Équation de Composition en Genre Quelconque

DIDIER ARQUÈS, JEAN-FRANÇOIS BÉRAUD
{arques,beraud}@univ-mlv.fr
Institut Gaspard Monge, Université de Marne la Vallée
5, boulevard Descartes, Champs sur Marne, 77454 Marne la Vallée Cedex 2, France

Abstract
This article presents a study of rooted maps of any genus, by an approach based on a topological decomposition. Several topological operations are presented: the multiple rooting of a face, the opening of a vertex by inserting maps of any genus, and the most complex operation called the extracting of the sketch (and the topological connecting plan) of a given map. They enable us to obtain a new functional equation for the generating genus series of rooted maps, with respect to the number of edges and the genus. At last, an algorithm enumerating sketches of maps with the same topological connecting plan, allows us to propose a new conjecture.

Résumé
Cet article présente une étude des cartes pointées de genre quelconque par une approche fondée sur une décomposition topologique. Plusieurs opérations topologiques : pointage multiple d'une face, ouverture d'un sommet par insertion de cartes de genre quelconque, et la plus complexe, l'extraction du schéma d'une carte et de son plan de raccordement, sont présentées. Elles permettent d'obtenir une équation fonctionnelle nouvelle sur la série génératrice des cartes de genre quelconque énumérées par le nombre d'arêtes et le genre. Enfin, un algorithme d'énumération des schémas de cartes possédant le même plan topologique de raccordement est donné et nous permet de proposer une nouvelle conjecture.

1. INTRODUCTION

L'étude combinatoire des cartes a été initiée par W. Tutte, dont les premiers articles sur le sujet datent de 1962. De façon synthétique ce domaine de la combinatoire fait l'objet aujourd'hui de plusieurs approches :

1. L'approche topologique est certainement la plus développée et consiste à réaliser une opération topologique sur les cartes, opération qui se traduit par une équation fonctionnelle dont l'unique solution est la série génératrice des cartes étudiées et dont la résolution permet d'énumérer ces cartes. Les travaux réalisés dans ce cadre sont nombreux, comme par exemple [1, 2, 3, 4, 5, 8, 18].
2. L'approche bijective consiste à mettre en bijection la famille de cartes étudiées avec une autre famille d'objets pour lesquels on dispose de méthodes adaptées. C'est l'approche développée en particulier par R. Cori et B. Vauquelin (cf. [13]).
3. L'approche algébrique est récente et a été développée par I. Goulden et D. Jackson (cf. par exemple [14]). Une carte pointée pouvant être vue comme un couple de permutations agissant transitivement sur l'ensemble des brins, cette approche consiste à appliquer les méthodes de la combinatoire algébrique du groupe symétrique dans ce cadre.

Cet article se situe dans le cadre de l'approche topologique. Les premiers travaux, dus à W. Tutte, concernent les cartes planaires soumises à une opération topologique simple. La série génératrice des cartes planaires pointées $T_{0,1}(v,z)$ (où 0 représente le genre, 1 le nombre de brins pointés, le degré de v correspond au degré du sommet pointé et celui de z au nombre d'arêtes) est solution de l'équation fonctionnelle (1), liée à l'opération topologique de contraction de l'arête pointée (cf. [18]). Cette équation, si elle est simple, est assez complexe à résoudre mais permet d'obtenir une énumération directe des cartes planaires pointées en fonction du nombre d'arêtes.

$$T_{0,1} = 1 + v^2 z T_{0,1}{}^2 + vz\frac{vT_{0,1} - T_{0,1}(1,z)}{v-1} \qquad (1)$$

Cette équation est généralisable simplement aux genres supérieurs, i.e. aux cartes dessinables sur un tore à plusieurs trous. C'est ce que font T. Walsh et A. Lehman dans [19]. Elle est également généralisable aux surfaces non orientables, dont le plan projectif et la bouteille de Klein forment la base (cf. [1, 9, 10]).

L'approche bijective consiste à établir une bijection entre la famille des cartes que l'on désire étudier et une autre famille d'objets que l'on sait dénombrer. R. Cori et B. Vauquelin mettent en bijection les cartes planaires pointées avec les arbres bien étiquetés (cf. [13]). Dans le cadre de cette méthode, D. Arquès met en évidence dans l'énumération la présence d'un arbre infini, qui se contient lui-même à deux niveaux (cf. [6]). Cette remarque montre qu'il existe une autre équation fonctionnelle que (1), incluant une composition de fonctions (à la place de la fraction qui apparaît dans (1) et traduisant cette inclusion à plusieurs niveaux). Cette nouvelle équation, appelée "équation de composition" apparaît dans [5] pour les cartes planaires :

$$T_{0,1} = 1 + u^2 z T_{0,1}{}^2 + \frac{uzT_{0,1}}{1-uzT_{0,1}} T_{0,1}\left(\frac{1}{1-uzT_{0,1}}, z\right) \qquad (2)$$

L'équation (2) trouve immédiatement une application puisqu'elle permet, en combinaison avec l'équation (1) de Tutte, d'obtenir trivialement l'énumération des cartes planaires pointées. D. Arquès et I. Jacques généralisent cette équation au genre 1, mais la nouvelle équation ne permet plus, de manière évidente, de simplifier l'énumération de ces cartes (cf. [4]). En revanche, elle met en valeur et permet de mieux comprendre la grande richesse topologique interne des cartes de genre 1. Les méthodes utilisées dans ces articles [5, 4] ne permettent pas de façon immédiate une généralisation de ces équations à d'autres familles de cartes, en particulier de genres supérieurs. Une première généralisation de cette méthode est faite dans [2] pour des cartes de genre fixé. Nous introduisons ici une nouvelle opération topologique, celle d'extraction du schéma d'une carte de genre quelconque, qui permet de dériver pour les cartes orientables de genre quelconque, une généralisation de l'équation de composition.

Dans un premier temps, nous rappelons les notions de base de la théorie des cartes et nous posons quelques notations. Ensuite, nous présentons les opérations topologiques de pointage multiple d'une face, d'ouverture des p sommets pointés d'une carte p-pointée, et d'extraction du schéma de carte dans notre cadre de travail. Dans une troisième partie, nous déduisons de ces opérations topologiques une nouvelle équation dont la série génératrice des cartes pointées de genre quelconque est solution. Enfin, nous présentons succinctement un algorithme nous permettant d'énumérer des schémas de cartes possédant le même plan topologique de raccordement et nous en déduisons une conjecture.

2. DÉFINITIONS

Nous rappelons ici succinctement les quelques définitions nécessaires à la compréhension de l'article. Se reporter à [16] pour des définitions plus détaillées sur les surfaces, et à [7] pour approfondir la notion de carte combinatoire.

2.1 Carte topologique

- On appelle *carte topologique* C sur une surface orientable Σ de $\mathbb{R}^3$ une partition de Σ en trois ensembles finis de *cellules* :
  i. L'ensemble des sommets de C qui est un ensemble fini de points ;
  ii. L'ensemble des arêtes de C qui est un ensemble fini d'arcs simples ouverts de Jordan, deux à deux disjoints, dont les extrémités sont des sommets ;
  iii. L'ensemble des faces de C qui sont des domaines simplement connexes dont la frontière, pour chaque face, est une réunion de sommets et d'arêtes.
- Le *genre de la carte* C est le genre de la surface Σ. Le genre de la surface Σ est le nombre de trous du tore qui la représente. Une carte de genre 0, c'est-à-dire dessinée sur la sphère de $\mathbb{R}^3$, est dite planaire.
- Deux cellules sont dites *incidentes* si l'une est dans la frontière de l'autre.
- Le *degré d'un sommet* est le nombre d'arêtes qui lui sont incidentes (une boucle, arête dont les extrémités sont confondues, est comptée pour deux dans le degré de son extrémité. Le *degré d'une face* est le nombre d'arêtes qui lui sont incidentes, un isthme (arête incidente des deux côtés à une seule face) étant compté deux fois.

2.2 Carte pointée

On appelle *brin* une arête orientée de la carte et on note B leur ensemble. On note usuellement deux brins opposés par i et -i, où $i \in \{1,...,n\}$, n étant le nombre d'arêtes de la carte. On associe à tout brin, de façon évidente, son sommet initial, son sommet final, et l'arête qui constitue son support.

Une carte est *pointée* si un brin $\tilde{b}$ est choisi. Le brin $\tilde{b}$ est appelé brin pointé de la carte, et son sommet initial $\tilde{s}$ est appelé le sommet pointé de la carte.

On appelle alors *face extérieure* de la carte, la face incidente à droite du brin pointé $\tilde{b}$. La carte planaire réduite à un sommet est également dite pointée bien qu'elle ne contienne aucun brin.

On peut ainsi pointer p brins, de faces à droite ou de sommets initiaux tous différents (selon le contexte). La carte est alors dite p-pointée.

Deux cartes p-pointées de même genre sont dites isomorphes s'il existe un homéomorphisme de la surface associée, préservant son orientation, appliquant les sommets, arêtes, faces et brins pointés de la première carte respectivement sur ceux de la seconde, en conservant l'ordre des brins pointées.

Une *classe d'isomorphie* dans l'ensemble des cartes p-pointées de genre quelconque sera encore appelée carte p-pointée dans la suite.

2.3 Définition combinatoire d'une carte pointée

Nous introduisons ici quelques notations qui seront utiles dans la suite et qui constituent une définition combinatoire associée à la définition topologique précédente.

- On définit la permutation α sur B qui à tout brin b associe son brin opposé. α est une involution sans point fixe dont les cycles (de longueur 2 évidemment) sont bijectivement associés aux arêtes de la carte.
- On note σ la permutation sur B qui à tout brin b associe le premier brin rencontré en tournant autour du sommet initial de b dans le sens positif choisi sur la surface orientable. Par convention, le sens positif choisi sera le sens trigonométrique. Les cycles de σ sont bijectivement associés aux sommets de la carte.
- On note $\overline{\sigma}$ la permutation $\sigma \circ \alpha$ sur B. Les cycles de $\overline{\sigma}$ sont les circuits orientés constituant les frontières des faces topologiques de la carte. Les cycles de $\overline{\sigma}$ sont donc bijectivement associés aux faces de la carte.

Dans la suite, un sommet (respectivement arête, face) sera, selon le contexte, soit l'objet topologique, soit le cycle pour σ (respectivement α, $\overline{\sigma}$) qui lui est associé par les définitions ci-dessus.

Le triplet (B,σ,α) constitue la *définition combinatoire* de la carte topologique C dont il est issu.

On note également $\lambda^*(b)$ le cycle pour une permutation λ engendré par b dans B (ainsi $\overline{\sigma}^*(b)$ sera la suite des brins constituant l'un des deux parcours orientés de la face incidente au brin b) ; si A est inclus dans B et si b est dans A, alors $\lambda_A(b)$ est le premier brin dans A parmi $\lambda(b)$, $\lambda^2(b)$...

Exemple. Sur la carte de la figure 1, les brins sont numérotés. Ainsi un brin $\tilde{b}$ est représenté par son numéro situé le long de son arête support, près de son sommet initial. On peut vérifier cette notation sur le brin pointé numéroté 1 et marqué par une flèche. Nous avons :

$$\alpha=(1,-1)(2,-2)(3,-3)(4,-4)(5,-5)(6,-6)(7,-7)$$
$$\sigma=(1,-4,5,-5)(-1,2,6)(-2,3,4,-3)(-6,7,-7)$$

Nous pouvons également déterminer les frontières orientées des faces de la carte :

$$\overline{\sigma}=(1,2,3,-2,6,7,-6,-1,-4,-3,4,5)(-5)(-7)$$

Dans la suite, un sommet (respectivement arête, face) sera, selon le contexte, soit l'objet topologique, soit le cycle pour σ (respectivement α, $\overline{\sigma}$) qui lui est associé par les définitions ci-dessus.

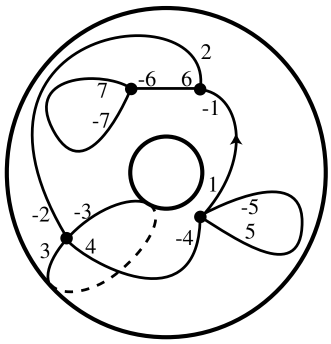

Figure 1 : Un exemple de carte pointée sur le tore.

2.4 Séries génératrices

Notation. $T_{p,n_1,\ldots,n_k}(u_1,\ldots,u_p,z,t)$ est la série génératrice des cartes pointée de genre quelconque, contenant p faces pointées distinctes. Les k ($\leq$ p) premières faces, numérotées i de 1 à k, sont pointées respectivement par au moins 1 brin et au plus n_i (>1) brins (non nécessairement distincts). Les autres (de k+1 à p), sont pointées par un seul brin. Le degré de u_i correspond au degré de la i-ème face pointée, celui de z au nombre d'arêtes de la carte, celui de t au genre de la carte.

Par exemple, la série $T_{2,2,2}(u_1,u_2,z,t)$ énumère la famille des cartes à deux faces distinctes pointées, chacune étant pointée par un à deux brins, alors que la série $T_2(u_1,u_2,z,t)$ énumère la famille des cartes à deux faces distinctes pointées, chacune par un unique brin. On peut remarquer que si chaque face est pointée par un unique brin, cette écriture se simplifie naturellement en $T_p(u_1,\ldots,u_p,z,t)$, c'est-à-dire la série génératrice des cartes p-pointées.

3. OPÉRATIONS TOPOLOGIQUES

La richesse des opérations topologiques sur les cartes se traduit par une grande richesse d'équations. Sauf pour le genre 0 (cf. [5]), la résolution des équations de genre quelconque, qui permet l'obtention de formules closes pour l'énumération des cartes, se fait par des méthodes purement analytiques et complexes (cf. [1, 3, 7, 8, 11]). Cette mise en évidence d'une nouvelle équation pourrait permettre d'obtenir des preuves combinatoires de ces formules.

Nous décrivons dans la suite de ce paragraphe plusieurs opérations, dont certaines touchent le cœur même de la structure des cartes étudiées, opérations dont la combinaison permettra d'obtenir une nouvelle équation.

3.1 Opération de pointage multiple d'une face

La proposition 1 exprime la série génératrice des cartes contenant p faces pointées distinctes, les k premières étant multiplement pointées (c'est-à-dire pointées respectivement par au moins 1 brin et au plus n_i brins non nécessairement distincts) en fonction des séries génératrices des cartes p-pointées, au travers d'une expression simple reliant $T_{p,n_1,\dots,n_k}(u_1,\dots,u_p,z,t)$ à $T_p(u_1,\dots,u_p,z,t)$. La preuve de cette proposition se fonde sur une interprétation du pointage d'un brin d'une face en terme de "secteurs angulaires de raccrochage possibles" :

Remarque préliminaire : *Interprétation du pointage d'un brin d'une face.*
Dans les opérations topologiques présentées dans la suite de cet article, un brin pointé servira de repère pour "raccrocher une autre carte" à son extrémité initiale, selon la figure 2.

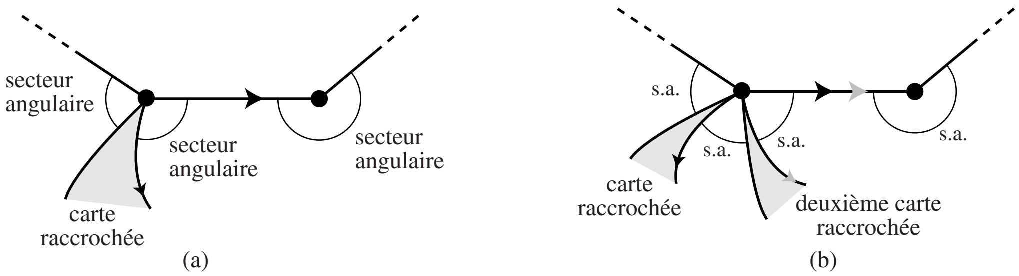

Figure 2 : Le pointage vu en tant que création d'un secteur angulaire.

Proposition 1. La série génératrice $T_{p,n_1,\dots,n_k}(u_1,\dots,u_p,z,t)$ se déduit de la série génératrice $T_p(u_1,\dots,u_p,z,t)$ par l'équation suivante :

$$\prod_{j=1}^{k} u_j^{n_j}.T_{p,n_1,\dots,n_k}(u_1,\dots,u_p,z,t) = \left\{\prod_{i=1}^{k} \frac{1}{(n_i-1)!}\left(u_i^2 \frac{\partial}{\partial u_i}\right)^{n_i-1}\right\}\left[\prod_{j=1}^{k} u_j.T_p(u_1,\dots,u_p,z,t)\right] \qquad (3)$$

Preuve. Non détaillée dans ce résumé.

3.2 Opération locale d'ouverture d'un ou plusieurs sommets

L'opération décrite ci-dessous est une opération locale et en ce sens indépendante du genre. Cette opération a été introduite pour les genres 0 et 1 (et pour un unique sommet) dans [4, 5]. Nous en proposons ici une version pour les cartes multiplement pointées orientables de genre quelconque.

Notations et définitions

- Soit X_p une famille de cartes p-pointées de genre quelconque. On note $X_{p,r_1,\dots,r_p}$ la sous-famille des cartes p-pointées de X_p dont les sommets pointés ont pour degrés respectifs $r_1, r_2, \dots, r_p$ ($X_{1,0}$ étant soit vide, soit constituée de la carte réduite à un sommet si celle-ci appartient à X_1). Pour une carte de $X_{p,r_1,\dots,r_p}$ de brins pointés $(b_i)_{i=1..p}$ et de sommets pointés $(s_i)_{i=1..p}$, on définit les suites de brins ($d_{i,1}=b_i$, ..., d_{i,r_i}) issus des s_i , à partir du brin pointé $d_{i,1}=b_i$ dans le sens contraire du sens positif (cf. figure 4).
- On considère enfin la famille I des cartes pointées de genre quelconque dont le brin pointé $\tilde{b}$ est un isthme et le sommet pointé est de degré 1 (après reconstruction ci-dessous, cet isthme sera incident d'un seul côté à la face extérieure, et fera donc apparaître un terme u dans la série génératrice des cartes de la famille Y_p).

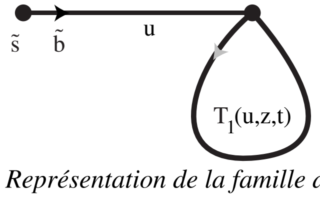

Figure 3 : Représentation de la famille de cartes I.

Opération d'ouverture d'un sommet. L'*opération d'ouverture* du sommet pointé s_i ($1 \le i \le p$) d'une carte de X_p (cf. figure 4), consiste à créer un nouveau sommet s_i^*, à insérer entre les extrémités initiales de $d_{i,j}$ et $d_{i,j+1}$ (pour $1 \le j < r_i - 1$), et entre l'extrémité initiale de d_{1,r_i} et s_i^*, une suite finie (éventuellement vide, c'est-à-dire réduite à un sommet) de cartes de I, et enfin insérer entre s_i^* et l'extrémité initiale de $d_{i,1}$ une suite non vide d'éléments de I dont le brin pointé de la première carte de I insérée sera le brin pointé b_i^* (issu de s_i^*) de cette nouvelle carte.

On note I^+ l'ensemble $\sum_{k\geq 1} I^k$, et I^* l'ensemble $\{p\}+\sum_{k\geq 1} I^k$ (où {p} est la carte réduite à un sommet). On note Y_p la famille des cartes obtenues par l'opération d'ouverture des p sommets pointés des cartes p-pointées de la famille X_p.

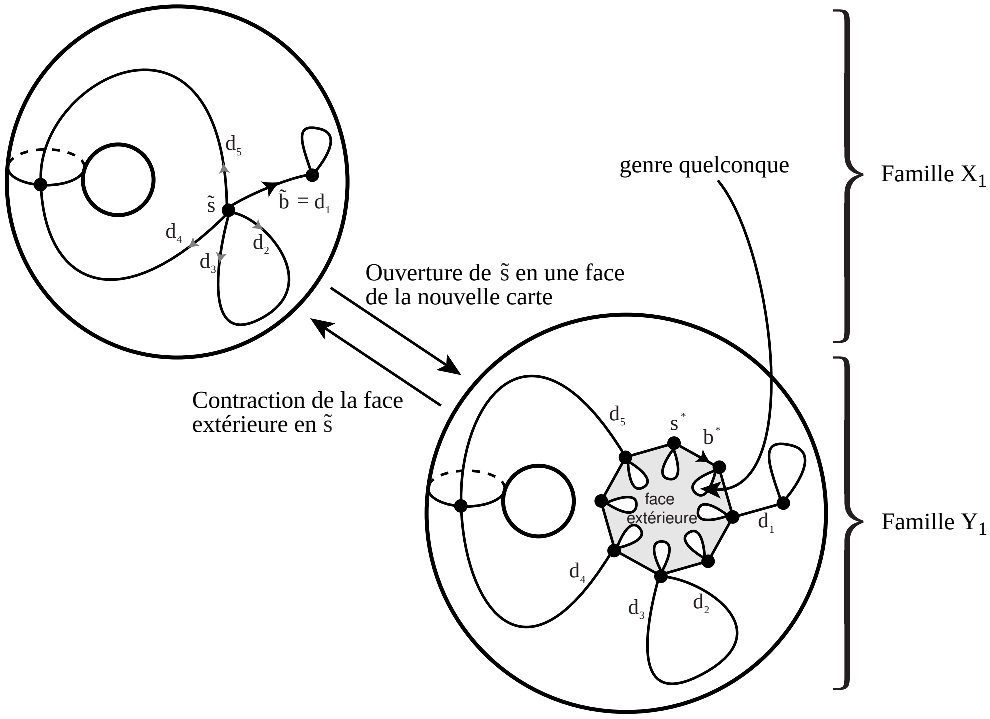

Figure 4 : Opérations inverses d'ouverture du sommet pointé et de contraction de la face extérieure (indiquée en grisé).

Proposition 2.

1. L'opération d'ouverture des p sommets pointés est associée à la bijection suivante :

$$Y_p \leftrightarrow \left(I^+\right)^p \times \sum_{r_1,\ldots,r_p\geq 0} \prod_{1\leq i\leq p} \left(I^*\right)^{r_i} \times X_{p,r_1,\ldots r_p}$$

2. Si X_p=T_p est la famille des cartes p-pointées, Y_p est la sous-famille des cartes p-pointées dont les p brins pointés ne sont pas des isthmes, et dont les frontières des faces pointées n'ont deux à deux aucun sommet en commun et sont chacune contractible en un sommet sur la surface.
3. Si $X_p(v_1,\ldots, v_p,z,t)$ est la série génératrice de la famille X_p de cartes p-pointées (le degré de v_i donnant le degré du $i^{\text{ième}}$ sommet pointé, celui de z donnant le nombre d'arêtes) et $Y_p(u_1,\ldots,u_p,z,t)$ est la série génératrice de la famille Y_p de cartes (le degré de u_i donnant le degré de la $i^{\text{ième}}$ face pointée rouverte, celui de z donnant le nombre d'arêtes), on a l'égalité fonctionnelle suivante :

$$Y_p(u_1,\ldots,u_p,z,t) = \prod_{i=1}^{p} \frac{u_i z T_1(u_i,z,t)}{1-u_i z T_1(u_i,z,t)} X_p\left(\left(\frac{1}{1-u_j z T_1(u_j,z,t)}\right)_{1\leq j\leq p}, z, t\right) \tag{4}$$

Preuve. Généralisation de celles présentées dans [2, 4, 5], non détaillée dans ce résumé.

3.3 Opération d'extraction du schéma de carte

Le schéma d'une carte dont l'extraction est décrite ci-dessous contient "l'essentiel" de la forme d'une carte et de la manière dont elle "s'enroule" autour des trous de la surface sur laquelle elle est dessinée. À partir d'un schéma de carte on reconstruira toutes les cartes admettant ce schéma en "rouvrant les sommets et les arêtes" du schéma. On obtient ainsi une classification des cartes en fonction de leur schéma associé. Chaque schéma de carte correspond à un terme de l'équation fonctionnelle associée à cette classification et donne le théorème 1 (§ 4). La reconstruction des cartes à partir d'un schéma par réouverture se traduira au niveau série génératrice par des compositions de termes dont le premier correspondra au schéma et le second aux cartes utilisées pour la réouverture.

Un cas particulier très simple de schéma de carte est la notion de polygone frontière apparaissant dans l'obtention des derniers termes de l'équation de composition ([5, eq. 2], et [4]). Cette notion de polygone frontière n'est plus suffisante lorsque l'on étudie les cartes pointées de genre supérieur à 1. Plusieurs polygones apparaissent dans ces genres supérieurs (deux polygones apparaissent déjà dans [4] pour le genre 1). La bonne notion à introduire, qui simplifie les cartes étudiées, est celle de *schéma de carte* qui en définit parfaitement la structure et permet ainsi de les classifier.

3.3.1 Extraction du schéma d'une carte

Considérons une carte simplement pointée C, dont l'arête support du brin pointé $\tilde{b}$ n'est pas un isthme. L'extraction du schéma $\mathcal{S}$(C) de la carte C se fait selon les étapes suivantes (cf. figure 5) :

1. On supprime les arêtes non incidentes à la face extérieure (face en grisé, figure 5.a). On obtient ainsi une nouvelle carte C_1, incluse dans la frontière extérieure de C. On note encore dans la suite α, σ, $\overline{\sigma}$ les permutations α_{C_1}, σ_{C_1}, $\overline{\sigma}_{C_1}$, de C restreintes à C_1.
   En réalité, C_1 n'est pas nécessairement une carte au sens de la définition du §2.2. En effet en supprimant des arêtes dans C, certaines faces de C_1 ne sont plus simplement connexes (seule la face extérieure, constituée du cycle $\overline{\sigma}^*(\tilde{b})$, reste sûrement simplement connexe car elle n'est pas modifiée par l'opération précédente). On s'intéresse tout particulièrement à l'une des faces de C_1, que l'on appelle *face intérieure* et qui est la face (en blanc, figure 5.b) incidente à $\overline{\alpha}(\tilde{b})$ dans C_1. Cette face n'étant pas nécessairement simplement connexe, le parcours orienté de sa frontière est constitué d'un ensemble non vide de cycles de $\overline{\sigma}$. Les brins constituant ces cycles ont à leur gauche la face extérieure (car toutes les arêtes de C_1 sont incidentes d'un côté au moins à la face extérieure) et à leur droite la face intérieure (par définition du parcours orienté de la face intérieure).
   Pour chacun de ces cycles $(b_1,...,b_k)$, on construit le cycle $(\alpha(b_k),...,\alpha(b_1))$, c'est-à-dire le cycle des brins de C_1 tournant dans "l'autre sens". Chaque tel cycle est appelé *polygone orienté* (ou plus simplement *"polygone"* dans la suite) P_i ($1\leq i\leq p$), ces polygones étant numérotés dans l'ordre dans lequel on les rencontre pour la première fois dans C en parcourant la face extérieure de la carte C par $\overline{\sigma}$ à partir du brin pointé $\tilde{b}$.

2. On considère les composantes connexes constituées de brins de C_1 dont les arêtes supports sont non incidentes à la face intérieure de C_1 (et donc n'appartiennent pas aux polygones) et on supprime dans C_1 celles qui ont un seul sommet commun avec l'ensemble des polygones P_i ($1\leq i\leq p$). On appelle *brins extérieurs* les brins (non sur les polygones) qui restent après cette opération et on note $\mathcal{E}$ leur ensemble. On obtient ainsi une nouvelle carte C_2 (figure 5.c), incluse dans la frontière extérieure de C_1.
   La frontière extérieure de C_2 est constituée successivement :
   - de sous-suites minimales non vides de brins de P_i ($1\leq i\leq p$) commençant et finissant en un sommet commun avec un brin de $\mathcal{E}$;
   - de sous-suites maximales non vides de brins extérieurs de $\mathcal{E}$ joignant deux sommets différents de $(P_i)_{i=1..p}$.

3. Construction du schéma de carte $\mathcal{S}$(C) de C
   On remplace à présent dans C_2 chaque sous-suite par une arête unique, topologiquement "proche", plongée à son côté dans la face extérieure, et joignant les deux sommets de P_i et P_j (i et j sont éventuellement égaux, les sommets éventuellement confondus), extrémités de la sous-suite. Les polygones $(P_i)_{i=1..p}$ sont ainsi remplacés par des polygones $(P_i')_{i=1..p}$. L'arête remplaçant la sous-suite minimale de brins de P_1 contenant le brin pointé est naturellement pointée de façon compatible (ayant la face extérieure à sa droite). Les arêtes substituées aux sous-suites de brins de $\mathcal{E}$ délimitent en dehors de la face extérieure des portions de surface (en blanc sur la figure 5.d).
   Ces portions de surface sont non nécessairement simplement connexes, possédant éventuellement plusieurs bords (cf. figure 7). On appelle *sous-carte extérieure* l'ensemble des brins de C qui ont conduit dans $\mathcal{S}$(C) à un ensemble de brins de $\mathcal{E}$ (appelé *sous-carte extérieure réduite* associée à la précédente) délimitant une telle portion de surface. On note $(E_j)_{1\leq j\leq k}$, ces sous-cartes extérieures numérotées dans l'ordre où on les rencontre pour la première fois lors du parcours de la face extérieure de C à partir de son brin pointé, et $(E_j')_{1\leq j\leq k}$, les sous-cartes extérieures réduites associées dans $\mathcal{S}$(C).

Définition. Les polygones $(P_i')_{i=1..p}$ et les sous-cartes extérieures réduites $(E_j')_{1\leq j\leq k}$ ainsi que leur plan topologique de raccordement noté dans la suite $\mathcal{P}$(C), constituent globalement *le schéma de carte* $\mathcal{S}$(C) de la carte C.

Exemple

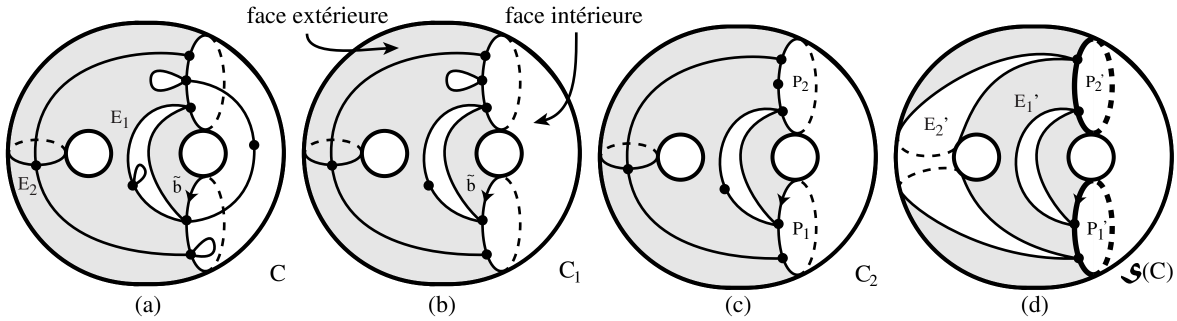

Figure 5 : Étapes de la construction d'un schéma de carte $\mathcal{S}$(C) d'une carte C. Cet exemple est celui d'une carte sur une surface de genre 2 dont le schéma de carte possède deux polygones et deux sous-cartes extérieures.

3.3.2 Traduction en termes de séries génératrices

Le schéma de carte $\mathcal{S}$(C) est un objet constitué d'un certain nombre d'éléments décrivant totalement la carte C. Plus précisément, des descriptions des polygones, des sous-cartes extérieures, et le plan topologique de raccordement qui décrit comment se raccrochent les sous-cartes extérieures aux polygones.

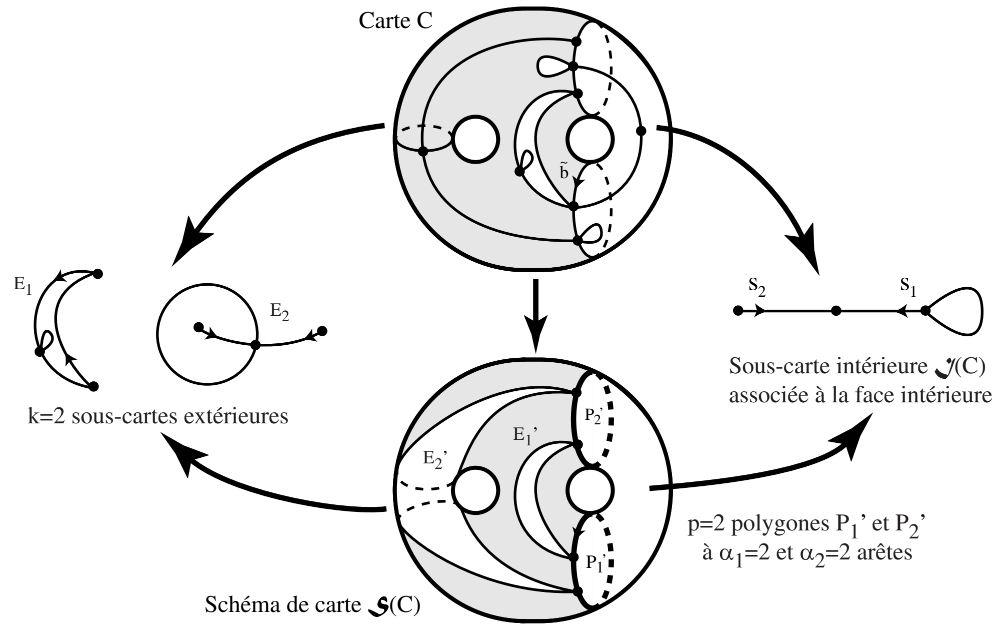

Figure 6 : Décomposition complète de la carte C de la figure 5 en un schéma de carte, une sous-carte intérieure $\mathcal{I}$(C), deux sous-cartes extérieures et quelques éléments quantitatifs.

Nous allons maintenant devoir reconstruire (c'est-à-dire déterminer son terme dans l'équation fonctionnelle) la carte C initiale à partir de son schéma de carte $\mathcal{S}$(C) :

- La face intérieure est la face dont le bord est constitué par l'ensemble des p polygones $P_1^{'}$, ..., $P_p^{'}$. Dans la carte initiale C, cette face intérieure est naturellement associée à la sous-carte $\mathcal{I}$(C) obtenue à partir de la carte C (cf. figure 5) en coupant la surface (ici le tore à deux trous) le long des circuits P_i ($1 \le i \le p$), en ne conservant que la partie de la surface (et les brins de C qui y sont inclus) constituée de la face intérieure de C_1 dessinée sur une surface à trous (en supprimant le reste de la surface), dont les bords sont les P_i et enfin en contractant chacun des polygones P_i en un point s_i. On obtient une nouvelle surface compacte sans bord, sur laquelle est dessinée la carte appelée *sous-carte intérieure* $\mathcal{I}$(C) de C. La carte $\mathcal{I}$(C) est multiplement pointée (sont pointés tous les sommets issus de la contraction des polygones P_i, par la règle du §3.2). Afin de pouvoir reconstruire la carte C, il nous faut donc pointer sur chaque polygone P_i ($1 \le i \le p$), les brins, sans ordre, $(b_1, \cdots, b_{\alpha_i})$ pointant sur les α_i sommets communs au polygone P_i et aux sous-cartes extérieures. Pour P_1, le premier brin pointé est arbitraire car c'est celui de la carte C. Pour les autres polygones, le premier brin pointé sera le premier du polygone rencontré lors du parcours de la face extérieure de C et pointant sur un sommet commun.

Réaliser l'opération inverse permet facilement d'obtenir la série génératrice de ces cartes. Cette opération consiste, à partir d'une carte p-pointée $\mathcal{J}(C)$, à rouvrir les p sommets pointés distincts par l'opération décrite au §3.2 d'insertion de suites finies de cartes de I, avec la différence que certains sommets finaux de ces polygones ne portent pas de cartes de genre quelconque car devant rester "libres" pour accueillir le raccrochement ultérieur des sous-cartes extérieures :

- Sauf pour le premier polygone dont le brin pointé est celui de la carte C, les autres polygones P_i ($2\le i\le p$) ont pour premier brin pointé le premier brin rencontré lors du parcours de la face extérieure de C et pointant sur un sommet "libre", commun avec une sous-carte extérieure. Cela conduit à supprimer pour $2\le i\le p$, un terme $T_1(u_i,z,t)$ dans l'expression précédemment donnée de la série génératrice $Y_p(u_1,\dots,u_p,z,t)$ d'une carte obtenue par réouverture des sommets d'une carte p-pointée. Ces cartes ont ainsi pour série génératrice $\tilde{Y}_p(u_1,\dots,u_p,z,t)$ donnée par la formule (5) modifiée de (4) :

$$\tilde{Y}_p(u_1,\dots,u_p,z,t) = u_1 z T_1(u_1,z,t)\prod_{i=1}^{p}\frac{1}{1-u_i z T_1(u_i,z,t)}\, X_p\left(\left(\frac{1}{1-u_j z T_1(u_j,z,t)}\right)_{1\le j\le p}, z, t\right) \qquad (5)$$

- Il reste, pour pouvoir raccrocher les sous-cartes extérieures, à libérer α_1 emplacements, sans ordre, sur le polygone P_1 et (α_i-1) emplacements, sans ordre, sur chaque polygone P_i ($2\le i\le p$). Cette opération se traduit par une dérivation multiple de $\tilde{Y}_p(u_1,\dots,u_p,z,t)$ et donne la série génératrice $Q_{\mathcal{J}}$:

$$Q_{\mathcal{J}}(u_1,\dots,u_p,z,t) = \frac{1}{\alpha_1!}\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial T_1(u_1,z,t)^{\alpha_1}}\prod_{2\le i\le p}\left(\frac{1}{(\alpha_i-1)!}\frac{\partial^{(\alpha_i-1)}}{\partial T_1(u_i,z,t)^{(\alpha_i-1)}}\right)\left(\tilde{Y}_p(u_1,\dots,u_p,z,t)_{|X_p=T_p}\right) \qquad (6)$$

  où dans la notation $\dfrac{\partial \tilde{Y}_p}{\partial T_1(u_i,z,t)}$, $T_1(u_i,z,p)$ est considérée comme une variable par rapport à laquelle on dérive.

  Cette libération d'emplacements après réouverture crée ainsi une sous-carte $\mathcal{J}^*(C)$ pointée d'origine par $\tilde{b}$, puis par *a* pointages constitués de α_i pointages pour chaque polygone P_i ($1\le i\le p$).
  Il reste à raccrocher les sous-cartes extérieures aux sommets ainsi libérés qui deviendront alors des sommets communs aux polygones et aux sous-cartes extérieures.

- Les faces (en blanc figure 5.d) autres que les faces intérieure et extérieure de $\mathcal{S}(C)$ et reliant les polygones ou faisant le tour des anses sont les sous-cartes extérieures réduites $(E_j')_{1\le j\le k}$ naturellement associées aux sous-cartes extérieures $(E_j)_{1\le j\le k}$ et numérotées dans l'ordre où on les rencontre pour la première fois lors du parcours de la face extérieure de C à partir du brin pointé $\tilde{b}$.
  Pour reconstruire la carte C à partir de la sous-carte $\mathcal{J}^*(C)$ et des sous-cartes extérieures $(E_j)_{1\le j\le k}$, il faut raccrocher selon le plan topologique de raccordement $\mathcal{P}(C)$, ces sous-cartes extérieures aux emplacements laissés libres sur les polygones créés lors de la réouverture des sommets de la sous-carte intérieure. En fait, pour la même raison que la sous-carte intérieure n'est plus simplement connexe (après suppression des brins de la carte C qui ne sont pas incidents à la face extérieure), il peut en être de même pour les sous-cartes extérieures (cf. figure 7). On notera φ_j le nombre de "faces" de E_j (numérotées de 1 à φ_j dans l'ordre où on les rencontre pour la première fois lors du parcours de la face extérieure de C).
  Vont se raccrocher à la $r^{\text{ième}}$ face ($1\le r\le\varphi_j$) de E_j, un nombre de brins des polygones $(P_i)_{1\le i\le p}$ égal au nombre $n_{j,r}$ d'arêtes de cette $r^{\text{ième}}$ face ($1\le r\le\varphi_j$) de E_j'. Selon la remarque "*Interprétation du pointage d'un brin d'une face*" du §3.1, raccrocher $n_{j,r}$ ($n_{j,r}>1$) brins des polygones $(P_i)_{1\le i\le p}$ à cette face revient à la pointer multiplement au plus $n_{j,r}$ fois. Le premier brin pointé parmi ces $n_{j,r}$ brins sera le premier rencontré lors du parcours de la face extérieure de C. Les suivants sont numérotés dans l'ordre où on les rencontre dans le parcours intérieur de la face.
  De cette façon on pointe au maximum $\displaystyle\sum_{j=1}^{k}\sum_{r=1}^{\varphi_j} n_{j,r}$ brins sur l'ensemble des faces $(f_{j,r})_{(1\le j\le k),(1\le r\le\varphi_j)}$ des sous-cartes extérieures $(E_j)_{1\le j\le k}$ et au moins deux brins sur chaque E_j (évident, car chaque sous-carte extérieure est accrochée à au moins deux sommets de $(P_i)_{i=1..p}$ et est donc pointée au moins deux fois).
  On a la relation évidente $\displaystyle\sum_{j=1}^{k}\sum_{r=1}^{\varphi_j} n_{j,r} = a = s_c$, car *a* est le nombre global de côtés des polygones $(P_i')_{i=1..p}$ et donc également le nombre s_c des sommets communs aux polygones et aux sous-cartes extérieures, en nombre global identique aux arêtes des faces des sous-cartes extérieures réduites $(E_j')_{1\le j\le k}$ décomptées par la double somme.

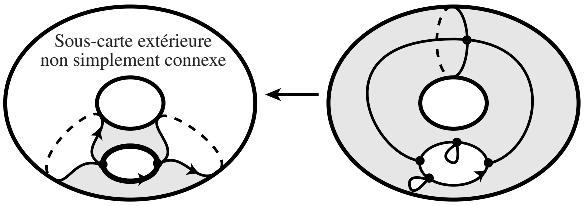

Figure 7 : Exemple d'une carte dessinée sur le tore et admettant une sous-carte extérieure dont la frontière est constituée de deux faces simplement pointées.

Par le §3.1, la série génératrice de cet ensemble de sous-cartes extérieures est donc :

$$\prod_{j=1}^{k} T_{\varphi_j, n_{j,1},\ldots,n_{j,\varphi_j}}(u_1,\ldots,u_{\varphi_j}, z, t) \qquad (7)$$

que l'on peut évaluer avec la proposition 1 du §3.1.

Remarques

1. Dans le cas où il n'y a pas de sous-cartes extérieures, on pose k=0, et la série génératrice de l'ensemble (vide) des sous-cartes extérieures est alors égale à 1.
2. Les figures présentées dans cet article sont "génériques". Elles ne présentent pas explicitement les cas limites (qui sont cependant pris en compte dans les formules), comme par exemple celui d'une sous-carte extérieure réduite à un sommet ou d'une sous-carte extérieure qui se raccroche par un même sommet à deux polygones différents. Ces configurations impliquent l'apparition d'un sommet appelé *sommet multiple* (confusion de deux ou plus sommets communs) comme le montre la figure 8.

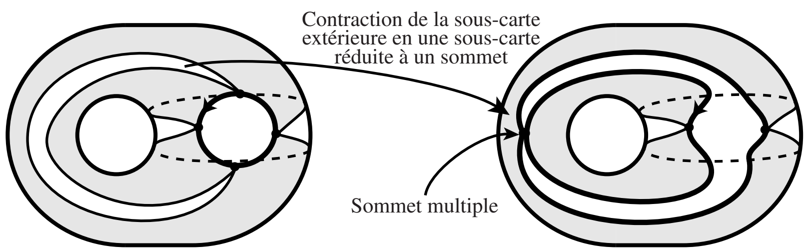

Figure 8 : Exemple d'un schéma de carte (à gauche), et d'un des ses cas dégénérés (à droite), contenant un sommet multiple (Cas d'une sous-carte extérieure réduite à un sommet).

Le cas des sommets multiples n'est donc que le cas particulier du cas où l'on n'a que des sommets communs non multiples. La suite de la classification présentera des exemples non dégénérés, étant entendu que les cas dégénérés sont naturellement inclus dans les séries génératrices écrites.

Définition. On appelle schéma de la carte C le n-uplet $\mathcal{S}(C)=(\mathcal{P}(C) \mid p, (\alpha_i)_{i=1..p} \mid k, [\varphi_j, (n_{j,1}, \ldots, n_{j,\varphi_j})]_{j=1\ldots k})$ où :

- $\mathcal{P}(C)$ est le plan topologique de raccordement des sous-cartes extérieures sur les polygones de la sous-carte intérieure rouverte, qui permet également d'obtenir les indications suivantes, en clair dans le n-uplet :
- le nombre p de polygones $(P_i')_{i=1\ldots p}$, avec les nombres $(\alpha_i)_{i=1\ldots p}$ de sommets de ces polygones communs aux sous-cartes extérieures ;
- le nombre k de sous-cartes extérieures $(E_j')_{1\le j\le k}$ et pour chacune d'elles (éventuellement non simplement connexe), le nombre φ_j de ses faces et les multiples pointages $(n_{j,1}, \ldots, n_{j,\varphi_j})$ de celles-ci.

Proposition 4. Soit un schéma de carte $\mathcal{S}=(\mathcal{P} \mid p, (\alpha_i)_{i=1..p} \mid k, [\varphi_j, (n_{j,1}, \ldots, n_{j,\varphi_j})]_{j=1\ldots k})$. La série génératrice $Q_{\mathcal{S}}$ des cartes (énumérées en fonction du degré de la face extérieure, variable u, du nombre d'arêtes, variable z, et du genre, variable t) admettant ce schéma est :

$$Q_{\mathcal{S}}(u,z,t)=\prod_{j=1}^{k} T_{\varphi_j, n_{j,1},\ldots,n_{j,\varphi_j}}(u,\ldots,u,z,t)\times Q_{\mathcal{J}}(u_1,\ldots,u_p,z,t)\Big|_{u_1=\ldots=u_p=u} \qquad (8)$$

où $T_{\varphi_j, n_{j,1},\ldots,n_{j,\varphi_j}}$ a été défini dans (3) et $Q_{\mathcal{J}}$ dans (6).

Preuve. Cette série génératrice est le produit des séries génératrices de la sous-carte intérieure et des sous-cartes extérieures, dont les expressions ont été données dans les paragraphes précédents.

Remarque. Deux schémas de cartes $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ qui ne diffèrent que par leurs plans topologiques de raccordement ont des séries génératrices identiques : $Q_{\mathcal{S}_1}(u,z,t)=Q_{\mathcal{S}_2}(u,z,t)$. Un exemple de tels schémas de cartes qui ne diffèrent que par leurs plans topologiques de raccordement est donné figure 9. Dans l'équation de composition donnée au théorème 1, ces schémas de cartes donnant lieu au même terme peuvent être regroupés pour faire apparaître ce terme multiplié par un coefficient entier énumérant le nombre de schémas de cartes ($\mathcal{P}$ | p, $(\alpha_i)_{i=1..p}$ | k, $[\varphi_j, (n_{j,1}, \ldots, n_{j,\varphi_j})]_{j=1\ldots k}$) qui ne diffèrent que par $\mathcal{P}$.

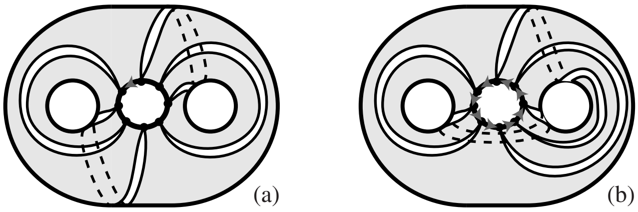

Figure 9 : Exemple de 9 schémas de cartes qui ne diffèrent que par leurs plans topologiques de raccordement (1 pointage possible pour (a), 8 pour (b)). Il en existe en 49 au total de ce type, non donnés ici.

Ces valeurs entières, correspondant à des cartes ne différant que par leurs plans topologiques de raccordement, sont intéressantes à déterminer de façon automatique. L'exemple de la figure 9 est celui des monopoles à une face étudiés par T. Walsh et A. Lehman dans [19]. Le nombre de ces cartes de genre g est $(4g)!/(2^{2g}(2g)!)$.

4. ÉQUATION DE COMPOSITION EN GENRE QUELCONQUE

On dit qu'un schéma de carte est dessinable sur une surface si et seulement si il peut être tracé sur la surface sans que ses arêtes se coupent, et tel qu'il forme une face intérieure, une face extérieure, ainsi qu'une face par sous-carte extérieure (les faces ne sont pas nécessairement connexes, à la différence du plongement). Un schéma de carte extrait d'une carte est dessinable sur une surface de genre inférieur ou égal à celui de la carte (cf. §3.3.1 point 2). Par contre, un schéma de carte $\mathcal{S}$, directement défini par son n-uplet ($\mathcal{P}$ | p, $(\alpha_i)_{i=1..p}$ | k, $[\varphi_j, (n_{j,1}, \ldots, n_{j,\varphi_j})]_{j=1\ldots k}$), n'est pas toujours dessinable sur une surface orientable ; il peut être dessiné sur une surface non orientable [2]. Pour savoir si oui ou non un schéma de carte est dessinable sur une surface orientable, nous introduisons la notion de genre d'un schéma de carte.

Définition. Le genre d'un schéma de carte $\mathcal{S}$ est le genre minimal de la surface sur laquelle peut être tracé le schéma de carte $\mathcal{S}$, i.e. le genre minimal d'une carte C admettant $\mathcal{S}$ pour schéma de carte.

Proposition 5. Soit $\mathcal{S}$=($\mathcal{P}$ | p, $(\alpha_i)_{i=1..p}$ | k, $[\varphi_j, (n_{j,1}, \ldots, n_{j,\varphi_j})]_{j=1\ldots k}$) un schéma de carte. Le genre $g_{\mathcal{S}}$ de $\mathcal{S}$ est défini par :

$$g_{\mathcal{S}} = \frac{1}{2}\left(p + a + \varphi - 1\right) - k \tag{9}$$

où $a = \sum_{1\le i\le p} \alpha_i$ est le nombre total d'arêtes sur l'ensemble des p polygones, et $\varphi = \sum_{j=1}^{k} \varphi_j$ est le nombre cumulé de faces sur l'ensemble des sous-cartes extérieures. $g_{\mathcal{S}}$ ne dépend que de (p, $(\alpha_i)_{i=1..p}$ | k, $[\varphi_j, (n_{j,1}, \ldots, n_{j,\varphi_j})]_{j=1\ldots k}$), c'est-à-dire de $(P_i')_{i=1..p}$ et $(E_j')_{j=1..k}$, et est indépendant de la manière de les raccorder, autrement dit du plan topologique de raccordement $\mathcal{P}$.

Preuve. La formule du genre d'un schéma de carte $\mathcal{S}$, autrement dit le nombre minimal de trous bouchés par $\mathcal{S}$, est formée des trois contributions suivantes :

1. Le positionnement des polygones $(P_i)_{i=1..p}$ de la sous-carte rouverte $\mathcal{F}^*(C)$ d'une carte C de schéma $\mathcal{S}$, bouche des trous : chaque polygone, à partir du deuxième, bouche un demi-trou. On en déduit le terme (p-1)/2.
2. De même, à partir de la deuxième, chacune des φ_j faces de la sous-carte extérieure pointée E_j bouche un demi-trou, d'où le terme $\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}(\varphi_j - 1) = \frac{1}{2}(\sum_{j=1}^{k}\varphi_j - k) = \frac{\varphi - k}{2}$.
3. L'ensemble des raccrochages d'une sous-carte extérieure E_j sur l'ensemble des polygones de $\mathcal{F}^*(C)$ va lui aussi boucher des trous. En effet, à partir du deuxième, chaque raccrochage d'un sommet pointé d'une des φ_j faces de E_j

à un emplacement libre de $\mathcal{J}^*(C)$ bouche un demi-trou. On en déduit le terme cumulé pour l'ensemble des k sous-cartes extérieures $\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{r=1}^{\varphi_j} n_{j,r}-1\right)=\frac{a-k}{2}$, compte tenu de l'égalité $\sum_{j=1}^{k}\sum_{r=1}^{\varphi_j} n_{j,r}=a$ prouvée un peu plus haut dans cette partie.

Remarque. Un schéma de carte $\mathcal{S}=(\mathcal{P} \mid p, (\alpha_i)_{i=1..p} \mid k, [\varphi_j, (n_{j,1}, \ldots, n_{j,\varphi_j})]_{j=1\ldots k})$ est dessinable sur une surface orientable Σ si et seulement si son genre $g_{\mathcal{S}}$ est un entier naturel, égal au genre de Σ. Si $g_{\mathcal{S}}$ est un demi entier, le schéma $\mathcal{S}$ est lié à une carte sur une surface non orientable.

Exemple. Prenons l'exemple des schémas de cartes de la figure 9. On a p=1, a=8, φ=4, k=4. On en déduit $g_{\mathcal{S}}$=(1+8+4-1)/2-4=2. Les schémas de cartes de la figure 9 se dessinent bien sur un tore à deux trous.

Nous disposons désormais de tous les éléments nous permettant d'écrire le théorème suivant :
Théorème 1. La série génératrice des cartes de genre quelconque simplement pointées $T_1(u,z,t)$ est solution de l'équation (10)—dite équation de composition :

$$T_1(u,z,t)=1+u^2zT_1(u,z,t)^2+u^2ztT_2(u,u,z,t)+\sum_{\mathcal{S}\in\theta}Q_{\mathcal{S}}(u,z,t) \tag{10}$$

où θ est l'ensemble infini des schémas de cartes dont le genre est un entier naturel, et où

$$\begin{cases} Q_{\mathcal{S}}(u,z,t)=\prod_{j=1}^{k}T_{\varphi_j,n_{j,1},\ldots,n_{j,\varphi_j}}(u,\ldots,u,z,t)\times Q_{\mathcal{J}}(u_1,\ldots,u_p,z,t)\Big|_{u_1=\ldots=u_p=u} \\ Q_{\mathcal{J}}(u_1,\ldots,u_p,z,t)=\dfrac{1}{\alpha_1!}\dfrac{\partial^{\alpha_1}}{\partial T_1(u_1,z,t)^{\alpha_1}}\prod_{2\le i\le p}\left(\dfrac{1}{(\alpha_i-1)!}\dfrac{\partial^{(\alpha_i-1)}}{\partial T_1(u_i,z,t)^{(\alpha_i-1)}}\right)\left(\tilde{Y}_p(u_1,\ldots,u_p,z,t)\Big|_{X_p=T_p}\right) \\ \tilde{Y}_p(u_1,\ldots,u_p,z,t)=u_1zT_1(u_1,z,t)\prod_{i=1}^{p}\dfrac{1}{1-u_izT_1(u_i,z,t)}X_p\left(\left(\dfrac{1}{1-u_jzT_1(u_j,z,t)}\right)_{1\le j\le p},z,t\right) \end{cases}$$

Preuve. Le premier terme (1) du second membre de l'équation de composition (10) est la série génératrice de la carte pointée réduite à un sommet. Les deux termes suivants correspondent aux cas où l'arête pointée est un isthme, et sont obtenus de manière très simple par l'opération topologique de suppression de l'arête pointée (comme dans l'équation de Tutte, cf. [7]). Le quatrième et dernier terme correspond au cas où l'arête pointée n'est pas un isthme, par l'opération topologique d'extraction du schéma de carte : il se déduit directement des propositions 4 (pour le terme correspondant à un schéma de carte) et 6 (pour l'ensemble de sommation).

Corollaire. La série génératrice $T_1(u,z,t)$ est solution de l'équation (11) :

$$T_1(u,z,t)=1+u^2zT_1(u,z,t)^2+u^2ztT_2(u,u,z,t)+\sum_{\mathcal{R}\in\Omega}C_{\mathcal{R}}.Q_{\mathcal{R}}(u,z,t) \tag{11}$$

où $\mathcal{R}=(\bullet \mid p, (\alpha_i)_{i=1..p} \mid k, [\varphi_j, (n_{j,1}, \ldots, n_{j,\varphi_j})]_{j=1\ldots k})$ est un schéma de carte privé de son plan topologique de raccordement, c'est-à-dire un ensemble de sous-cartes extérieures et de polygones ; on appelle schéma de carte non organisé un tel objet. Si $\mathcal{S}$ est un schéma de carte quelconque obtenu à partir d'un schéma de carte non organisé $\mathcal{R}$ en lui associant un plan topologique, alors on note $Q_{\mathcal{R}}(u,z,t)=Q_{\mathcal{S}}(u,z,t)$ (définition consistante car deux schémas de cartes ne différant que par leur plan topologique de raccordement ont la même série génératrice). Ω est l'ensemble des schémas de cartes non organisés tels que le genre de leurs schémas associés soit un entier naturel. Enfin, $C_{\mathcal{R}}$ est le nombre de schémas de cartes que l'on peut obtenir à partir d'un schéma non organisé $\mathcal{R}$, autrement dit le nombre de schémas de cartes—de schéma non organisé $\mathcal{R}$—ne différant que par leurs plans topologiques de raccordement.

5. ALGORITHME ET CONJECTURE

Il est intéressant de générer l'ensemble des schémas de cartes associés à un schéma de carte non organisé. Les cardinaux de ces ensembles sont en particulier les coefficients $C_{\mathcal{R}}$ apparaissant dans l'équation (11). Dans cette optique, nous avons implémenté un algorithme d'énumération de ces schémas de cartes, dont nous donnons ici les grands principes :

- Dans une première étape, nous obtenons l'ensemble des manières potentielles de raccorder les sous-cartes extérieures aux polygones : nous codons un plan topologique de raccordement par une permutation, composée des mélanges des permutations composant les sous-cartes extérieures, elles-mêmes composées des mélanges des permutations de leurs faces. Nous construisons toutes les permutations possibles.

- Dans la seconde étape, nous ne conservons parmi cet ensemble que les permutations formant un plan topologique de raccordement valide, i.e. qui forme un schéma de carte : nous avons défini un parcours du plan topologique de raccordement qui est complet si et seulement si le plan topologique de raccordement forme un schéma de carte (non détaillé ici).

Cet algorithme nous ouvre de nouveaux problèmes combinatoires, comme par exemple la conjecture suivante :

Conjecture. Le nombre de schémas de cartes ne différant que par leurs plans topologiques de raccordement, avec un unique polygone et n sous-cartes extérieures à f faces simplement pointées est égal au nombre de partitions de l'ensemble {1,2,...,p.n} en ensembles de taille p.

6. CONCLUSION

Dans cet article, nous obtenons une nouvelle classification des cartes pointées de genre quelconque, se traduisant par l'équation de composition (10) dont la série génératrice des cartes pointées de genre quelconque est la solution. Nous utilisons en particulier une nouvelle opération topologique, celle d'extraction du schéma de carte d'une carte pointée C, qui met en évidence les particularités topologiques de la carte C. Cette opération peut être adaptée pour une utilisation dans d'autres contextes (cf. [2]).

Un algorithme qui nous permet de calculer le nombre de schémas de cartes ne différant que par leur plan topologique de raccordement œuvre à de nouveaux problèmes combinatoires, comme la conjecture du § 5.

7. BIBLIOGRAPHIE

[1] D. ARQUÈS et J.-F. BÉRAUD, Énumération des cartes pointées sur la bouteille de Klein, *Inform. Théor. Appl.*, **31** (1997), 385-409.

[2] D. ARQUÈS et J.-F. BÉRAUD, Le schéma de carte et ses applications, *Institut Gaspard Monge, Rapport Interne*, **24** (1997), soumis à *Theoret. Comput. Sci.*.

[3] D. ARQUÈS et A. GIORGETTI, Énumération des cartes pointées de genre quelconque en fonction des nombres de sommets et de faces, *Institut Gaspard Monge, Rapport Interne*, **21** (1997), soumis à *J. Combin. Theory Ser. B*.

[4] D. ARQUÈS et I. JACQUES, Classification des cartes pointées de genre 1 et relation fonctionnelle associée, *Theoret. Comput. Sci.*, **117** (1993), 45-65.

[5] D. ARQUÈS, Une relation fonctionnelle nouvelle sur les cartes planaires pointées, *J. Combin. Theory Ser. B*, **39** (1985), 27-42.

[6] D. ARQUÈS, Les hypercartes planaires sont des arbres très bien étiquetés, *Discrete Math.*, **58** (1986), 11-24.

[7] D. ARQUÈS, Relations fonctionnelles et dénombrement des cartes pointées sur le tore, *J. Combin. Theory Ser. B*, **43** (1987), 253-274.

[8] E. BENDER et E. CANFIELD, The number of rooted maps on an orientable surface, *J. Combin. Theory Ser. B*, **53** (1991), 293-299.

[9] E. BENDER et E. CANFIELD, The asymptotic number of rooted maps on a surface, *J. Combin. Theory Ser. A*, **43** (1986), 244-257.

[10] E. BENDER, E. CANFIELD et R. ROBINSON, The enumeration of maps on the torus and the projective plane, *Canad. Math. Bull.*, **31 (3)** (1988), 257-271.

[11] E. BENDER, E. CANFIELD et L. RICHMOND, The asymptotic number of rooted maps on a surface. II. Enumeration by vertices and faces, *J. Combin. Theory Ser. A*, **63** (1993), 318-329.

[12] R. CORI, Un code pour les graphes planaires et ses applications, *Astérisque, S.M.F.,* **27** (1975).

[13] R. CORI et B. VAUQUELIN, Planar maps are well labelled trees, *Canad. J. Math.*, **33 (5)** (1981), 1023-1042.

[14] I. P. GOULDEN et D. M. JACKSON, Maps in locally orientable surfaces, the double coset algebra, and zonal polynomials, *Canad. J. Math.*, **48 (3)** (1996), 569-584.

[15] D. M. JACKSON, The genus series for maps, *J. Pure Appl. Algebra*, **105** (1995), 293-297.

[16] W. S. MASSEY, Algebraic topology : an introduction, *Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag*, **56** (1977).

[17] M. MARCUS et B. VAUQUELIN, Un codage des cartes de genre quelconque, *FPSAC'95, France*, (1995), 399-415.

[18] W. T. TUTTE, On the enumeration of planar maps, *Bull. Amer. Math. Soc.,* **74** (1968), 64-74.

[19] T. R. S. WALSH et A. B. LEHMAN, Counting rooted maps by genus. I, *J. Combin. Theory Ser. B*, **13** (1972), 192-218.