques est injective.
- _____ \star La restriction de F aux configurations périodiques est bijective.
- ssD sofique unilatère _____ $\star (X, F)$ est le système d'étiquettes d'un graphe dont tous les sommets ont exactement un arc entrant.
- _____ $\star (X, F)$ est périodique.

(X, F) est ouvert.

- AC _____ \star Il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall x \in A^{\mathbb{M}}$, $|F^{-1}(x)| = p$.
- _____ \star Il existe une famille $(F_i)_{0 \leq i < p}$ de $p \in \mathbb{N}^*$ AC distincts en tous points telle que pour $\forall x \in A^{\mathbb{M}}$, $F^{-1}(x) = \{F_i(x) \mid 0 \leq i < p\}$.
- _____ $\star (X, F)$ est fermant à droite et fermant à gauche.
- ssD unilatère _____ $\star (X, F)$ est de type fini.

A.3 Dynamiques stables

(X, F) est nilpotent.

SS _____	* $\tau_F^{(k)}$ est nilpotent, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
ACP _____	* (X, F) est limite-nilpotent. * τ_F est nilpotent.
ACP sur un ssD transitif _____	* (X, F) est faiblement nilpotent.
ACP 1D sur un STF transitif _____	* (X, F) est asymptotiquement nilpotent. * τ_F est faiblement nilpotent.
AC _____	* Ω_F admet une configuration uniforme isolée. * $ \Omega_F < +\infty$.
ssD _____	* (X, F) est de type fini et admet un unique mot périodique.

(X, F) est équicontinu.

SDD _____	* Tous les points de (X, F) sont équicontinus.
SS _____	* Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\tau_F^{(k)}$ est fini.
ACP _____	* (X, F) est prépériodique. * (Ω_F, F) est prépériodique. * τ_F est prépériodique. * $\exists l \in \mathbb{N}, \forall k \geq l$, tous les mots de A^k sont r -bloquants.
ACP sur un ssD transitif _____	* (X, F) est faiblement prépériodique.
ssD _____	* (X, F) est fini. * (X, F) est presque équicontinu. * $\exists n \in \mathbb{N}, \mathcal{K}_{\mathcal{L}(X)}(n) \leq n$. * $\exists k \in \mathbb{N}$, l'application de sous-mot central $z \mapsto z_{\langle k \rangle}$ est injective. * X est le système d'étiquettes d'un graphe pâquerette. * X est essentiellement le système d'arcs d'un graphe pâquerette. * X est sofique et $\exists q \in \mathbb{N}, \forall x \in \Sigma, \exists p \in \mathbb{N}^*, F^q(x) = F^{q+p}(x)$. * Ω_X est fini.
ssD transitif _____	* F est essentiellement un cycle. * X est dénombrable. * F n'est pas sensible.

A.4 Dynamiques chaotiques

(X, F) est sensible.

- ssD ou ACP sur un ssD autotransitif — $\star (X, F)$ n'est pas quasiéquivariant.
- ACP de rayon r sur un ssD autotransitif $\star (X, F)$ est 2^{-r} -sensible.
- $\star (X, F)$ admet un mot r -bloquant.
- $\star (X, F)$ admet un mot k -bloquant, avec $k \geq r$.
- ACP sur un ssD transitif _____ $\star (X, F)$ n'est pas presque équivariant.
- ssD _____ $\star (X, F)$ est 1-sensible.
- $\star X$ est parfait.
- \star Tout mot fini $u \in \mathcal{L}(X)$ est extensible de deux manières.
- ssD sofique _____ $\star X$ est le système d'étiquettes d'un graphe dont aucune composante connexe minimale n'est réduite à un cycle.

(X, F) est transitif.

- SDD parfait ou surjectif _____ $\star (X, F)$ admet un point transitif.
- $\star (X, F)$ admet un résiduel de points transitifs.
- $\star \forall U, V \subset X, \exists n \in \mathbb{Z}, F^n(U) \cap V \neq \emptyset$.
- ACP sur un ssD mélangeant _____ $\star (X, F)$ est faiblement mélangeant.
- AC _____ \star *Question* : (X, F) est mélangeant ?
- ssD sofique _____ $\star X$ est le système d'étiquettes d'un graphe fortement connexe.
- ssD unilatère sofique _____ $\star (X, F)$ est fortement transitif.

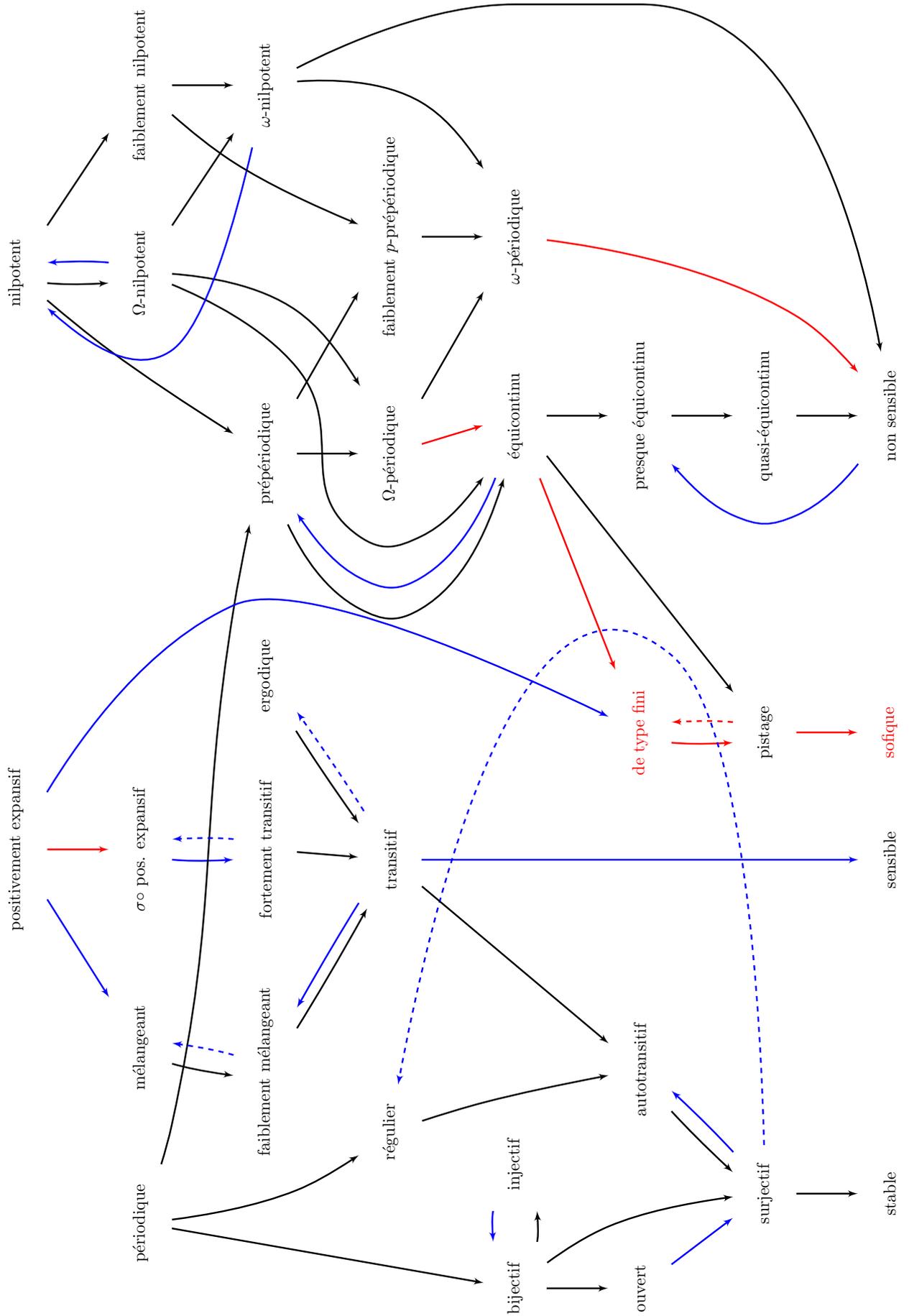
(X, F) est positivement expansif.

- SS _____ $\star (X, F)$ est conjugué à un sous-décalage.
- ACP de rayon r _____ $\star (X, F)$ est conjugué à τ_F^r .
- $\star \tau_F^r$ est conjugué à τ_F^{r+1} .
- ACP bilatère _____ $\star (X, F)$ admet un retourné unilatère injectif.
- ACP unilatère _____ $\star (X, F)$ admet un retourné unilatère.
- ACP sur un ssD bilatère mélangeant — $\star F$ est conjugué à un décalage unilatère complet.

Annexe B

Implications entre notions dynamiques

- Légende**
- implication vraie pour . . .
 - les SDD en général
 - les SS
 - les AC unidimensionnels
 - les sous-décalages unidirectionnels
 - les sous-décalages unidirectionnels sofiques



Annexe C

Simulations, traces & dynamiques

Les colonnes du tableau ci-dessous correspondent aux problèmes suivants.

- **Sim** : La propriété, pour un SDD, est-elle préservée par *simulation*, ou par une certaine notion restreinte de simulation ?
- **SimC** : La propriété, pour un AC unidimensionnel, est-elle préservée par *simulation cellulaire* ?
- $\rightarrow \tau$: La propriété, pour un SS, se transmet-elle à ses *sous-décalages facteurs* ?
- $\tau\tau \rightarrow$: La propriété est-elle vraie pour un SS si elle l'est pour tous ses *sous-décalages facteurs* ?
- $\tau \rightarrow$: La propriété est-elle vraie pour un AC unidimensionnel si elle l'est pour un *facteur colonne particulier* ? De quelle largeur : facteur diamétral (d) ? facteur canonique (r) ? tracé (1) ? une largeur calculable (\checkmark) ?
- σ : La propriété, pour un AC unidimensionnel, est-elle préservée par composition avec un décalage ?
- **inv** : La propriété, pour un SDD bijectif, est-elle préservée par inversion ?
- **déci** : La propriété est-elle décidable pour les AC unidimensionnels (sachant qu'aucune ne l'est en dimension supérieure) ?

\checkmark représente une réponse positive, \perp une négative, ! le fait que la question n'est pas pertinente dans ce cas.

	Sim	SimC	$\rightarrow \tau$	$\tau \tau \rightarrow$	$\tau \rightarrow$	σ	déci
surjectivité	complète	par blocs	✓	✓	✓	✓	✓
injectivité	exacte	hors-contexte	⊥	✓	1	✓	✓
ouverture	exacte	hors-contexte	⊥	⊥	⊥	✓	✓
stabilité	✓	✓	✓	⊥	⊥	✓	⊥
nilpotence, nilpotence faible	✓	✓	✓	⊥	1	✓	⊥
pré périodicité	✓	✓	✓	⊥	1	⊥	⊥
pré périodicité faible	✓	✓	✓	⊥	⊥	⊥	⊥
nilpotence sur les périodiques	exacte	✓	?	✓	1	✓	⊥
régularité	complète	complète	✓	⊥	⊥	?	?
minimalité	directe	trivial	✓	✓	trivial	trivial	trivial
autotransitivité	directe complète	par blocs	✓	✓	✓	✓	✓
transitivité, mélange faible	directe complète	complète	✓	✓	?	⊥	?
mélange	complète	complète	✓	✓	?	⊥	?
transitivité forte	directe complète	directe complète	✓	⊥	⊥	✓	?
chaîne-transitivité	directe complète	complète	✓	✓	?	⊥	?
pistage	exacte complète	exacte complète	⊥	✓	d	⊥	⊥
équicontinuité	exacte	✓	✓	✓	1	⊥	⊥
quasi, preque équicontinuité	exacte complète	hors-contexte complète	⊥	✓	r	⊥	⊥
ε -sensibilité	exacte complète	exacte complète	$\leq \varepsilon$	⊥	⊥	⊥	⊥
pos.expansivité	exacte	exacte	trivial	⊥	⊥	⊥	?
expansivité	exacte	exacte	⊥	⊥	⊥	⊥	?
Ω	✓	✓	✓	!	!	✓	⊥
ω	✓	✓	✓	!	!	⊥	⊥
Ω -nilpotence	✓	✓	✓	⊥	1	✓	⊥
Ω -périodicité	✓	✓	✓	⊥	⊥	⊥	⊥
ω -nilpotence	✓	✓	✓	✓	1	✓	⊥
ω -périodicité	✓	✓	✓	⊥	⊥	⊥	⊥
entropie	directe : \leq	directe : \leq	\leq	lim	? (unidir : d)	⊥	⊥
type fini	exacte complète	exacte complète	⊥	✓	d	⊥	⊥
soficité	complète	complète	✓	✓	d	⊥	⊥
universalité	exacte complète	exacte complète	✓	⊥	⊥	⊥	⊥
simulation d'un autre SS	exacte complète	exacte complète	✓	✓	?	⊥	⊥

Annexe D

English summary

D.1 Introduction

Understanding the emergence of complexity out of simple basic elements is a fundamental issue in various scientific fields : cellular biology, cognitive science, fluid mechanics, chemical turbulences, crystal formation, social dynamics, computer networks. . . These problems, abstracted from their particular modeled systems, were joined into what is now called the theory of complex systems.

They led John von Neumann, motivated by the autoreproducibility question and inspired by Stanisław Ulam, to define the first cellular automaton in the late forties. Merely formalized as a discrete space divided into cells whose states evolve in a discrete time according to their closest neighbors, it exhibits strange evolutions, such as patterns reproducing themselves indefinitely. This duality was popularized in the seventies by John Conway’s game of life. The emergence of computers would soon allow anyone to program it, and nevertheless admit that the overall behavior could turn out to be very complex, motivating Stephen Wolfram’s classification of the visual aspects of cellular automata in the eighties.

But what does one exactly mean by complexity? This notion was the subject of many formalization attempts. First, the computing power, already suggested by von Neumann, was formalized in terms of Turing-equivalence, for instance for the game of life [19], and gave rise to some algorithmic issues [20], for language recognition [21], or for very peculiar problems [23], which give evidence on what kind of processes could be performed with the model.

Moreover, the computing power has also been studied for cellular automata with respect to each other. This approach has led to the notions of “cellular” simulations and “intrinsic” universality, whose premises could be seen in [25, 26], before formalizations in [27] and mostly [57, 30, 31]. The orders induced by the different kinds of simulations are still not very well understood.

On the other hand, cellular automata have been studied in terms of predictability with respect to other computing models – Turing machines. Most of their long-term properties have been proved undecidable since the works of Jarkko Kari in the nineties [11].

On top of that, cellular automata have joined the theory of dynamical systems thanks to the 1969 characterization by Hedlund, Curtis and Lyndon [32] as continuous maps over configurations that commute with the translations of cells, the configuration space being endowed with the Cantor topology that makes it perfect, compact and totally disconnected. This branch of the study has resulted in many contributions, involving equicontinuity [36], attractors [35], measure [143]. . . .

In 1997, Petr Kůrka proposes the modifications of two topological classifications in [43], and compares them both with a third one, based on the sequences of states that are successively taken by some single cell – or some finite group of cell – during the evolution of the cellular automaton. The principle of studying such “traces” of dynamical systems through a given partition of the space probably sprang from the study of geodesic streams by Hadamard at the end of the nineteenth century, and was given its name

of “symbolic dynamics” by the eponymous book by Morse and Hedlund [41]. In the dawn of the Internet era, a reference book by Douglas Lind and Brian Marcus [42] stressed that symbolic dynamics find its most promising applications in code theory.

If one sees the cellular automaton as modeling some physical phenomenon, then the letter sequences it produces may represent the measure of the phenomenon through some device with some precision. Hence, it seems relevant to study the behavior of these trace systems according to that of the global one. Topologically speaking, they are linked by a factorization, *i.e.* reading a letter of the infinite word corresponds to applying one step of the cellular automaton. To each trace can be associated the language of its finite patterns. It was noted in [85] that these languages were always context-sensitive; their complexity led to the K urka classification, that can be applied to any system on Cantor sets. Nevertheless, the restriction to one-dimensional cellular automata presents an important advantage, stressed in [121]: studying the trace with respect to neighbors of the center cell gives significant information about the cellular automaton itself. In particular, the regularity of the language associated allows to decide many long-term properties [47].

Our thesis is in line with the above-mentioned works on the link between cellular automata and symbolic dynamics. We try to inspect which properties of cellular automata are transmitted to simulated cellular automata, to traces, and conversely. We also try to see if one single trace, for instance corresponding to neighbors of the central cell, is enough to deduce the corresponding property, in the general case, or in some subcases from the symbolic classification. In a second part, we investigate sufficient conditions for some set of infinite letters to be the trace of some cellular automaton. Physically speaking, we try to find back whether some phenomenon can correspond to some observation we made in the model. Finally, a third part is dedicated to decidability issues; in particular, it is shown that, being given a cellular automaton, nothing can be said about the long-term aspect of its trace.

D.2 Dynamical systems and cellular automata

A **dynamical system** (DS) is a couple (X, F) where X is a *compact metric* space and $F : X \rightarrow X$ a *continuous* function [Th ese 1.1]. A **symbolic system** (SS) is a dynamical system on some *totally disconnected* space, *i.e.* some space that admits arbitrarily thin clopen partitions [Th ese 1.12].

Configurations space. [Th ese 1.12.2] If $X = A^{\mathbb{M}}$, where A is a finite alphabet and $\mathbb{M} = \mathbb{Z}$ or $\mathbb{M} = \mathbb{N}$, one can endow X with the product of the discrete topology on A , which corresponds to the distance :

$$\begin{aligned} \mathfrak{d} : A^{\mathbb{M}} \times A^{\mathbb{M}} &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\mapsto 2^{-\min_{x_i \neq y_i} |i|} . \end{aligned}$$

Note $\langle k \rangle = \{i \mid |i| \leq k\}$ and, for $x \in A^{\mathbb{M}}$ and $k, l \in \mathbb{M}$ with $k \leq l$, $x_{\llbracket k, l \rrbracket} = x_k \dots x_{l-1}$. **Cylinders** $[u] = \{x \mid x_{\langle k \rangle} = u\}$, where $u \in A^{\langle k \rangle}$ and $k \in \mathbb{N}$, form a base of clopens.

Shifts. [Th ese 2.1] The **shift** is a DS defined for $x \in A^{\mathbb{M}}$ and $i \in A^{\mathbb{M}}$ by $\sigma(x)_i = x_{i+1}$. A **onesided** (resp. **twosided**) **subshift** is a closed σ -invariant (resp. strongly) subset of $A^{\mathbb{N}}$ (resp. $A^{\mathbb{Z}}$). A subshift Σ is **sofic** if its language $\{u \in A^+ \mid \exists x \in \Sigma, i \in \mathbb{M}, x_{\llbracket i, i+|u| \rrbracket} = u\}$ is *regular*. It is of **finite type** (SFT) if it admits some *finite forbidden language* $F \subset A^+$ such that $\Sigma = \{z \in A^{\mathbb{M}} \mid \forall i \in \mathbb{M}, u \in F, x_{\llbracket i, i+|u| \rrbracket} \neq u\}$. It is of **order** $k \in \mathbb{N}^*$ if $F \subset A^k$.

Morphisms. A **morphism** between two DS (X, F) and (Y, G) is a function $\Phi : X \rightarrow Y$ such that $\Phi F = G\Phi$. If surjective, it is a **factorization** and (Y, G) is a **factor** of (X, F) ; if bijective, it is a **conjugacy** and (X, F) and (Y, G) are **conjugate** [Th ese 1.2.1]. A **cellular morphism** between two CA restrictions (Λ, F) and (Σ, G) is a *morphism* which is simultaneously a morphism between subshifts

iterates (A, σ^n) and $(\Sigma, \sigma^{n'})$ for some $n, n' \in \mathbb{N}^*$. Similarly, we will speak of **cellular factorizations**, **conjugacies**, **factors**, **conjugates** [Thèse 3.2.1].

Cellular automata. [Thèse 3.1] A **cellular automaton** (CA) is a morphism F of some shift $(A^{\mathbb{M}}, \sigma)$ into itself. Equivalently, from the Hedlund theorem, there is some **radius** $r \in \mathbb{N}$ and some **local rule** $f : A^{\langle r \rangle} \rightarrow A$ such that for all configurations $x \in A^{\mathbb{M}}$ and all cells $i \in \mathbb{M}$, $F(x)_i = f(x_{i+\langle r \rangle})$; $d = |\langle r \rangle|$ will be called the **diameter**.

Simulations. A **simulation** between two DS (X, F) and (Y, G) is a *factorization* between the subsystem (X', F^m) and the iterate $(Y, G^{m'})$ for some invariant $X' \subset X$ and some $m, m' \in \mathbb{N}^*$. It is called **direct** if $m = 1$, **total** if $m' = 1$, **complete** if $X' = X$, **exact** if it is injective [Thèse 1.2.4]. A **cellular simulation** between two CA (X, F) and (Y, G) is a *simulation* which is simultaneously a simulation between the iterates of subshifts (A, σ^n) and $(\Sigma, \sigma^{n'})$ for some $n, n' \in \mathbb{N}^*$. It is **block** if its image is a full shift, **context-free** if its radius is 0 [Thèse 3.2.2].

Universality. A DS is **universal** with respect to some family of DS if it simulates any system of that family. This definition led to the study of intrinsically universal CA in [30, 31] [Thèse 3.2.4]. In the context of sofic subshifts, we can prove that *universality* with respect to all subshifts is equivalent to *uncountability*, to *nonzero entropy*, and to existence of some *infinite transitive subsystem* [Thèse 2.6.3]. This class of subshifts will be especially prominent in section D.5.

D.3 Traces

[Thèse 3.4] If \mathcal{P} is a partition of some space X and $x \in X$ a point, then we denote $\mathcal{P}(x) \in \mathcal{P}$ the unique subset such that $x \in \mathcal{P}(x)$ [Thèse 3.4.1]. The **trace** of some symbolic system (X, F) with respect to some clopen partition \mathcal{P} is the function :

$$\begin{aligned} T_F^{\mathcal{P}} : X &\rightarrow \mathcal{P}^{\mathbb{N}} \\ x &\mapsto (\mathcal{P}(F^j(x)))_{j \in \mathbb{N}} . \end{aligned}$$

It is a factorization of the system (X, F) into the **trace subshift** $(\tau_F^{\mathcal{P}} = T_F^{\mathcal{P}}(X), \sigma)$. Conversely, every *factorization* of the system into a subshift can be written as a *trace* application.

Column factors. If $X = A^{\mathbb{M}}$, we can restrict the study of *trace* subshifts to **column factors**, *i.e.* traces with respect to cylinder partitions, which represent the sequences of states taken by the central cell of a given configuration [Thèse 3.4.10] :

$$\begin{aligned} T_F^{\langle k \rangle} : A^{\mathbb{M}} &\rightarrow (A^{\langle k \rangle})^{\mathbb{N}} \\ x &\mapsto (F^j(x)_{\langle k \rangle})_{j \in \mathbb{N}} . \end{aligned}$$

Let $\tau_F^{\langle k \rangle} = T_F^{\langle k \rangle}(A^{\mathbb{M}})$, τ_F denote $\tau_F^{\langle 0 \rangle}$, and τ_F^* be the twosided subshift $\left\{ (x_0^j)_{j \in \mathbb{Z}} \mid \forall j \in \mathbb{Z}, x^{j+1} = F(x^j) \right\}$, called the **bitrace**. All factor subshifts are factors of some column factor [Thèse 3.4.5]. Moreover, the SS can be essentially rebuilt from the sequence of its column factors, since it is conjugate to their **limit extension**, *i.e.* the least DS of which they are all factor [Thèse 3.4.7].

Diametral factor. [Thèse 3.5] If F is a CA of radius $r \in \mathbb{N}$ and $k > r$, then by shift-invariance, $\tau_F^{\langle k \rangle}$ is the **overlap** of the **diametral factor** $\tau_F^{\langle r \rangle}$, *i.e.* the biggest subshift Σ on $A^{\langle k \rangle}$ such that each projection $\pi_{i+\langle r \rangle}(\Sigma) = \tau_F^{\langle r \rangle}$ (up to indices change), for $|i| \leq k - r$ [Thèse 3.5.6]. This idea was first suggested in [121]. This simple characterization of CA allows to rebuild from the diametral factor each wider trace,

hence the CA itself [Thèse 3.5.7]. It can help to deduce some properties of the CA directly from that of its diametral factor [Thèse 3.5.9].

Symbolic classification. [Thèse 3.6] The complexity of the trace subshifts can be used as a measure of the complexity of the SS itself. This was the purpose of K urka’s classification, presented in [43], and which can be refined a little by involving systems finite type. This class comprehends a little more than systems whose trace subshifts are of finite type, since it is invariant by conjugacy and a generalization of SFT. Its definition requires the following one.

We define a **base** of factor subshifts of a SS $(A^{\mathbb{M}}, F)$ as a sequence $(\Sigma_i)_{i \in \mathbb{N}}$ of onesided subshifts image of a family $(\Phi_i : X \rightarrow \Sigma_i)_{i \in \mathbb{N}}$ of factorizations [Thèse 3.4.4]. We have already seen that column factors form one. Now, we can define the following hierarchy in four classes.

1. **Equicontinuous SS** [Thèse 4.5.10] : all (or a base of) trace subshifts are finite. For CA, it is even equivalent to the finiteness of *some* trace subshift, thus to *preperiodicity* [Thèse 4.5.11].
2. **SS of finite type** [Thèse 3.6.1] : a base of trace subshifts are *SFT*. This condition implies the *shadowing property* [Thèse 4.4.5]. We even suspect an equivalence, like in the case of subshifts [Thèse 4.4.6]. For CA, it is sufficient to have a *diametral factor of finite type*, but not necessary [Thèse 3.6.2].
3. **Sofic SS** [Thèse 3.6.2] : all (or a base of) trace subshifts are sofic. For CA, it is equivalent to the soficness of the *diametral factor* (generalization of a result in [44]) [Thèse 3.6.9].
4. **All SS** : this class could also be refined, for instance according to well-know classifications on languages – if they appear to be relevant.

Similarly to the Weiss theorem for subshifts, we prove that any *sofic* SS is a *factor* of some SS of *finite type* [Thèse 3.6.10]. In the context of CA, as proved by di Lena, any CA restriction which is of *finite type* is a *cellular factor* of some *sofic* CA restriction. Nevertheless, it seems difficult to adapt the construction to get a (complete) CA [Thèse 3.6.12].

D.4 Topological dynamics and traces

We inspect many behaviors of CA and DS and their consequences on their trace and on their simulated systems. We are interested in *immediate* properties (surjectivity, openness, injectivity [Thèse 1.4, 4.1]), *simple* properties (nilpotency, periodicity and their non-uniform versions, nilpotency over periodic configurations [Thèse 1.5, 4.2]), *transitivity-like* properties (mixingnesses, specification, nonwanderingness [Thèse 1.6, 4.3]), *chain* properties (chain-transitivity, shadowing property [Thèse 1.7, 4.4]), *equicontinuity* properties (almost equicontinuity, sensitivity [Thèse 1.8, 4.5]), *expansivity* (and positive expansivity [Thèse 1.9, 4.6]). We then inspect two characteristic sets : the *limit set* $\Omega_F = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} F^j(X)$ and the *ultimate set* $\omega_F = \bigcup_{x \in X} \bigcap_{J \in \mathbb{N}} \overline{\{F^j(x) \mid j > J\}}$ of DS (X, F) , from which are defined Ω -nilpotency, Ω -periodicity, ω -nilpotency and ω -nilpotency according to whether the restriction of F on each of these subsets is null or periodic, respectively [Thèse 1.10, 4.7]. Note that the *trace subshift* $T_F(\Omega_F)$ of the *limit system* is the onesided subshift corresponding to the bitrace τ_F^* [Thèse 4.7.24].

The questions we ask are :

- **Sim** : Is the property preserved by DS *simulation* ; if not is it by some restricted simulation ?
- **SimC** : Is the property preserved by CA *cellular simulation* ?
- $\rightarrow \tau$: Is the property true for the *factor subshifts* of some SS if it is true for the SS itself ?
- $\tau \tau \rightarrow$: Is the property true for some SS if it is true for all of its *factor subshifts* ?
- $\tau \rightarrow$: Is the property true for some CA if it is true for *some particular column factor* ?
- σ : Is the property preserved by CA composition with the *shift* ?

We chose to separate the study of the two kinds of simulations in order to emphasize which were basic topological properties and what was the contribution of the cellular environment. It results in a better

understanding of the needs in the restriction on the concept of cellular simulation, to make it the most relevantly powerful. We note of course that a positive answer to **Sim** implies one to its subcases **SimC** and $\rightarrow \tau$, but more can be expressed from the specific actions of CA and from the the particularity of the trace factorizations, respectively. Concerning question σ , most answers are well-known [38, 64], but recalled here in order to inform, combined with **SimC**, about directional simulations used in [30, 31], *i.e.* cellular simulation up to some shift iterate. The results summarized here correspond in a great part to paragraphs "...et simulation" (**Sim**) at the end of each concerned section in [Thèse 1], "...et simulation" (**SimC**, σ) and "...et trace" ($\rightarrow \tau$, $\tau\tau \rightarrow$, $\tau \rightarrow$) at the end of each concerned section in [Thèse 4].

	Sim	SimC	$\rightarrow \tau$	$\tau\tau \rightarrow$	$\tau \rightarrow$	σ
surjectivity	complete	block	✓	✓	✓	✓
injectivity	exact	context-free	⊥	✓	1	✓
openness	exact	context-free	⊥	⊥	⊥	✓
nilpotency, w.nilpotency	✓	✓	✓	⊥	1	✓
preperiodicity	✓	✓	✓	⊥	1	⊥
w.preperiodicity	✓	✓	✓	⊥	⊥	⊥
nilpotency/periodic	exact	✓	?	✓	1	✓
nonwanderingness	direct complete	block	✓	✓	✓	✓
transitivity, w.mixingness	direct complete	complete	✓	✓	?	⊥
mixingness	complete	complete	✓	✓	?	⊥
s.transitivity	direct complete	direct complete	✓	⊥	⊥	✓
specification	complete	complete	✓	⊥	⊥	✓
chain-transitivity	direct complete	complete	✓	✓	?	⊥
shadowing	exact complete	exact complete	⊥	✓	d	⊥
equicontinuity	exact	✓	✓	✓	1	⊥
almost equicontinuity	exact complete	context-free complete	⊥	✓	r	⊥
sensitivity	exact complete	exact complete	$\leq \varepsilon$	⊥	⊥	⊥
pos.expansivity	exact	exact	trivial	⊥	⊥	⊥
expansivity	exact	exact	⊥	⊥	⊥	⊥
Ω -nilpotency	✓	✓	✓	⊥	1	✓
Ω -periodicity	✓	✓	✓	⊥	⊥	⊥
ω -nilpotency	✓	✓	✓	✓	1	✓
ω -periodicity	✓	✓	✓	⊥	⊥	⊥
finite type	exact complete	exact complete	⊥	✓	d	⊥
soficness	complete	complete	✓	✓	d	⊥

Keys. ✓ stands for a positive answer, ⊥ for a negative one. In columns **Sim** and **SimC**, we indicate the restrictions needed to get a positive answer, if any. In column $\tau \rightarrow$, we indicate the least (as far as we know) width of column factor which would imply that of the CA, r standing for its radius, d for its diameter, ✓ for some computable number in terms of d and $|A|$.

ω -nilpotency, which consists in the convergence of all orbits towards the same limit point, appears to be a very robust notion. Its equivalence, in the context of CA, with nilpotency, weak nilpotency, Ω -nilpotency, and trace nilpotency was published in [51] [Thèse 4.7.15]. They are many other questions rising, especially about ω -limit sets; for instance, can it be non-full for some surjective CA, or what does ω -periodicity really represent ?

Most open questions in the table above concern implications of the properties of the diametral factor of CA; we can also mention, in that area, that it is unknown whether the topological entropy of CA is

equal to that of some of their column factor, as it is the case for onesided or expansive CA [Thèse 4.8.6]. Another important class of issues, partly addressed in [31], is to obtain minimal restrictions of cellular simulations that preserve a given property, such as immediate properties, expansivities, transitivity. Finally, we can notice a last question mark, isolated, in the third column, which can be expressed as follows : can a CA which is nilpotent over periodic configurations admit some periodic trace word ?

D.5 Traceable subshifts

We have seen how some properties of CA could be transmitted to their trace. An interesting “reverse” problem would be to find an adequate CA being given a potential trace subshift. We can see that this is not possible for all subshifts. For instance, a trace subshift always contains some **deterministic** subshift, *i.e.* $\{(\xi^j(a))_{j \in \mathbb{N}} \mid a \in A\}$ for some function $\xi : A \rightarrow A$ [Thèse 3.5.1]. This is not the case for subshifts like $\{(001)^\infty, (010)^\infty, (100)^\infty\}$.

In [52], we inspected this **traceability** property for sofic subshifts, and reached some sufficient conditions : all *DDC SFT* and *universal DDC sofic* subshifts are *traceable* by some CA, where a **DDC** subshift stands for a subshift which contains some *deterministic* subshift $\{(\xi^j(a))_{j \in \mathbb{N}} \mid a \in A\}$ and some *periodic* word w^∞ such that $w \in A^* \setminus \xi(A)^*$. We give here a sketch of proof a little different from [52], that will allow further results.

Polytraceability. [Thèse 5.1]

[Thèse 5.0.8] Any *SFT of order 2* is *traceable* by some onesided CA.

[Thèse 5.1.1] We are interested in the subproblem of polytraceability. The **polytrace** of some CA F on some alphabet $B \subset A^k$ is the union $\overset{\circ}{\tau}_F = \bigcup_{0 \leq l < k} \pi_l(\tau_F)$, where $\pi_l((z_i^j)_{0 \leq i < k}) = (z_i^j)_{j \in \mathbb{N}}$.

[Thèse 5.1.9] Any *SFT* is the *polytrace* of some onesided CA.

[Thèse 5.1.5] To deal with more complex subshifts, we use the characterizations of universality [Thèse 2.6.3]. A subshift is **polyuniversal** if any other subshift is factor of some subshift $\Sigma' \subset \Sigma$.

[Thèse 5.1.12] Any *universal sofic* subshift Σ is *polyuniversal*.

[Thèse 5.1.13] Any *universal sofic* subshift is the **polytrace** of some onesided CA.

Partial traces. [Thèse 5.2]

[Thèse 5.2.6] Now it remains to simulate our CA on $B \subset A^h$ by some CA on A , transforming the polytrace into a trace. First we are looking for some CA restriction to some SFT (not over the whole space $A^\mathbb{Z}$). This is possible with a restriction. A subset $B \subset A^h$ is called **p -freezing** if $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, A^i W \cap W A^i = \emptyset$ [Thèse 5.2.1]. If G is a CA on some $\lfloor \frac{h}{2} \rfloor$ -freezing alphabet $B \subset A^h$, then we can build some CA restriction $\boxtimes_h G$ on some SFT, whose *trace* $\tau_{\boxtimes_h G}$ is the *polytrace* $\overset{\circ}{\tau}_G$ of G .

[Thèse 5.2.7] But very few alphabets are freezing; we can impose freezingness by juxtaposing a particular subset, called a border. A **border** for the subset $B \subset A^h$ is some finite DS $(\Upsilon \subset A^l, \delta_\Upsilon)$, where Υ is $\lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor$ -freezing.

[Thèse 5.2.9] If G is a CA on some alphabet $B \subset A^k$ and $(\Upsilon \subset A^l, \delta_\Upsilon)$ a *border* for B , then we can build some CA restriction F on some SFT, whose *trace* τ_F is $\overset{\circ}{\tau}_G \cup \left\{ (\delta_\Upsilon^j(b))_{j \in \mathbb{N}} \mid b \in \Upsilon \right\}$.

[Thèse 5.2.11] A first example of *border* are 10^k .

[Thèse 5.2.12] If G is a CA on some alphabet $B \subset A^k$ such that $0^\infty, 1^\infty \in \overset{\circ}{\tau}_G$ and $(\Upsilon \subset A^l, \delta_\Upsilon)$ a *border* for B , then we can build some CA restriction F on some SFT, whose *trace* τ_F is $\overset{\circ}{\tau}_G$.

[Thèse 5.2.13] A second example of *border* is $\{a^{k+|u|} \bar{u} u a^{|u|} \mid a \in A, u \neq a^{|u|}\}$.

[Thèse 5.2.14] If G is a CA on some alphabet $B \subset A^k$ such that $u^\infty \in \overset{\circ}{\tau}_G$, u being nonuniform, and $(\Upsilon \subset A^l, \delta_\Upsilon)$ a *border* for B , then we can build some CA restriction F on some SFT, whose *trace* τ_F is $\overset{\circ}{\tau}_G$.

[Thèse 5.2.15] All sofic subshifts contain either 0^∞ and 1^∞ , or u^∞ for some nonuniform u , except weakly nilpotent ones. Nilpotent ones can easily be seen as traces of CA restrictions, whereas other weakly nilpotent are not traceable [Thèse 4.7.15].

[Thèse 5.2.16] As a result, all *sofic polytraces*, especially *SFT* and *universal sofic* subshifts, are the *traces* of some CA restrictions to some SFT.

Traces. [Thèse 5.3]

[Thèse 5.3.6] We now want to be able to extend our CA to the whole space $A^\mathbb{Z}$ without creating invalid trace words. We need a border which cannot appear from scratch; it can be adapted from the previous one as soon as we add the DDC condition.

[Thèse 5.3.9] If G is a onesided CA on alphabet $B \subset A^k$, $\xi : A \rightarrow A$ and $(\Upsilon, \delta_\Upsilon)$ a *border* for B such that $\Upsilon \subset \xi(A)^k (\xi(A)^k)^C$, then we can build some CA $F : A^\mathbb{Z} \rightarrow A^\mathbb{Z}$ whose *trace* τ_F is $\overset{\circ}{\tau}_G \cup \left\{ (\delta_\Upsilon^j(b))_{j \in \mathbb{N}} \mid b \in \Upsilon \right\} \cup \left\{ (\xi^j(a))_{j \in \mathbb{N}} \mid a \in A \right\}$.

[Thèse 5.3.11] As a result, all *DDC* subshifts which are the *polytrace* of some onesided CA are *traceable*.

We get our result : all *DDC SFT* and all *DDC universal sofic* subshifts are *traceable*.

Because of the equivalence between ω -nilpotency and nilpotency, non-nilpotent trace subshifts of CA cannot be ω -nilpotent, *i.e.* with a finite number of nonzero letters. There is still a gap between simple trace subshifts (SFT) and complex ones (universal), that is not very well understood. The main open question in this area is to complete the characterization of traceable sofic subshifts. Subsequently, one shall try to understand the non-sofic case, which seems to need a very different approach than the one we used, based on some finite automaton simulation. We can add a subsidiary question : which subshifts are *bitraces* (or *limit traces*) of CA ?

Bitraces. [Thèse 5.4]

[Thèse 5.4.8] When considering the limit trace, we can perform a finite number of invalid steps and then follow the given trace. In particular we can erase invalid words in the first application of the CA. Hence, if we consider the polytrace of some CA on some alphabet $B \subset A^k$, it has the same limit than the polytrace of some CA on alphabet A^k , by applying a previous “erasing” step.

[Thèse 5.4.2] The previous point makes it impossible for borders to juxtapose an invalid zone of configuration; hence we do not have to destroy borders any more. We can use the more general border $\{ab^{k+1} \mid \forall j \in \mathbb{N}, \xi^j(a) \neq \xi^j(b)\}$, if $\xi : A \rightarrow A$.

[Thèse 5.4.4] If G is a onesided CA on alphabet A^k , $\xi : A \rightarrow A$ and $(\Upsilon \subset A^l, \xi^{(l)})$ a *border* for A^k , then we can build a CA $F : A^\mathbb{Z} \rightarrow A^\mathbb{Z}$ whose trace τ_F is $\overset{\circ}{\tau}_G \cup \left\{ (\xi^j(a))_{j \in \mathbb{N}} \mid a \in A \right\}$.

[Thèse 5.4.9] If G is a onesided CA on alphabet $B \subset A^k$ whose bitrace $\overset{\circ}{\tau}_G^*$ is sofic and contains a *deterministic* subshift, then there is a CA F on alphabet A whose *bitrace* τ_F^* is $\overset{\circ}{\tau}_G^*$.

As a consequence, all *SFT* and all *universal sofic* subshifts are the *bitrace* of some CA as soon as they contain some *deterministic* subshift.

D.6 Decidability

Lots of problems on the long-term behavior of CA have been shown undecidable, such as *nilpotency* [12], *quasiequicontinuity* [124], or any nontrivial property (Rice-like theorem) of the *limit set* [14]. More recently, properties on the complexity of the *canonical factors* were proved undecidable [47]; hence, both the equicontinuity and the language classifications presented in [43] are undecidable – except, perhaps, the mysterious property of positive expansivity.

The techniques developed in the previous section are based on the construction of borders to simulate CA on some alphabet $B \subset A^k$ by CA on alphabet A . Hence, they shall help to adapt some undecidability

proofs on CA in the general case to undecidability proofs with a given alphabet. This kind of results are often much more difficult ; for instance it is still an open question whether the Rice-like theorem on limit sets can be adapted somehow to the case of fixed alphabet, sidestepping the decidability of surjectivity.

Our constructions can, for instance, help to regain the undecidability of *nilpotency* of CA on alphabet $\{0, 1\}$, proved in [124] [Thèse 6.1.5]. Above all, it allows to prove a *Rice-like* theorem on *bitrace* subshifts of CA on alphabet $\{0, 1\}$ [Thèse 6.3.3]. Indeed, we can reduce the nilpotency problem of **spreading** CA, *i.e.* that admit a state 0 which spreads in the configuration as soon as it appears. The idea is to build a double product of some CA which has a given trace subshift, a shift CA and some CA of which we wonder if it is nilpotent [Thèse 6.3.1]. When the last one gets to 0, it erases the shift, so that the trace subshift is –nearly – that of the first one ; otherwise the trace subshift is a full shift. This gave rise to the article [53], since which the rather unclear erasing condition has been formalized.

This result can be expressed in terms of tilings – of which CA space-time diagrams are a particular case : for instance, being given local constraints on tiles, it is not decidable whether we can extend any line of tiles into a valid tiling of the plane [Thèse 6.3.4].

An interesting question would be to get a similar result on diametral factor, or being given CA of bounded radius. This would require a completely different construction than ours, which took advantage of an unbounded neighborhood to store the encoding. Nevertheless, it seems hopeless to have such a strong statement on diametral factors : the existence of a uniform word in the diametral factor can clearly be read directly from the local rule.

D.7 Generalizations... and restrictions

We have restricted our study to one dimension ; one can wonder what happens when studying two-dimensional CA, *i.e.* continuous self-maps of $A^{\mathbb{M}^2}$ that commute with both the vertical and the horizontal shifts. Actually, most topological results prevail, except those that involve a juxtaposition of words, such as the equivalence between non-sensitivity and quasiequicontinuity. Another great difference lies in decidability questions : the undecidability of the domino problem [123] implies that of the simplest properties in two-dimensional CA, such as injectivity or surjectivity. An approach towards better understanding of this dimension-dependence would be to study restrictions of two-dimensional CA on some subshifts, such as sand automata, which were defined in that context in [119, 110].

Another important perspective lies in the directional classifications, as presented in [79, 64, 10]. The idea is to avoid the chaotic impact of the shift in the Cantor topology by studying dynamics of CA up to some shift composition. Especially, the symbolic classifications of directional classes is not yet well understood. This issue consists in the study of the action of some subnetwork of the continuous action $\mathbb{N} \times \mathbb{M}$ over the configuration space corresponding to simultaneous applications of the CA and shifts. Playing upon the structure of the monoid \mathbb{M} itself seems another possible generalization, but with very different perspectives ; recall that the case of \mathbb{N} is far from being fully understood.