La représentation basique de $A_2^{(2)}$ et la combinatoire des partitions

Séverine Leidwanger

Département de Mathématiques,
Université de Caen, 14032 Caen cedex, France.

Abstract — We construct the basic representation of the Kac-Moody algebra $A_2^{(2)}$ in the homogeneous grading from its realization in the principal grading by using combinatorial notions coming from the representation theory of spin symmetric groups in characteristic 3.

Résumé — Nous construisons la représentation basique de l'algèbre de Kac-Moody $A_2^{(2)}$ dans la graduation homogène à partir de sa réalisation dans la graduation principale en utilisant des notions combinatoires provenant de la théorie des représentations des groupes symétriques spinoriels en caractéristique 3.

1 Introduction

Il existe une connexion bien établie entre la combinatoire des partitions et la théorie des représentations des algèbres de Lie affines (voir par exemple [6]). Morris, puis Morris, Yaseen et Olsson ont introduit les notions de p-barre-reste, puis de p-barre-quotient en relation avec les représentations modulaires des groupes symétriques spinoriels [10, 12]. Nakajima et Yamada ont utilisé ces notions (avec $p = 2n+1$) pour étudier la représentation basique de l'algèbre de Lie $A_{2n}^{(2)}$ [11].

Le but de cet article est de construire à l'aide du 3-barre-reste et du 3-barre-quotient la représentation basique de $A_2^{(2)}$ dans la graduation homogène, à partir de sa réalisation dans la graduation principale. Puis, comme application de cette construction, nous considérons le problème récemment résolu par [11] du développement des fonctions P de Schur 3-réduites, qui engendrent la représentation basique de $A_2^{(2)}$, sur la base formée par un certain sous-ensemble de ces fonctions. Nous utilisons l'application $\overline{\Phi}_3$ qui entrelace réalisation principale et réalisation homogène pour obtenir une nouvelle démonstration du résultat de [11] .

Les démonstrations de ces résultats ainsi que leur généralisation au cas de l'algèbre $A_{2n}^{(2)}$ sont traitées dans [8].

2 Notations et principales notions

Une partition $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t)$ est une suite décroissante (au sens large) d'entiers positifs. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des partitions. Pour une partition λ on note λ' sa partition conjuguée, $|\lambda|$ son poids et $l(\lambda) = t$ sa longueur.

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

a b

Figure 1: $\lambda = (9, 7, 5, 4, 3, 1)$ et $\lambda_{(\overline{3})} = (4, 1)$

Une partition stricte est une partition dont toutes les parts sont distinctes, on note $\mathcal{SP}$ l'ensemble des partitions strictes. Par exemple $\lambda = (3, 2, 1)$ est stricte alors que $\lambda = (2, 2, 1)$ ne l'est pas.

2.1 $\overline{3}$-reste, $\overline{3}$-quotient, $\overline{3}$-signe

Pour des raisons de lisibilité nous noterons dorénavant $\overline{3}$ à la place de 3-barre. Nous allons utiliser indifféremment les notations de [10] et [12]. À λ nous associons un boulier composé de trois tiges numérotées de 0 à 2 comme sur la Figure 1-a.

Pour calculer le $\overline{3}$-reste nous poussons les boules vers le haut, autant que faire se peut. Nous effaçons ensuite celles présentes sur la tige 0 et celles présentes au même niveau simultanément sur les tiges 1 et 2. Pour obtenir le $\overline{3}$-reste il suffit ensuite de pousser les boules restantes sur une des tiges le plus possible vers le haut. Nous pouvons voir un exemple sur la Figure 1-b. Au $\overline{3}$-reste nous pouvons associer un mônome $q^a \in \mathbf{C}[q^{\pm 1}]$ où a est soit le nombre de boules présentes sur la tige 1, soit l'opposé du nombre de celles présentes sur la tige 2. Pour notre exemple, on associe q^2 à $\lambda_{(\overline{3})}$.

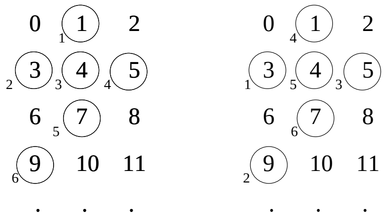
Le $\overline{3}$-quotient de λ est de la forme $(\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)})$ avec $\lambda^{(0)} \in \mathcal{SP}$, $\lambda^{(1)} \in \mathcal{P}$. Les différents niveaux du bouliers sont numérotés de haut en bas. Pour calculer le $\overline{3}$-quotient nous allons lire les niveaux du bas vers le haut. S'il y a des boules sur la tige 0 aux niveaux $a_1, \ldots, a_r$ ($a_1 > a_2 > \ldots > a_r$) alors nous avons $\lambda^{(0)} = (a_1 - 1, \ldots, a_r - 1)$. Pour notre exemple on trouve $\lambda^{(0)} = (3, 1)$.

Pour pouvoir calculer $\lambda^{(1)}$, il faut d'abord remarquer qu'une partition $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ peut être représentée de façon non ambigüe par un mélange de notation traditionnelle et de notation de Frobenius:

$$((\lambda_1, \ldots, \lambda_s)\ ;\ (\alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_m\ ;\ \beta_{s+1}, \ldots, \beta_m))$$

où le deuxième élément du couple est la partition $(\lambda_{s+1}, \ldots, \lambda_m)$ dans la notation de Frobenius. Ensuite nous pouvons supposer sans perte de généralité qu'il y a s boules sur la tige 1 sur le boulier du $\overline{3}$-reste, elle est alors appelée tige dominante (si les boules sont sur la tige 2, nous travaillons simplement comme si cette tige était la tige dominante et à la fin nous prenons la partition conjuguée). S'il y a des boules aux niveaux $a_1, \ldots, a_{s+r}$ ($r \geq 0$) avec $a_1 > \ldots > a_{s+r}$ sur la tige 1 et aux niveaux $b_1, \ldots, b_r$ sur la tige 2 nous posons alors

$$\lambda^{(1)} = ((a_1 - s, a_2 - (s-1), \ldots, a_s - 1)\ ;\ (a_{s+1} - 1, \ldots, a_{s+r} - 1\ ;\ b_1 - 1, \ldots, b_r - 1)).$$



a b

Figure 2:

Notre exemple donne $\lambda^{(1)} = ((2,1)\ ;\ (0;1)) = (2,1,1,1)$.

Nous allons à présent calculer le $\overline{3}$-signe en suivant [12]. Pour cela nous allons numéroter les boules de deux façons différentes. La première est la plus naturelle, i.e. nous numérotons les boules de 1 à $l(\lambda)$ dans l'ordre croissant de leur contenu. La seconde numérotation est un peu plus compliquée. Il faut introduire du vocabulaire avant de l'expliquer. Deux éléments sont dits conjugués si leurs boules sont sur les tiges 1 et 2 et si le nombre de boules au-dessus d'elles sur leurs tiges respectives est le même. On dit alors qu'ils sont dans la même couche. Les éléments qui n'ont pas de conjugués sont dits isolés.

Nous pouvons à présent définir la seconde numérotation: nous numérotons d'abord dans l'ordre croissant les boules de la tige 0. Ensuite nous numérotons les éléments conjugués par ordre croissant de leur minimum, et pour chaque paire l'élément sur la tige 2 est numéroté avant celui sur la tige 1. Enfin les éléments isolés sont numérotés par rapport à la couche dans laquelle ils se trouvent de la façon suivante: s'ils sont dans la même couche celui sur la tige 1 est numéroté avant celui sur la tige 2, sinon celui appartenant à la couche la plus basse est numéroté en premier. Quand nous comparons les deux numérotations de λ nous obtenons une permutation $\pi_{\overline{3}}(\lambda)$ de $1,\ldots,l(\lambda)$ dont le signe est noté $\epsilon_{\overline{3}}(\lambda)$ c'est le $\overline{3}$-signe.

Pour notre exemple, la Figure 2-a représente la numérotation naturelle et la Figure 2-b l'autre numérotation.

Nous avons

$$\pi_{\overline{3}}(\lambda) = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 6 & 2 \end{matrix}$$

et donc $\epsilon_{\overline{3}}(\lambda) = -1$.

Théorème 1 *[10, 12] Soit $\mathcal{R}_{\overline{3}}$ l'ensemble des partitions strictes qui sont égales à leur $\overline{3}$-reste. L'application*

$$\lambda \mapsto (\lambda_{(\overline{3})}; \lambda^{(0)}, \lambda^{(1)})$$

établit une bijection entre $\mathcal{SP}$ et $\mathcal{R}_{\overline{3}} \times \mathcal{SP} \times \mathcal{P}$.

2.2 Fonctions symétriques

Nos notations seront celles de [9]. On note $\mathrm{Sym}(A)$ l'algèbre des fonctions symétriques en un ensemble infini de variables $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ à coefficients dans $\mathbf{C}$. $\mathrm{Sym}(A)$ peut aussi être vu comme l'anneau des polynômes $\mathbf{C}[p_i, \in \mathbf{N}^*]$ où $p_k = \sum_i a_i^k$ est la fonction somme de puissances de degré k. Il existe une autre base importante de cette algèbre, les fonctions S de Schur indexées par toutes les partitions et notées $s_\lambda,\ \lambda \in \mathcal{P}$.

On note ensuite $\mathcal{T}$ la sous-algèbre de Sym engendrée par les fonctions sommes de puissances impaires $\mathbf{C}[p_{2i+1}, i \in \mathbf{N}]$. Une base importante de cette sous-algèbre est formée des fonctions P de Schur indexées par les partitions strictes et notées $P_\lambda,\ \lambda \in \mathcal{SP}$. En fait on peut définir ces fonctions pour n'importe quelle suite d'entiers positifs α en posant

$$P_{w(\alpha)} = \mathrm{sgn} w\, P_\alpha, \quad (w \in \mathfrak{S}_{l(\alpha)}).$$

Ceci implique que $P_\lambda = 0$ si λ ou $w(\lambda)$ n'est pas stricte.

Soit $\langle .\ ;\ . \rangle$ le produit scalaire sur $\mathcal{T}$ défini par

$$\langle P_\lambda,\ P_\mu \rangle = 2^{-l(\lambda)} \delta_{\lambda\mu}.$$

On note D_f l'adjoint de la multiplication par f, c'est-à-dire:

$$\langle D_f g, h \rangle = \langle g, fh \rangle \quad (f\ , g\ , h \in \mathcal{T}).$$

D_f est un opérateur différentiel puisque nous avons pour $f = f(p_1, p_3, \ldots)$

$$D_f = f(1/2\frac{\partial}{\partial p_1}, 3/2\frac{\partial}{\partial p_3}, \ldots, (k+1/2)\frac{\partial}{\partial p_{2k+1}}, \ldots).$$

Nous avons besoin pour la suite de quelques résultats sur les fonctions P de Schur. Soient $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ une partition stricte et j un entier on a alors d'après [5] et [11]:

$$p_j P_\lambda \quad = \quad \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^i P_{(\lambda, j-i, i)} + \sum_{i=1}^{l} P_{(\lambda + j\epsilon_i)} \tag{1}$$

où $(\lambda, j-i, i) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l, j-i, i)$ et $\epsilon_i = (\delta_{ik})_{1 \leq k \leq l(\lambda)}$. Par exemple si $\lambda = (6,3,2)$ et $j = 5$ on a

$$\begin{aligned} p_5 P_{(6,3,2)} &= P_{(6,3,2,5)} - P_{(6,3,2,4,1)} + P_{(6,3,2,3,2)} - P_{(6,3,2,2,3)} \\ &\quad + P_{(6,3,2,1,4)} + P_{(11,3,2)} + P_{(6,8,2)} + P_{(6,3,7)}\ , \\ &= P_{(6,5,3,2)} - 2P_{(6,4,3,2,1)} + P_{(11,3,2)} - P_{(8,6,2)} + P_{(7,6,3)}\ . \end{aligned}$$

De même on a

$$\mathbf{D}_{p_{2k+1}} P_\lambda \quad = \quad \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} (-1)^i P_{\lambda/(2k+1-i,i)} + \frac{1}{2} P_{\lambda/(2k+1)} + \sum_{i=1}^{l(\lambda)} P_{\lambda-(2k+1)\epsilon_i} \tag{2}$$

où $\lambda/(2k+1-i, i)$ est nul si $2k+1-i \notin \lambda$ ou si $i \notin \lambda$ et sinon est une nouvelle partition obtenue à partir de λ en enlevant les parts $2k+1-i$ et i. De plus $P_{\lambda-(2k+1)\epsilon_i}$ est égal à 0 si $\lambda_i - (2k+1) \leq 0$.

Il nous est aussi nécessaire d'introduire l'algèbre $\mathrm{Sym}(X_0, X_1)$ qui est l'algèbre des fonctions symétriques séparément en les ensembles infinis d'indéterminées $X_0,\ X_1$. Nous utiliserons plus particulièrement $\mathcal{T}(X_0 + 2X_1)$ la sous-algèbre de $\mathrm{Sym}(X_0, X_1)$ engendrée par les sommes de puissances $p_{2k+1}(X_0 + 2X_1) := p_{2k+1}(X_0) + 2^{2k+1} p_{2k+1}(X_1)$ pour $k \in \mathbf{N}$.

Pour finir il nous reste à introduire les fonctions P de Schur normalisées. À $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ on associe l'entier

$$p(\lambda) \quad = \quad \sum_{\substack{1 \leq i \leq r \\ \lambda_i \not\equiv 0 \mod (3)}} \left\lfloor \frac{\lambda_i - 1}{3} \right\rfloor \tag{3}$$

et on pose ensuite $P'_\lambda = 2^{p(\lambda)} P_\lambda$. On note N l'application de $\mathcal{SP}$ dans $\mathbf{C}$ qui à λ associe $2^{p(\lambda)}$.

2.3 Algèbres de Lie

L'algèbre a_∞ est une extension centrale de l'algèbre de Lie $\overline{a}_\infty$ des matrices complexes $A = (a_{ij})_{i,j\in\mathbf{Z}}$ telles que $a_{ij} = 0$ pour $|i-j| \gg 0$. En tant qu'espace vectoriel a_∞ est égal à $\overline{a}_\infty \oplus \mathbf{C}c$.

Le crochet de Lie utilisé est le suivant:

$$[A+\lambda c, B+\mu c] = (AB-BA) + \psi(A,B)c\,, \quad (A,B \in \overline{a}_\infty,\ \lambda,\mu \in \mathbf{C}) \tag{4}$$

où ψ est la forme bilinéaire anti-symétrique définie sur les matrices unités E_{ij} par

$$\psi(E_{ij},E_{ji}) = 1 = -\psi(E_{ji},E_{ij}) \tag{5}$$

si $i \leq 0,\ j \geq 1$, et $\psi(E_{ij},E_{mn}) = 0$ sinon. Les générateurs de Chevalley de a_∞ notés $e_i^\infty,\ f_i^\infty,\ h_i^\infty,\ (i \in \mathbf{Z})$ sont exprimés à l'aide des matrices E_{ij} par

$$\begin{aligned} e_i^\infty &= E_{i,i+1}\,, && (6)\\ f_i^\infty &= E_{i+1,i}\,, && (7)\\ h_i^\infty &= [e_i^\infty, f_i^\infty] = E_{i,i} - E_{i+1,i+1} + \delta_{i,0}\,c\,. && (8) \end{aligned}$$

Nous aurons aussi besoin de b_∞.

Soit $\overline{b}_\infty$ la sous-algèbre de Lie de $\overline{a}_\infty$ constituée des matrices $A = (a_{ij})_{i,j\in\mathbf{Z}}$ satisfaisant

$$a_{ij} = (-1)^{i+j+1}\, a_{-j,-i}\,, \quad (i,j \in \mathbf{Z})\,. \tag{9}$$

L'algèbre de Lie affine complétée de rang infini b_∞ est l'extension centrale $b_\infty = \overline{b}_\infty \oplus \mathbf{C}c$ munie du crochet de Lie défini par (4) (5). b_∞ est donc une sous-algèbre de a_∞. On note $F_{i,j}$ les opérateurs définis par $F_{i,j} = E_{i,j} + (-1)^{i+j+1}E_{-j,-i}$.

On prend comme générateurs de Chevalley les éléments $E_i^\infty,\ F_i^\infty,\ H_i^\infty,\ (i \in \mathbf{N})$ donnés par

$$\begin{aligned} E_i^\infty &= e_i^\infty + e_{-i-1}^\infty = F_{i,i+1}\,, \quad (i>0)\,, && (10)\\ E_0^\infty &= 2(e_0^\infty + e_{-1}^\infty) = 2F_{0,1}\,, && (11)\\ F_i^\infty &= f_i^\infty + f_{-i-1}^\infty = F_{i+1,i}\,, \quad (i \geq 0)\,, && (12)\\ H_i^\infty &= [E_i^\infty, F_i^\infty]\,, \quad (i \geq 0)\,. && (13) \end{aligned}$$

L'élément central est $K = H_0^\infty + 2\sum_{i\geq 1} H_i^\infty = 2c$. L'algèbre b_∞ admet une représentation naturelle sur $\mathcal{T}$ donnée par le théorème suivant:

Théorème 2 [1, 4] *Les générateurs de Chevalley de b_∞ agissent sur $\mathcal{T}$ par*

$$F_i^\infty P_\lambda = P_\nu\,, \quad E_i^\infty P_\lambda = P_\mu\,, \tag{14}$$

où ν (resp. μ) est obtenue à partir de λ en remplaçant sa part égale à i par $i+1$ (resp. sa part égale à $i+1$ par i), le résultat valant 0 si i (resp. $i+1$) n'est pas une part de λ. (Nous convenons ici qu'une part valant 0 a été rajoutée à la fin de λ).

Enfin nous nous servirons de $A_2^{(1)}$. $\overline{A}_2^{(1)}$ est la sous-algèbre de $\overline{a}_\infty$ constituée des matrices $A = (a_{ij})_{i,j\in\mathbf{Z}}$ telles que

$$a_{i+3,j+3} = a_{ij}, \quad \sum_{k=1}^{3} a_{3i+k,3j+k} = 0, \quad (i,j \in \mathbf{Z}).$$

$A_2^{(1)}$ peut être vue comme l'extension centrale $(\mathbf{C}[t,t^{-1}]\otimes_{\mathbf{C}} A_2)\oplus \mathbf{C}c$ de l'algèbre de lacets de A_2, le crochet étant donné par

$$[t^k \otimes x, t^l \otimes y] = t^{k+l} \otimes (xy - yx) + k\delta_{k,-l} tr(xy)c, \quad (x,y \in A_2, k,l \in \mathbf{Z}), \qquad (15)$$

(voir [6]). Les générateurs de Chevalley sont $e_i = 1 \otimes E_{i,i+1}, f_i = 1 \otimes E_{i+1,i}$ pour $i \in \{1,2\}$ et $e_0 = t \otimes E_{3,1},\ f_0 = t^{-1} \otimes E_{1,3}$.

3 La construction de la représentation basique de $A_2^{(2)}$ dans la graduation homogène

Le but de cette section est de prouver que les notions de $\overline{3}$-reste, $\overline{3}$-quotient et de $\overline{3}$-signe permettent une construction simple combinatoire de la représentation basique de $A_2^{(2)}$ dans sa graduation homogène et la description de l'isomorphisme entre cette construction et celle de [2] ou [7]. Nous décrivons d'abord, d'après [2], la construction principale de la représentation basique de $A_2^{(2)}$.

La matrice de Cartan de $A_2^{(2)}$ est la suivante:

$$\begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} \\ c_{10} & c_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soit $A_2^{(2)'}$ l'algèbre dérivée de $A_2^{(2)}$. Elle est engendrée par les générateurs de Chevalley $E_1,\ E_0,\ F_1,\ F_0,\ H_1,\ H_0$ soumis aux relations suivantes:

$$[H_i, H_j] = 0, \quad [E_i, F_j] = \delta_{ij} H_i, \quad [H_i,\ E_j] = c_{ij} E_j, \quad [H_i, F_j] = -c_{ij} F_j\ ,$$

ainsi qu'aux relations de Serre,

$$(\mathrm{ad}E_i)^{1-c_{ij}} E_j = 0, \quad (\mathrm{ad}F_i)^{1-c_{ij}} F_j = 0, \text{ pour } i \neq j.$$

Pour obtenir $A_2^{(2)}$ il suffit d'ajouter l'opérateur d ("opérateur degré") satisfaisant:

$$[d, H_1] = 0, \quad [d, E_1] = 0 = [d, F_1]\ ,$$

$$[d, E_0] = E_0, \ [d, F_0] = -F_0.$$

L'élément central $c_{\overline{1}}$ est égal à $2H_0 + H_1$. On peut réaliser $A_2^{(2)}$ comme une sous-algèbre de b_∞. On a $A_2^{(2)} = A_2^{(1)} \cap b_\infty$ où b_∞ et $A_2^{(1)}$ sont vues comme des sous-algèbres de a_∞ (comme nous l'avons expliqué dans la section 2.3). Pour obtenir les formules explicites des générateurs de Chevalley dans cette réalisation nous utilisons une algèbre isomorphe à b_∞ engendrée par les matrices de $\overline{a}_\infty$ vérifiant $a_{2+i,2+j} = (-1)^{i+j+1} a_{2-i,2-j}$, $(i,j \in \mathbf{Z})$. Dans cette algèbre les générateurs de Chevalley deviennent

$$\begin{aligned} E_0^\infty &= 2(E_{2,3} + E_{1,2})\,, \\ E_i^\infty &= E_{2+i,3+i} + E_{1-i,2-i} \quad (i > 0)\,, \\ F_i^\infty &= E_{3+i,2+i} + E_{2-i,1-i} \quad (i \geq 0)\,. \end{aligned}$$

1	0					
1	0	1	1	0	1	
1	0	1	1	0	1	1

Figure 3:

À présent nous pouvons écrire les générateurs de $A_2^{(2)}$ dans cette réalisation:

$$
\begin{aligned}
E_0 &= \sum_{k\in\mathbf{N}} E^{\infty}_{3k+1}\,, && (16)\\
F_0 &= \sum_{k\in\mathbf{N}} F^{\infty}_{3k+1}\,, && (17)\\
E_1 &= E^{\infty}_0 + 2\sum_{k\in\mathbf{N}} (E^{\infty}_{3k+2} + E^{\infty}_{3k+3})\,, && (18)\\
F_1 &= F^{\infty}_0 + \sum_{k\in\mathbf{N}} (F^{\infty}_{3k+2} + F^{\infty}_{3k+3})\,, && (19)\\
H_i &= [E_i, F_i]\,. && (20)
\end{aligned}
$$

Soient Λ_1 le poids fondamental de $A_2^{(2)}$ dual de H_1 et δ celui dual de d.

L'action de l'algèbre dérivée de $A_2^{(2)}$ sur $\mathcal{T}$ est centralisée par l'algèbre de Heisenberg engendrée par les opérateurs $\frac{\partial}{\partial p_{3i}}$ et p_{3i} pour i entier impair supérieur à 1. Ceci implique que $\mathcal{T}$ se décompose sous l'action de $A_2^{(2)}$ en

$$\mathcal{T} = \oplus_{k\geq 0} L(\Lambda_1 - k\delta)^{\oplus p^*(k)}$$

où $p^*(k)$ est le nombre de partitions de k en parts impaires. En particulier la sous-représentation engendrée par le vecteur vide $|0\rangle = P_0 = 1$ est la représentation basique $L(\Lambda_1)$ de $A_2^{(2)}$. Notons $\rho_{\overline{\mathrm{P}}}$ cette représentation. $L(\Lambda_1)$ peut donc être identifiée à

$$\Gamma^{(3)} = \mathbf{C}[p_j,\ j \text{ impair},\ j \not\equiv 0 \bmod 3,\ j \in \mathbf{N}]$$

dans la réalisation principale décrite ci-dessus.

Décrivons à présent l'action des générateurs de Chevalley sur les fonctions P de Schur. Pour cela, à une partition stricte associons son diagramme de Young. Soit (i,j) le noeud situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j. Dans $A_2^{(2)}$ le contenu du noeud (i,j) est

$$\left| \begin{array}{l} 0 \text{ si } j-1 \equiv 1 \mod (3) \\ 1 \text{ si } j-1 \equiv 0,2 \mod (3). \end{array} \right.$$

On peut voir par exemple le diagramme de $(7,6,2)$ sur la Figure 3.

Un noeud (i,j) est dit retranchable si le diagramme obtenu quand on l'enlève est toujours celui d'une partition μ. (Nous faisons remarquer que la partition obtenue peut ne pas être stricte mais que dans ce cas la fonction P de Schur associée sera nulle.) (i,j) est alors un noeud ajoutable pour la partition μ. Par exemple, comme l'illustre la Figure 3, la partition $(7,6,2)$ possède 3 noeuds retranchables de contenus $1,1,0$ et 4 noeuds ajoutables de contenus $0,1,1,1$.

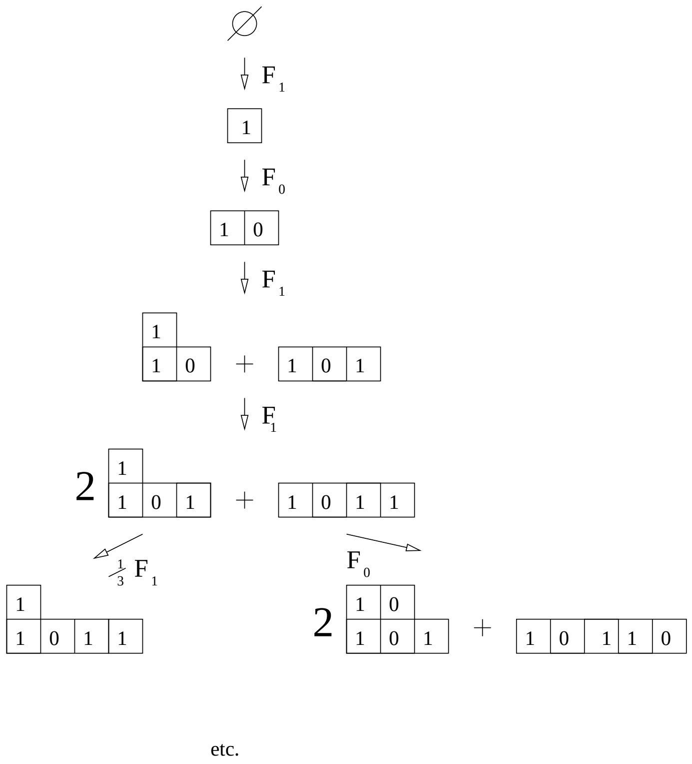


Figure 4:

On obtient alors, en combinant ces définitions, le Théorème 2, et les équations (16)-(19) que

$$\rho_{\overline{\mathrm{P}}}(E_i)P_\lambda = \sum_\mu P_\mu, \quad \rho_{\overline{\mathrm{P}}}(F_i)P_\lambda = \sum_\nu P_\nu$$

où μ (resp. ν) décrit l'ensemble des partitions obtenues à partir de λ en enlevant (resp. en ajoutant) un noeud de contenu i. Par exemple

$$\rho_{\overline{\mathrm{P}}}(F_0)P_{(6,3,1)} = P_{(6,3,2)}, \quad \rho_{\overline{\mathrm{P}}}(F_1)P_{(6,3,1)} = P_{(7,3,1)} + P_{(6,4,1)}.$$

Nous donnons sur la Figure 4 les premiers éléments de la réalisation de $L(\Lambda_1)$. Dans cette figure, $\lambda \xrightarrow{f_i} \sum_j \mu_j$ signifie que $f_i P_\lambda = \sum_j P_{\mu_j}$.

À présent nous allons construire la réalisation homogène de la représentation basique à partir de la réalisation principale. L'algèbre $A_2^{(2)}$ admet une autre sous-algèbre de Heisenberg appelée sous-algèbre homogène et notée $\mathfrak{t}_{\overline{\mathrm{I}}}$. Par définition de $A_2^{(2)}$, c'est l'intersection entre b_∞ et la sous-algèbre homogène de $A_2^{(1)}$. Les générateurs de $\mathfrak{t}_{\overline{\mathrm{I}}}$ sont

$$h^{(2k)} = t^{2k} \otimes (E_{1,1} - E_{3,3}), \quad h^{(2k+1)} = t^{2k+1} \otimes (E_{1,1} - 2E_{2,2} + E_{3,3}), \qquad (k \in \mathbf{Z})$$

ainsi que l'élément central $c_{\overline{\mathrm{I}}}$. Nous remarquons que $L(\Lambda_1)$ n'est pas irréductible par restriction à $\mathfrak{t}_{\overline{\mathrm{I}}}$.

Nous introduisons à présent l'outil principal de la construction.

P_λ	$\overline{\Phi}_3(P_\lambda)$
$P_{(8)}$	$4q^{-1} \otimes s_{(1,1)}(X_1)$
$P_{(7,1)}$	$4q^2 \otimes s_{(1)}(X_1)$
$P_{(6,2)}$	$-q^{-1} \otimes P_{(2)}(X_0)$
$P_{(5,3)}$	$2q^{-1} \otimes P_{(1)}(X_0)s_{(1)}(X_1)$
$P_{(5,2,1)}$	$-2q^{-1} \otimes s_{(2)}(X_1)$
$P_{(4,3,1)}$	$-2q^2 \otimes P_{(1)}(X_0)$

Table 1: L'application $\overline{\Phi}_3$ en degré 8

Définition 1 *Posons* $\mathcal{B}_{\overline{3}} = \mathbf{C}[q^{\pm 1}] \otimes \mathcal{T}(X_0)\,\mathrm{Sym}(X_1)$ *et notons* $\overline{\Phi}_3$ *l'isomorphisme de* $\mathbf{C}$*-espaces vectoriels donné par*

$$\begin{array}{rcl} \overline{\Phi}_3 : \mathcal{T}(X) & \longrightarrow & \mathcal{B}_{\overline{3}} \\ P_\lambda(X) & \longrightarrow & N(\lambda)\epsilon_{\overline{3}}(\lambda)q^a \otimes P_{\lambda^{(0)}}(X_0)s_{\lambda^{(1)}}(X_1) \end{array} \tag{21}$$

où a est calculé en fonction de $\lambda_{(\overline{3})}$ comme expliqué dans la section 2.1.

Des exemples de valeurs de $\overline{\Phi}_3(P_\lambda)$ sont donnés dans la Table 1.

On transporte ensuite l'action de $A_2^{(2)}$ sur $\mathcal{T}$ à $\mathcal{B}_{\overline{3}}$ à l'aide de $\overline{\Phi}_3$ et on pose $\rho_{\overline{\mathrm{H}}}(x) = \overline{\Phi}_3 \circ \rho_{\overline{\mathrm{P}}}(x) \circ \overline{\Phi}_3^{-1}$ pour $x \in A_2^{(2)}$.

Théorème 3 *Soit $\overline{A}$ le sous-anneau de $\mathcal{T}(X_0)\,\mathrm{Sym}(X_1)$ engendré par les*

$$p_{2k}(X_1), \quad 2^{2l}p_{2l+1}(X_1) - p_{2l+1}(X_0), \qquad k \geq 1, l \geq 0.$$

On a

$$\overline{\Phi}_3(\Gamma^{(3)}) = \mathbf{C}[q^{\pm 1}] \otimes \overline{A}.$$

De plus, pour $l \in \mathbf{N}$ on a

$$\begin{array}{rcl} \rho_{\overline{\mathrm{H}}}(h^{(2l)}) & = & -2^{-2l}\mathbf{D}_{p_{2l}(X_1)}\,, \\ \rho_{\overline{\mathrm{H}}}(h^{(-2l)}) & = & -2^{2l}p_{2l}(X_1)\,, \\ \rho_{\overline{\mathrm{H}}}(h^{(2l+1)}) & = & (\mathbf{D}_{2^{-2l-1}p_{2l+1}(X_1) - 2p_{2l+1}(X_0)})\,, \\ \rho_{\overline{\mathrm{H}}}(h^{(-2l-1)}) & = & 2(2^{2l}p_{2l+1}(X_1) - p_{2l+1}(X_0))\,. \end{array}$$

Considérons par exemple l'action de $h^{(-1)}$ sur $P_{(4,1)} \in \mathbf{C}[p_{2i+1}, 2i+1 \not\equiv 0 \bmod 3, i \in \mathbf{N}]$. Nous obtenons

$$\begin{array}{rcl} \overline{\Phi}_3(P_{(4,1)}) & = & 2(q^2 \otimes 1)\,, \\ \rho_{\overline{\mathrm{P}}}(h^{(-1)})(P_{(4,1)}) & = & P_{(7,1)} + 2P_{(4,3,1)}\,, \\ \overline{\Phi}_3(\rho_{\overline{\mathrm{P}}}(h^{(-1)})(P_{(4,1)})) & = & 4(q^2 \otimes (p_1(X_1) - p_1(X_0))\,, \end{array}$$

qui illustre bien le Théorème 3.

Ainsi, l'espace $\mathbf{C}[q^{\pm 1}] \otimes \overline{A}$ muni de l'action de $A_2^{(2)}$ donnée par $\rho_{\overline{\mathrm{H}}}$ fournit une réalisation de la représentation basique de $A_2^{(2)}$ dans laquelle les opérateurs $h^{(k)}$ de la sous-algèbre de Heisenberg homogène agissent par multiplication et par dérivation. Nous avons donc construit la réalisation homogène de la représentation basique de $A_2^{(2)}$.

4 Une application

Grâce à la construction précédente, on peut donner une autre démonstration du principal résultat de [11]. Avant de l'énoncer rappelons quelques définitions et notations de cet article. Soit $\rho^{(\overline{3})} : \mathcal{T} \longrightarrow \Gamma^{(3)}$ l'homomorphisme d'algèbres défini par

$$p_k(x) \longrightarrow \left| \begin{array}{l} p_k(x) \text{ si } \ k \not\equiv 0 \text{ mod } 3, \\ 0 \ \text{ sinon.} \end{array} \right.$$

La fonction symétrique $P_\lambda^{(3)} = \rho^{(\overline{3})}(P_\lambda)$ est appelée fonction P de Schur 3-réduite. On introduit, pour $\lambda \in \mathcal{SP}$ et $\mu,\ \nu \in \mathcal{P}$ des coefficients $h_{\lambda\mu}^{\nu}$ par

$$P_\lambda s_\mu \quad = \quad \sum_{\nu \in \mathcal{P}} h_{\lambda\mu}^{\nu} s_\nu \,.$$

D'après [3], nous savons que ces coefficients sont des entiers positifs.

Le théorème de [11] est le suivant (dans le cas de $A_2^{(2)}$):

Théorème 4 *[11] Soit $\lambda \in \mathcal{SP}$. Alors*

$$P_\lambda^{(3)} = 2^{\lfloor \frac{l(\lambda)+l(\lambda^{(0)})}{2} \rfloor - l(\lambda)} \, (-1)^{|\lambda^{(0)}|} \, \epsilon_{\overline{3}}(\lambda) \sum_{\mu,\nu} \epsilon_{\overline{3}}(\mu) \, 2^{-\lfloor \frac{l(\mu)}{2} \rfloor + l(\mu)} \, h_{\nu\lambda^{(1)}}^{\mu^{(1)}} \, P_\mu^{(3)}$$

où la somme porte sur les partitions strictes ν, μ telles que $|\mu| = |\lambda|$, $\mu_{(\overline{3})} = \lambda_{(\overline{3})}$ et $\mu^{(0)} = \emptyset$.

Notre démonstration se décompose en plusieurs lemmes.

Lemme 1 *On a*

$$\overline{\Phi}_3(p_3(\mathcal{T})) = \mathbf{C} \otimes \mathcal{T}(X_0 + 2X_1).$$

Soit $\mathbf{J}$ l'idéal de $\mathcal{B}_{\overline{3}}$ engendré par les $f \in \mathcal{T}(X_0 + 2X_1)$ sans terme constant. On montre que $\overline{\Phi}_3$ est compatible avec la multiplication par des éléments de $p_3(\mathcal{T})$, ce qui entraîne que ${\overline{\Phi}_3}^{-1}(\mathbf{J}) = (p_3(\mathcal{T}))$. Il en résulte que pour $f, g \in \mathcal{T}$ on a

$$\rho^{(\overline{3})}(f) = \rho^{(\overline{3})}(g) \Leftrightarrow f \equiv g \text{ mod } {\overline{\Phi}_3}^{-1}(\mathbf{J}) \Leftrightarrow \overline{\Phi}_3(f) \equiv \overline{\Phi}_3(g) \text{ mod } \mathbf{J} \,. \qquad (22)$$

Il nous suffit donc de montrer les deux lemmes suivants.

Lemme 2 *Soit $\lambda \in \mathcal{SP}$. On a*

$$\overline{\Phi}_3(P_\lambda) \quad \equiv \quad N(\lambda) \, \epsilon_{\overline{3}}(\lambda) \, (-2)^{|\lambda^{(0)}|} \sum_{\nu,\mu} \frac{\epsilon_{\overline{3}}(\mu)}{N(\mu)} \, h_{\nu\lambda^{(1)}}^{\mu^{(1)}} \, \overline{\Phi}_3(P_\mu) \text{ mod } \mathbf{J} \qquad (23)$$

où $\nu, \mu \in \mathcal{SP}$ et μ est telle que $|\mu| = |\lambda|$, $\mu_{(\overline{3})} = \lambda_{(\overline{3})}$, et $\mu^{(0)} = \emptyset$.

La condition $\mu^{(0)} = \emptyset$ signifie que $\overline{\Phi}_3(P_\mu)$ est une fonction de X_1 seulement. La preuve de ce Lemme s'obtient en utilisant l'identité

$$P_{\lambda^{(0)}}(X_0) = P_{\lambda^{(0)}}((X_0 + 2X_1) - 2X_1) \equiv P_{\lambda^{(0)}}(-2X_1) \quad \mod \mathbf{J}\,.$$

Lemme 3 *Soient $\lambda, \mu \in \mathcal{SP}$ telles que $|\lambda| = |\mu|$ et $\lambda_{(\overline{3})} = \mu_{(\overline{3})}$. On a alors*

$$\frac{\lceil l(\lambda) - l(\lambda^{(0)}) \rceil}{2} + p(\lambda) + |\lambda^{(0)}| = \frac{\lceil l(\mu) - l(\mu^{(0)}) \rceil}{2} + p(\mu) + |\mu^{(0)}|$$

où $p(\lambda)$ est défini par (3).

Le théorème est alors prouvé. □

Pour l'illustrer nous pouvons calculer $P^{(3)}_{(6,2)}$. On a

$$\begin{aligned}\overline{\Phi}_3(P_{(6,2)}) &= -q^{-1} \otimes P_{(2)}(X_0) \\ &\equiv -q^{-1} \otimes P_{(2)}(-2X_1) \mod \mathbf{J} \\ &\equiv -q^{-1} \otimes (4s_2(X_1) + 4s_{11}(X_1)) \mod \mathbf{J}\,.\end{aligned}$$

On applique ensuite $\overline{\Phi}_3^{\,-1}$ et on obtient:

$$P^{(3)}_{(6,2)} = 2P^{(3)}_{(5,2,1)} - P^{(3)}_{(8)}.$$

References

[1] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa, *Transformation groups for soliton equations IV. A new hierarchy of soliton equations of* KP*-type*, Physica D **4** (1982), 343-365.

[2] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa, *Transformation groups for soliton equations. Euclidean Lie algebras and reduction of the* KP *hierarchy*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **18**, (1982), 1077-1110.

[3] P. Hoffman, J. F. Humphreys, *Projective representations of symmetric groups*, Oxford 1992.

[4] P. D. Jarvis, C. M. Yung, *Combinatorial description of the Fock representation of the affine Lie algebra* go_∞, Lett. Math. Phys. **30** (1994), 45-52.

[5] T. Józefiak, *Schur Q-functions and applications*, Proc. Hyderabad Conf. on algebraic Groups, S. Ramanan ed., Manoj Prakashan (1991), 205-224.

[6] V. G. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, 3rd edition, Cambridge 1990.

[7] V. G. Kac, D. A. Kazhdan, J. Lepowsky, R.L. Wilson, *Realization of the basic representations of the Euclidean Lie algebras*, Adv. Math. **42** (1981), 83-112.

[8] S. Leidwanger, *Basic representations of $A^{(1)}_{n-1}$ and $A^{(2)}_{2n}$ and the combinatorics of partitions*, preprint 1997.

[9] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, 2nd edition, Oxford 1995.

[10] A. O. Morris, A. K. Yaseen, *Some combinatorial results involving shifted Young diagrams*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **99** (1986).

[11] T. Nakajima, H.F. Yamada, *On reduced Q-functions*, Hiroshima Math. J., **27**, (1997), p 407-414.

[12] J. B. Olsson, *Combinatorics and representations of finite groups*, Vorlesungen aus dem Fachbereich Mathematik der Universitat GH Essen Heft **20**, (1993).