



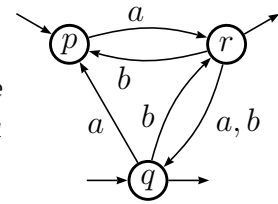
# Correction examen Automates

—2008-2009—

14 avril 2009 - 2 heures

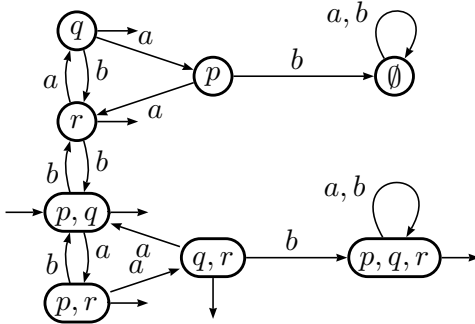
*Les documents sont interdits. Les exercices sont indépendants. On pourra admettre la réponse à une question pour passer à la question suivante.*

► **Exercice 1.** Calculer une expression rationnelle décrivant le langage complémentaire sur l'alphabet  $\{a, b\}$  du langage reconnu par l'automate ci-contre.

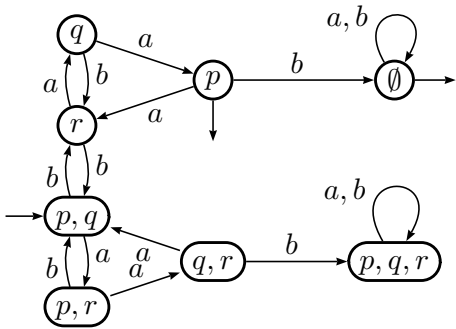


Avant de calculer l'expression, il faut calculer un automate reconnaissant le complémentaire, donc déterminer.

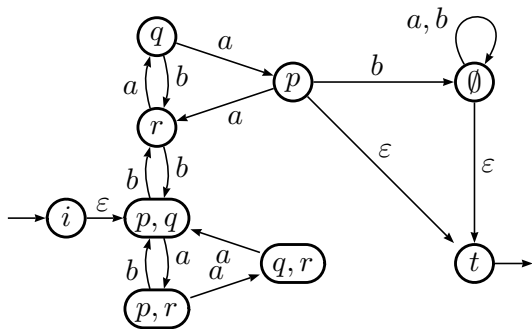
Cet automate est complet (sinon, il faudrait rajouter



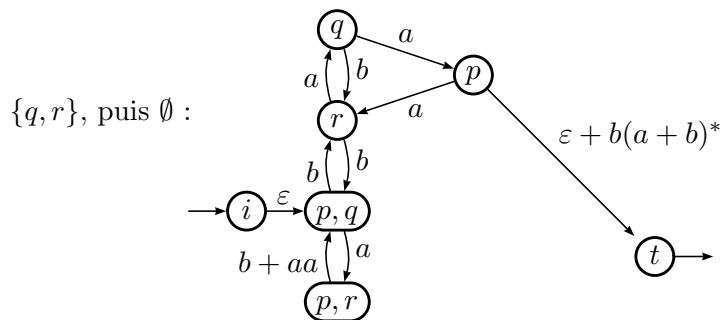
l'état  $\emptyset$ ...); on peut donc reconnaître le complémentaire en échangeant états terminaux et non-terminaux :

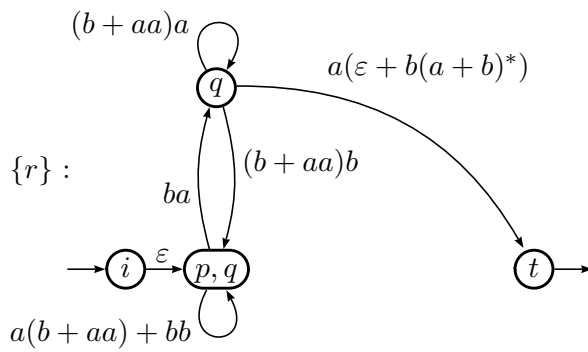
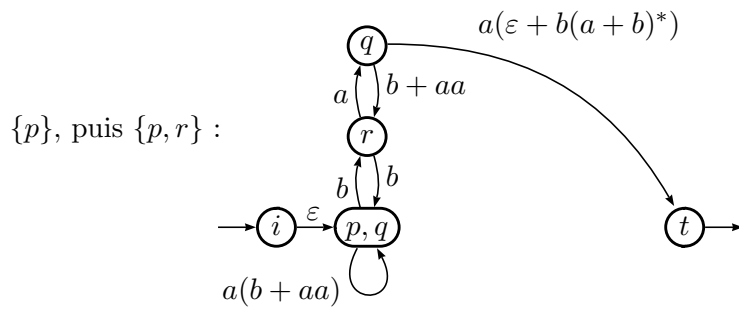


Avant de calculer l'expression, on peut émonder et raccorder les états initiaux et terminaux à des états uniques :

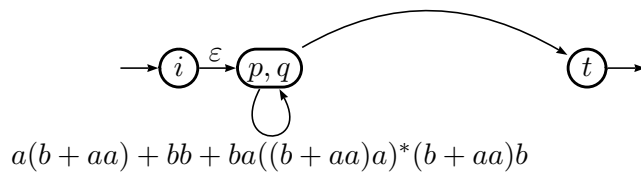


On élimine ensuite les états les uns après les autres :





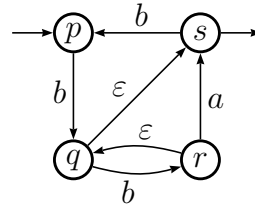
$\{q\}$  :  $ba((b+aa)a)^*(a(\epsilon + b(a+b)^*))$



Après avoir éliminé  $\{p, q\}$ , il reste entre  $i$  et  $t$  l'expression recherchée :  
 $(a(b+aa) + bb + ba((b+aa)a)^*(b+aa)b)^*ba((b+aa)a)^*(a(\epsilon + b(a+b)^*))$ .

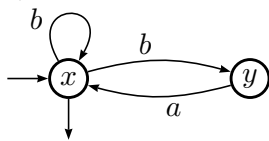


► **Exercice 2.** Calculer un automate reconnaissant l'intersection du langage  $b^*(bab^*)^*$  avec le langage reconnu par l'automate ci-contre.



-----  
 Pour calculer l'intersection de deux langages rationnels, il faut qu'ils soient représentés par deux automates sans  $\epsilon$ -transitions.

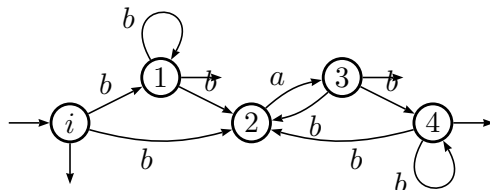
Si on examine attentivement  $b^*(bab^*)^*$ , on remarque qu'un automate à deux états reconnaît ce langage ; en fait d'après la formule  $E^*(FE^*)^* = (E + F)^*$ , cette expression est équivalente à  $(b + ba)^*$  qui est évidemment reconnu par :



Sinon, on peut calculer l'automates des positions de  $E = b_1^*(b_2a_3b_4^*)^*$  ; on a

Null( $E$ ) = true	First( $E$ ) = {1, 2}	pos	1	2	3	4
	Last( $E$ ) = {1, 3, 4}		Follow( $E, pos$ )	{1, 2}	{3}	{2, 4}

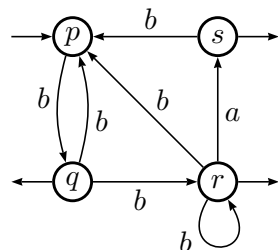
D'où l'automate :



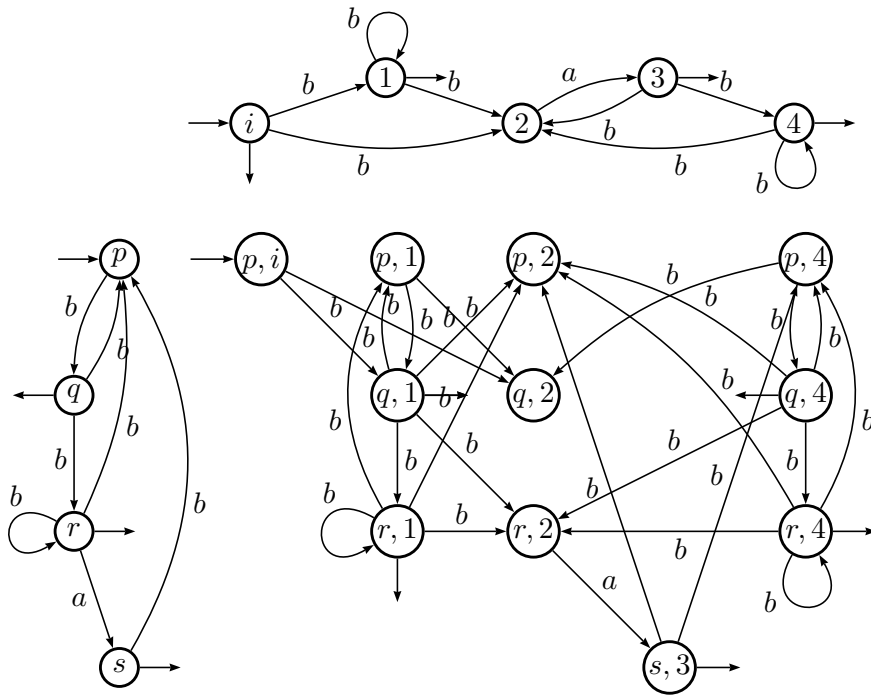
Pour supprimer les  $\epsilon$ -transitions dans l'automate donné, on calcule les  $\epsilon$ -successeur :

$x$	$p$	$q$	$r$	$s$
Succ $_{\epsilon}(x)$	{ $p$ }	{ $q, s$ }	{ $q, r, s$ }	{ $s$ }

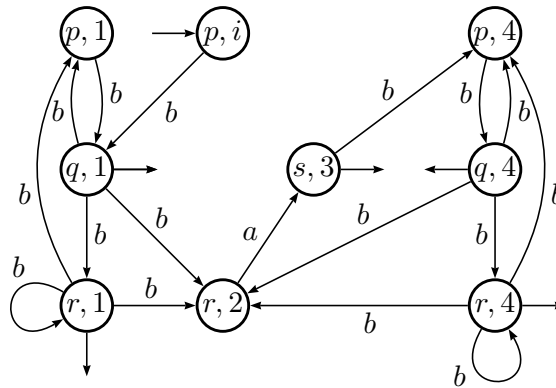
D'où l'automate :




On peut alors faire le produit. On le fait ici avec l'automate des positions, mais il serait plus simple de le faire avec l'automate à deux états.



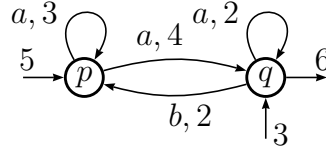
On peut ensuite émonder :



..... 

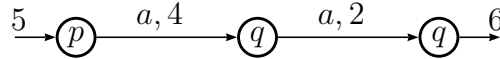
► **Exercice 3.** Un automate avec capacité est un  $\mathcal{A} = (Q, A, E, I, T)$  doté d'une fonction  $c$  de  $E$  dans  $\mathbb{N}_*$ , l'ensemble des nombres entiers strictement positifs, d'une fonction  $\iota$  de  $I$  dans  $\mathbb{N}_*$ , et d'une fonction  $\tau$  de  $T$  dans  $\mathbb{N}_*$ . Si  $(p, a, q)$  est une transition, on dit que  $c(p, a, q)$  est la capacité de  $(p, a, q)$ , de même, pour tout état initial  $p$ ,  $\iota(p)$  est la capacité initiale de  $p$  et  $\tau(p)$  est la capacité terminale de  $p$ .

Lorsqu'on dessine un automate avec capacité, on indique sur chaque transition, à côté de l'étiquette, la capacité de la transition; de même on indique les capacités initiales et terminales sur les flèches initiales et terminales. Soit  $\mathcal{A}_1$  un automate avec capacité :



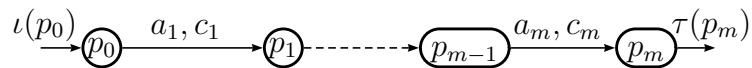
Dans cet exemple, la capacité initiale de  $p$  est  $\iota(p) = 5$ , la capacité terminale de  $q$  est  $\tau(q) = 6$  et la capacité de la transition  $(q, b, p)$  est  $c(q, b, p) = 2$ .

Dans un automate à capacité, la capacité d'un chemin réussi d'un état initial  $i$  à un état terminal  $t$  est le minimum de  $\iota(i)$ ,  $\tau(t)$ , et de chacune des capacités des transitions du chemin. Par exemple, la capacité du chemin réussi

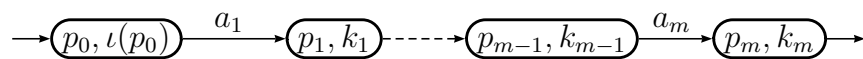


est 2, car la plus petite capacité est 2 sur ce chemin. Pour un mot  $w$  accepté par un automate  $\mathcal{A}$  avec capacité, la charge maximale de  $w$  selon  $\mathcal{A}$  est le maximum des capacités des chemins réussis de  $\mathcal{A}$  étiquetés par  $w$ .

1. Pour chacun des mots  $aaa$  et  $aba$ , donner tous les chemins réussis dans  $\mathcal{A}_1$  ainsi que la charge maximale de ces deux mots.
2. À partir d'un automate avec capacité  $\mathcal{A} = (Q, A, E, I, T)$ , on définit un automate normal  $n(\mathcal{A})$  dont les états sont des paires  $(p, k)$ , où  $p$  est un état de  $\mathcal{A}$  et  $k$  un entier.  $n(\mathcal{A})$  est construit de la façon suivante :
  - si  $p$  est initial dans  $\mathcal{A}$ , alors on crée un état  $(p, \iota(p))$  initial dans  $n(\mathcal{A})$  ;
  - si  $(p, a, q)$  est une transition de  $\mathcal{A}$  et que  $(p, k)$  est un état de  $n(\mathcal{A})$ , alors on calcule  $l = \min(k, c(p, a, q))$  et on construit dans  $n(\mathcal{A})$  une transition de  $(p, k)$  à  $(q, l)$  étiquetée par  $a$ .
  - si  $p$  est terminal dans  $\mathcal{A}$  et  $(p, k)$  est un état de  $n(\mathcal{A})$ , cet état est terminal.
 À partir de l'automate  $\mathcal{A}_1$  donné en exemple au début de l'exercice, construire l'automate  $n(\mathcal{A}_1)$ .
3. Montrer que pour tout automate avec capacité  $\mathcal{A}$ , les automates  $\mathcal{A}$  et  $n(\mathcal{A})$  acceptent les mêmes mots. Montrer que par récurrence sur  $n$  que, pour tout mot  $w$  de longueur  $n$  si on part d'un état initial de  $n(\mathcal{A})$ , qu'on lit  $w$  et qu'on arrive dans un état  $(p, k)$ , alors il existe un chemin dans  $\mathcal{A}$  étiqueté par  $w$  partant d'un état initial  $i$  et arrivant en  $p$  tel que la capacité minimale le long de ce chemin (y compris  $\iota(i)$ ) est égale à  $k$ . En déduire que pour tout chemin réussi dans  $\mathcal{A}$  :

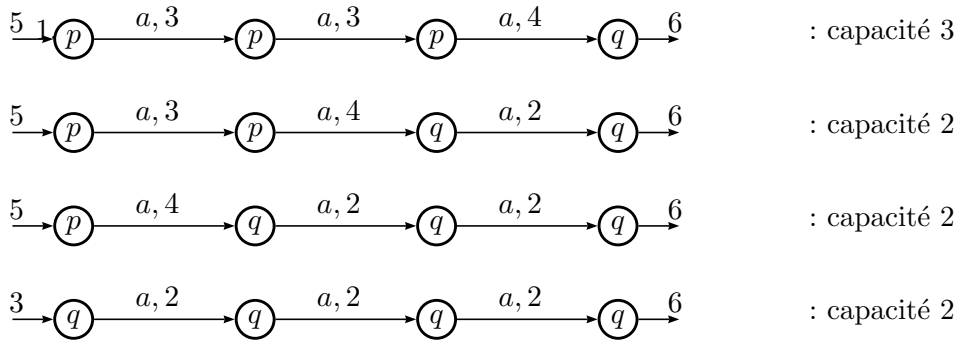


il existe un chemin réussi dans  $n(\mathcal{A})$  :

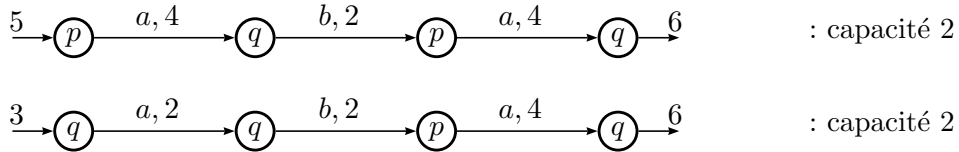


tel que la capacité du chemin dans  $\mathcal{A}$  est égale à  $\min(k_m, \tau(p_m))$ .

4. a) Soit  $C$  un entier supérieur à toutes les capacités de  $\mathcal{A}$ . Montrer qu'on peut mettre des capacités sur  $n(\mathcal{A})$  de telle sorte que
- pour tout état initial, la capacité initiale vaut  $C$  ;
  - pour toute transition, la capacité vaut  $C$  ;
  - pour tout mot accepté, la charge maximale selon  $n(\mathcal{A})$  est la même que selon  $\mathcal{A}$ .
- b) Appliquer ceci à l'automate  $n(\mathcal{A}_1)$  construit précédemment.
5. a) Montrer que si l'on détermine  $n(\mathcal{A})$ , on peut mettre des capacités sur le résultat de sorte que la charge maximale de tout mot accepté soit la même que selon  $\mathcal{A}$ .
- b) Calculer le déterminisé de  $n(\mathcal{A}_1)$  et lui appliquer les capacités afin que tout mot accepté ait la même charge maximale que dans  $\mathcal{A}_1$ .

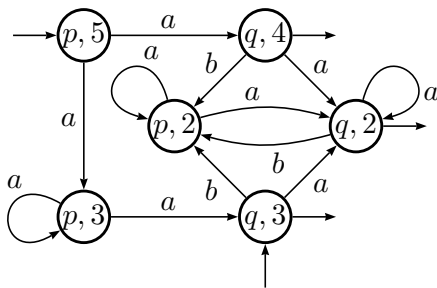


La charge maximale de  $aaa$  est donc 3.



La charge maximale de  $aba$  est donc 2.

2.



3. Montrons par récurrence sur la longueur des chemins qu'il existe un chemin dans  $n(\mathcal{A})$  qui part d'un état initial et qui arrive en  $(p, k)$ , si et seulement si il existe dans  $\mathcal{A}$  un chemin avec la même étiquette qui part d'un état initial, arrive en  $p$  et dont la capacité est  $k$ .
- si le chemin est de longueur nulle,  $(p, k)$  est initial dans  $n(\mathcal{A})$ , ce qui est équivalent par définition au fait que  $p$  est initial dans  $\mathcal{A}$  avec  $\iota(p) = k$ .
  - supposons l'équivalence vraie pour tout chemin de longueur  $l$ . Considérons un chemin de longueur  $l + 1$  dans  $n(\mathcal{A})$ ; soit  $(p, k)$  l'état atteint et  $(q, r)$  l'état qui précède  $(p, k)$  sur

ce chemin. Par hypothèse de récurrence, il existe un chemin de longueur  $l$ , avec la même étiquette dans  $\mathcal{A}$  qui arrive en  $q$  et dont la capacité est  $r$ . Comme il y a une transition de  $(q, r)$  à  $(p, k)$ , il existe une transition de  $q$  à  $r$  avec la même étiquette. Si la capacité  $c$  de cette transition est supérieure ou égale à  $r$ , par définition de  $n(\mathcal{A})$ ,  $k = r$  et il existe donc dans  $\mathcal{A}$  un chemin de capacité  $r$ , de longueur  $l + 1$  avec la bonne étiquette. Si  $c$  est strictement plus petite que  $r$ , alors  $k = c$ , et de même, on a un chemin de capacité  $c$ , de longueur  $l + 1$  avec la bonne étiquette.

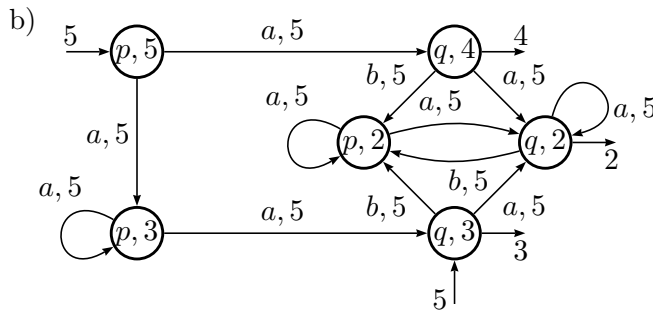
Réciproquement, si on considère un chemin de capacité  $c$  dans  $\mathcal{A}$  arrivant en  $p$ , il n'est pas difficile de voir qu'il existe un chemin de même étiquette qui arrive en  $(p, c)$  dans  $n(\mathcal{A})$ .

– Par récurrence, on en déduit que la propriété est vraie pour des chemins de n'importe quelle longueur.

Un mot est accepté par  $n(\mathcal{A})$  si et seulement si il étiquette un chemin qui arrive dans un état  $(p, k)$  terminal, ce qui est équivalent au fait qu'il existe un chemin de même étiquette dans  $\mathcal{A}$  arrivant en  $p$  qui est terminal par définition de  $n(\mathcal{A})$ .

La capacité d'un chemin réussi prend en compte la capacité terminale, qui est donc  $\min(k_m, \tau(p_m))$ .

4. a) D'après la formule précédente, la capacité des chemins réussis correspondant aux chemins de  $n(\mathcal{A})$  qui arrivent en  $(p, k)$  est exactement  $\min(k, \tau(p))$ . En prenant cette quantité comme capacité terminale et en mettant des capacités plus grandes partout ailleurs, on obtient bien un automate équivalent à  $\mathcal{A}$ .



5. a) Lorsque l'on déterminise, on stocke tous les états dans lesquels on peut arriver. La charge maximale d'un mot étant le maximum des capacités des chemins étiquetés par ce mot, si dans le déterminisé de  $n(\mathcal{A})$  on arrive dans un état  $\{(p_1, k_1), \dots, (p_m, k_m)\}$ , on sait que la charge maximale de ce mot est le maximum des  $\min(k_i, \tau(p_i))$ , en appliquant une construction similaire à celle de l'exercice précédent, il suffit alors de mettre  $C$  sur toutes les transitions et de placer la valeur de la charge maximale comme capacité terminale.

