Mots de piles, tableaux de Young standard, permutations à motifs exclus et cartes planaires

O. Guibert *

LaBRI, Université Bordeaux I
URA CNRS 1304
351, cours de la Libération, 33405 Talence cédex France
E-mail : guibert@labri.u-bordeaux.fr

Abstract

Stack-words [10] stem from stack-sortable permutation studies [16, 26, 28] and exhibit classical combinatorial objects such as standard Young tableaux, permutations with forbidden subsequences and planar maps.
We extend existing results on stack-word enumeration [7] and we also obtain new results. In particular, we make a correspondence between $3 \times n$ non separable standard Young tableaux (or stack-words where elements verify a "Hanoï tower condition") and inequivalent rooted trivalent planar maps of $2n$ vertices enumerated by $\frac{2^n.(3n)!}{(2n+1)!(n+1)!}$ [23]. These tableaux without two consecutive integers on a same row are in bijection with non separable rooted planar maps having $n+1$ edges enumerated by $\frac{2.(3n)!}{(2n+1)!(n+1)!}$ [24].

Résumé

L'étude des mots de piles [10] provient des travaux portant sur les permutations triables par pile [16, 26, 28] et fait apparaître des objets classiques en combinatoire tels que tableaux de Young standard, permutations à motifs exclus et cartes planaires.

Nous prolongeons des résultats existants sur l'énumération de certains mots de piles [7] et obtenons également de nouveaux résultats. En particulier, nous mettons en correspondance les tableaux de Young standard $3 \times n$ non séparables (ou mots de piles dont les éléments empilés vérifient une condition de type "tour de Hanoï") et les cartes planaires cubiques non séparables ayant $2n$ sommets au nombre de $\frac{2^n.(3n)!}{(2n+1)!(n+1)!}$ [23]. Ces mêmes tableaux, mais n'ayant pas deux entiers consécutifs sur une même ligne, sont en bijection avec les cartes planaires pointées non séparables ayant $n+1$ arêtes dénombrées par $\frac{2.(3n)!}{(2n+1)!(n+1)!}$ [24].

Introduction

D.E. Knuth [16] s'est intéressé aux permutations triables par passage dans une pile et les a caractérisées comme étant celles qui excluent le motif 231, c'est à dire ne comportant pas de sous-suite jki (j, k et i ne sont pas nécessairement consécutifs dans la permutation) avec $i < j < k$. Cet ensemble, noté $S_n(231)$, est parfois appelé ensemble des permutations de Catalan car énuméré par les nombres $\frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$. De manière générale, les permutations à motifs exclus ont donné lieu à de nombreux travaux [21, 26, 12, 10, 28, 29, 22, 13, 27, 5].

*Avec les soutiens PRC-Maths/Info et EC grant CHRX-CT93-0400.

Dans ce problème de tri, on constate immédiatement que la pile ne peut contenir à tout instant que des entiers allant en décroissant à partir du sommet de pile. Ainsi, dans un certain sens, la pile vérifie une condition dite "tour de Hanoï" par référence au problème du même nom.

Parmi les généralisations possibles du problème considéré par D.E. Knuth, J. West [26, 28] a étudié les permutations triables par plusieurs passages consécutifs dans une pile, celle-ci devant à tout instant obéir à la condition "tour de Hanoï", et plus précisément les permutations 2-triables (permutations triables par deux passages consécutifs dans une pile). Il les a caractérisées en termes de permutations à motifs exclus en montrant qu'il s'agissait des permutations de $S_n(2341, 3\bar{5}241)$ qui excluent simultanément les motifs 2341 et 3241, ce dernier étant toutefois autorisé lorsqu'il est lui-même sous-suite du motif 35241 dans la permutation. J. West a également conjecturé que ces permutations sur n éléments étaient au nombre de $\frac{2.(3n)!}{(2n+1)!(n+1)!}$.

D. Zeilberger [30] a été le premier à prouver cette conjecture tandis que d'autres auteurs en ont proposé une preuve combinatoire. Ainsi, S. Dulucq, S. Gire, O. Guibert et J. West [6, 5] exhibent une correspondance entre permutations 2-triables de $S_n(2341, 3\bar{5}241)$, permutations non séparables de $S_n(2413, 41\bar{3}52)$ et cartes planaires pointées non séparables ayant $n+1$ arêtes, ce qui conduit au résultat puisque W.T. Tutte [24] a montré que ces dernières étaient au nombre de $\frac{2.(3n)!}{(2n+1)!(n+1)!}$. De plus, ils donnent diverses formules correspondant aux distributions de ces permutations 2-triables suivant plusieurs paramètres. De même, I.P. Goulden et J. West [11] ont récemment établi une correspondance plus directe entre permutations 2-triables et cartes planaires pointées non séparables.

S. Gire [10] a étudié un problème voisin. Elle considère un ensemble de k piles placées en série et s'intéresse à leurs mouvements lorsque la permutation identité les traverse. Les mots du langage $\{f \in \{1, 2, \ldots, k+1\}^* : \forall i \in [k+1], |f|_i = n; \forall i \in [k], \forall f = f'f'', |f'|_i \geq |f'|_{i+1}\}$ codent exactement les mouvements des k piles lorsque la permutation $12\ldots n$ les traverse (voir figure 1) ainsi que les tableaux de Young standard rectangulaires de hauteur $k+1$ et de longueur n.

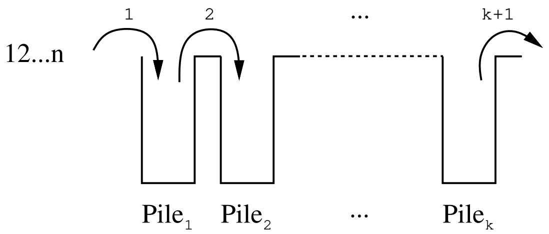

FIG. 1 - Mots de piles.

Le fait d'imposer certaines restrictions sur les piles (par exemple qu'elles vérifient la condition "tour de Hanoï") se traduit simplement par certaines restrictions sur ces tableaux de Young standard.

S. Gire s'est plus particulièrement intéressée à l'ensemble des mots de piles, c'est à dire au cas de deux piles ($k = 2$), et donc aux tableaux de Young standard rectangulaires $3 \times n$ au nombre de $\frac{2(3n)!}{(n+2)!(n+1)!n!}$ d'après la formule des équerres [9]. En particulier, elle a conjecturé les formules d'énumération de trois restrictions de l'ensemble des mots de piles.

S. Dulucq et O. Guibert [7] ont démontré deux de ces conjectures. En effet, ils mettent en bijection les tableaux de Young standard $3 \times n$ n'ayant pas deux entiers consécutifs sur la deuxième ligne (ou mots de piles sans facteur 22) avec les couples d'arbres binaires complets ayant n sommets internes, et les tableaux de Young standard $3 \times n$ n'ayant pas deux entiers consécutifs sur une même ligne (ou mots de piles sans facteur 22, 11, 33) avec les permutations de Baxter [1] de

$S_n(25\overline{3}14, 41\overline{3}52)$. Pour cela, ils font intervenir une correspondance de R. Cori, S. Dulucq et X. Viennot [4].

Tout d'abord, nous prolongeons ce résultat de S. Dulucq et O. Guibert [7] et obtenons d'autres restrictions de l'ensemble des mots de piles dénombrés par le carré du $n^{ème}$ nombre de Catalan $\frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$ et par le $n^{ème}$ nombre de Baxter $\sum_{m=0}^{n-1} \frac{\binom{n+1}{m}.\binom{n+1}{m+1}.\binom{n+1}{m+2}}{\binom{n+1}{1}.\binom{n+1}{2}}$.

Ce travail constitue une première étape dans notre preuve de la troisième des conjectures de S. Gire sur les mots de piles. Nous mettons alors en correspondance les mots de piles vérifiant la condition “tour de Hanoï” codant les tableaux de Young standard $3 \times n$ non séparables et les cartes planaires cubiques non séparables ayant $2n$ sommets, cartes au nombre de $\frac{2^n.(3n)!}{(2n+1)!(n+1)!}$ d'après les travaux de W.T. Tutte [23]. Cette correspondance fait intervenir les permutations non séparables alternantes.

Or, S. Dulucq, S. Gire, O. Guibert et J. West [6, 5] ont déjà rencontrés les permutations non séparables, afin d'établir une correspondance entre permutations 2-triables et cartes planaires pointées non séparables. Nous retrouvons de nouveau ces permutations non séparables en considérant une quatrième restriction naturelle de l'ensemble des mots de piles codant les tableaux de Young standard $3 \times n$ non séparables n'ayant pas deux entiers consécutifs sur une même ligne et dont la formule d'énumération est alors $\frac{2.(3n)!}{(2n+1)!(n+1)!}$ [24].

Finalement, nous mettons en bijection une dernière restriction de l'ensemble des mots de piles avec les arbres ternaires complets.

La première partie de cet article est consacrée à la définition des divers objets que nous considérons et à l'énoncé des principaux résultats obtenus. Dans la deuxième partie, nous prolongeons les bijections de S. Dulucq et O. Guibert [7] et de R. Cori, S. Dulucq et X. Viennot [4] sur les tableaux de Young standard rectangulaires de hauteur 3. La troisième partie développe la correspondance entre tableaux de Young standard rectangulaires non séparables de hauteur 3 et cartes planaires cubiques non séparables.

Les preuves complètes de nos résultats, présentes dans [13], seront fournies dans la version définitive [14].

1 Résultats d'énumération de mots de piles

Nous définissons tout d'abord différentes classes d'arbres ainsi que plusieurs codages.

Le langage $P_{x,\overline{x}} = \{w \in \{x, \overline{x}\}^* : |w|_x = |w|_{\overline{x}}; \forall w = w'w'', |w'|_x \geq |w'|_{\overline{x}}\}$ désigne le langage des mots de parenthèses (ou mots de Dyck).

A_n désigne l'ensemble des arbres binaires complets ayant n sommets internes ($2n+1$ sommets dont $n+1$ feuilles) pour lesquels chaque sommet possède zéro ou deux fils. A_n est énuméré par le $n^{ème}$ nombre de Catalan $\frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$.

Un arbre 1-2 est un arbre dans lequel chaque sommet possède zéro, un ou deux fils.

Les codages préfixe et suffixe d'un arbre 1-2 [resp. arbre binaire complet] a possédant n arêtes par un mot de Motzkin [19] de $P_{x,\overline{x}} \sqcup\!\sqcup \{y\}^*$ [resp. mot de parenthèses de $P_{x,\overline{x}}$] de longueur n sont définis de la façon suivante.

$$préfixe(a) = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } a \text{ est une feuille} \\ y\ préfixe(arbre\_central(a)) & \text{si } a \text{ est un point simple} \\ x\ préfixe(arbre\_gauche(a))\ \overline{x}\ préfixe(arbre\_droit(a)) & \text{si } a \text{ est un point double} \end{cases}$$

$$suffixe(a) = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } a \text{ est une feuille} \\ suffixe(arbre\_central(a))\ y & \text{si } a \text{ est un point simple} \\ suffixe(arbre\_gauche(a))\ x\ suffixe(arbre\_droit(a))\ \overline{x} & \text{si } a \text{ est un point double} \end{cases}$$

Nous introduisons maintenant tous les ensembles des mots de piles que nous allons considérer.

Notons $\mathcal{A} = \{1, 2, 3\}$ l'alphabet des mots associés aux mouvements de deux piles.

$Y = \{f \in \mathcal{A}^* : |f|_1 = |f|_2 = |f|_3; \forall f = f'f'', |f'|_1 \geq |f'|_2 \geq |f'|_3\}$ désigne l'*ensemble des mots de piles*, c'est à dire le langage des mots codant les mouvements des piles correspondant aux tableaux de Young standard rectangulaires de hauteur 3. Posons $Y_n = \{f \in Y : |f| = 3n\}$.

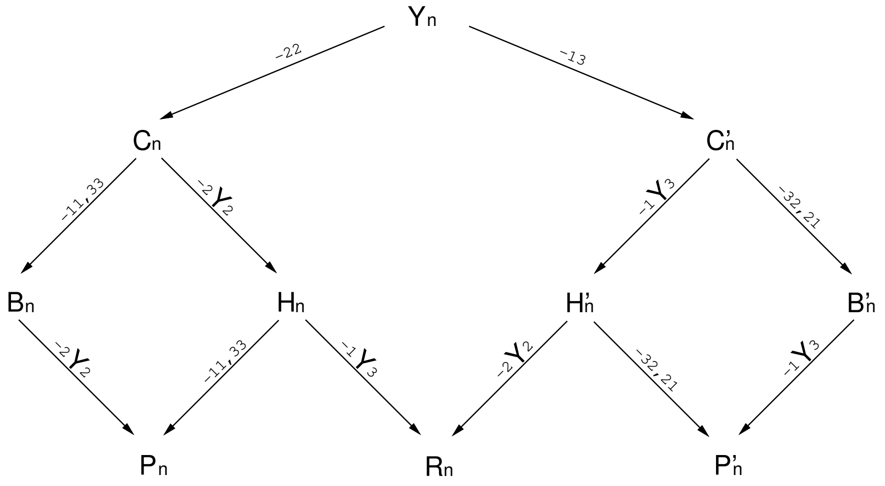

FIG. 2 - Schéma des restrictions sur le langage Y_n.

La figure 2 présente les différentes restrictions du langage Y_n auxquelles nous nous intéressons, faisant suite aux travaux de S. Gire [10] qui conjecturait les formules d'énumération des langages C_n, B_n et H_n. Dans cette figure, la notation -22 [resp. -2Y2] signifie que nous considérons les mots de piles ne comportant pas de facteur 22 [resp. $2g2$ où $g \in Y$].

Les langages C_n, B_n, H_n et P_n (restrictions des mots de piles sans facteur 22) apparaissant dans la partie gauche de la figure 2 correspondent à des restrictions naturelles sur les tableaux de Young standard $3 \times n$; par exemple, les mots du langage H_n (ensemble des mots de piles sans facteur $2g2$ où $g \in Y$, c'est à dire vérifiant la condition "tour de Hanoï") codent les *tableaux de Young standard rectangulaires non séparables de hauteur* 3 *et de longueur* n. Les langages C'_n, B'_n, H'_n et P'_n (restrictions des mots de piles sans facteur 13) apparaissant dans la partie droite de la figure 2 traduisent des restrictions sur une famille particulière d'arbres 1-2.

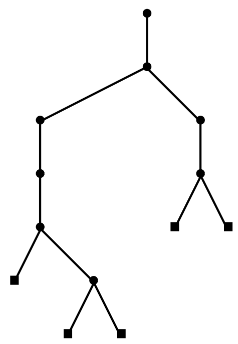

FIG. 3 - Un arbre 1-2 filiforme non séparable appartenant à $\overline{F}_4$.

Définition 1 *Un* arbre 1-2 filiforme non séparable *(voir figure 3) est un arbre 1-2 ayant autant de points simples que de points doubles et ne possédant aucun sommet fils unique racine d'un arbre*

1-2 filiforme non séparable.
Notons $\overline{F}_n$ l'ensemble des arbres 1-2 filiformes non séparables ayant n points simples.

Propriété 2 *Les arbres 1-2 filiformes non séparables vérifient qu'à tout instant du parcours préfixe, il y a au moins autant de points simples que de points doubles.*

Propriété 3 *Les mots du langage H'_n (ensemble des mots de piles sans facteur $1g3$ où $g \in Y$) sont les codages préfixes sur $P_{2,3} \sqcup \{1\}^*$ des arbres 1-2 filiformes non séparables de $\overline{F}_n$.*

Exemple 4 *Le mot* 121123233123 *de H'_4 code l'arbre 1-2 filiforme non séparable de $\overline{F}_4$ illustré par la figure 3.*

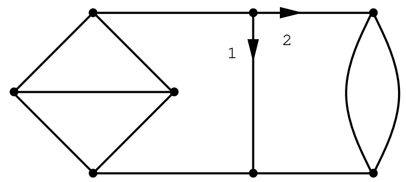

FIG. 4 - Une carte planaire cubique non séparable appartenant à CNS_8.

Considérons maintenant certaines cartes introduites et dénombrées par W.T. Tutte [23].

Définition 5 *Une* carte planaire cubique non séparable *(voir figure 4) est une carte planaire sans point d'articulation dont tous les sommets sont de degré trois et pour laquelle deux brins d'un même sommet sont distingués et ordonnés.*
Notons CNS_{2n} l'ensemble des cartes planaires cubiques non séparables ayant $2n$ sommets.

Nous présentons ci-dessous les résultats obtenus.

Théorème 6 *Les mots du langage H_n (ensemble des mots de piles sans facteur $2g2$ où $g \in Y$, c'est à dire vérifiant la condition "tour de Hanoï") codant les tableaux de Young standard rectangulaires non séparables de hauteur 3 et de longueur n sont en correspondance avec les mots du langage H'_n (ensemble des mots de piles sans facteur $1g3$ où $g \in Y$) codant les arbres 1-2 filiformes non séparables ayant n points simples, eux-mêmes en bijection avec les cartes planaires cubiques non séparables ayant $2n$ sommets de CNS_{2n}. Ils sont dénombrés [23] par*

$$|H_n| = |H'_n| = |CNS_{2n}| = \frac{2^n.(3n)!}{(2n+1)!(n+1)!}$$

De plus, cette correspondance met en bijection les mots f de H_n tels que $|f|_{11} = n_1, |f|_{33} = n_2, |f|_{13} = n_3$ et les mots f' de H'_n tels que $|f'|_{32} = n_1, |f'|_{21} = n_2, |f'|_{22} = n_3$.

Conjecture 7 *Les mots de $H_{n,m} = \{f \in H_n : |f|_{11} + |f|_{33} = m\}$ codant les tableaux de Young standard rectangulaires non séparables de hauteur 3 et de longueur n et possédant m couples d'entiers consécutifs sur les première et troisième lignes et les mots de $H'_{n,m} = \{f' \in H'_n : |f'|_{32} + |f'|_{21} = m\}$ codant les arbres 1-2 filiformes non séparables ayant n points simples et possédant m points doubles fils droits et points simples fils gauches sont au nombre de*

$$|H_{n,m}| = |H'_{n,m}| = \binom{n-1}{m} \frac{2.(3n)!}{(2n+1)!(n+1)!}$$

Théorème 8 *Les mots du langage P_n (ensemble des mots de piles sans facteur $2g2, 11, 33$ où $g \in Y$) codant les tableaux de Young standard rectangulaires non séparables de hauteur 3 et de longueur n n'ayant pas deux entiers consécutifs sur une même ligne sont en correspondance avec les mots du langage ${P'}_n$ (ensemble des mots de piles sans facteur $1g3, 32, 21$ où $g \in Y$) codant les arbres 1-2 filiformes non séparables ayant n points simples et ne possédant aucun point double fils droit ni aucun point simple fils gauche, et sont en bijection avec les cartes planaires pointées non séparables ayant $n+1$ arêtes de NS_{n+1}. Ils sont dénombrés [24] par*

$$|P_n| = |{P'}_n| = |NS_{n+1}| = \frac{2.(3n)!}{(2n+1)!(n+1)!}$$

Proposition 9 *Les tableaux de Young standard rectangulaires non séparables de hauteur 3 et de longueur n n'ayant pas deux entiers consécutifs sur une même ligne et possédant s couples d'entiers consécutifs situés sur les troisième et première lignes sont en correspondance avec les arbres 1-2 filiformes non séparables ayant n points simples ne possédant aucun point double fils droit ni aucun point simple fils gauche et ayant s points simples fils droits et sont en bijection avec les cartes planaires pointées non séparables ayant $n+1$ arêtes et s sommets. Ils sont dénombrés [2] par*

$$|\{f \in P_n : |f|_{31} = s\}| = |\{f' \in {P'}_n : |f'|_{31} = s\}| = |\{c \in NS_{n+1} : c \textit{ possède } s \textit{ sommets}\}| =$$

$$\frac{(2n-s-1)!(n+s)!}{(2n-2s-1)!(n-s)!(2s+1)!(s+1)!}$$

Les théorèmes 6 et 8 et la proposition 9 se déduisent de la correspondance présentée dans la partie 2 et spécialisée dans la partie 3 (preuves données page 11).

2 Tableaux de Young standard rectangulaires de hauteur 3

Proposition 10 *Les mots du langage C_n (ensemble des mots de piles sans facteur 22) sont en correspondance avec les mots du langage ${C'}_n$ (ensemble des mots de piles sans facteur 13). Ils sont dénombrés par*

$$|C_n| = |{C'}_n| = \left(\frac{(2n)!}{(n+1)!n!}\right)^2$$

De plus, cette correspondance met en bijection les mots f de C_n tels que $|f|_{11} = n_1, |f|_{33} = n_2, |f|_{13} = n_3$ et les mots f' de ${C'}_n$ tels que $|f'|_{32} = n_1, |f'|_{21} = n_2, |f'|_{22} = n_3$.

La figure 5 illustre cette correspondance entre C_n et ${C'}_n$ qui compose les bijections Φ [7], Υ [4], Ω et Λ, bijections que nous allons préciser maintenant et qui établissent la proposition 10 (preuve donnée page 8).

$M = \{\alpha \in P_{a,\overline{a}} \sqcup\!\sqcup\ P_{b,\overline{b}} : \forall \alpha = \alpha' b \alpha'', |\alpha'|_a > |\alpha'|_{\overline{a}}\}$ désigne le langage produit de mélange (ou shuffle) de deux langages de parenthèses. Posons $M_{2n} = \{\alpha \in M : |\alpha| = 2n\}$.

Lemme 11 *(S. Dulucq et O. Guibert [7]) Il existe une bijection Φ entre mots du produit de mélange de deux mots de parenthèses et mots de piles sans facteur 22. Celle-ci est donnée par le morphisme*

$$\begin{array}{cccc} \Phi & : & M_{2n} & \longrightarrow & C_n \\ & & \alpha & \longmapsto & f \end{array} \quad \textit{défini par} \left\{ \begin{array}{l} \Phi(a) = 1 \\ \Phi(b) = 21 \\ \Phi(\overline{a}) = 23 \\ \Phi(\overline{b}) = 3 \end{array} \right.$$

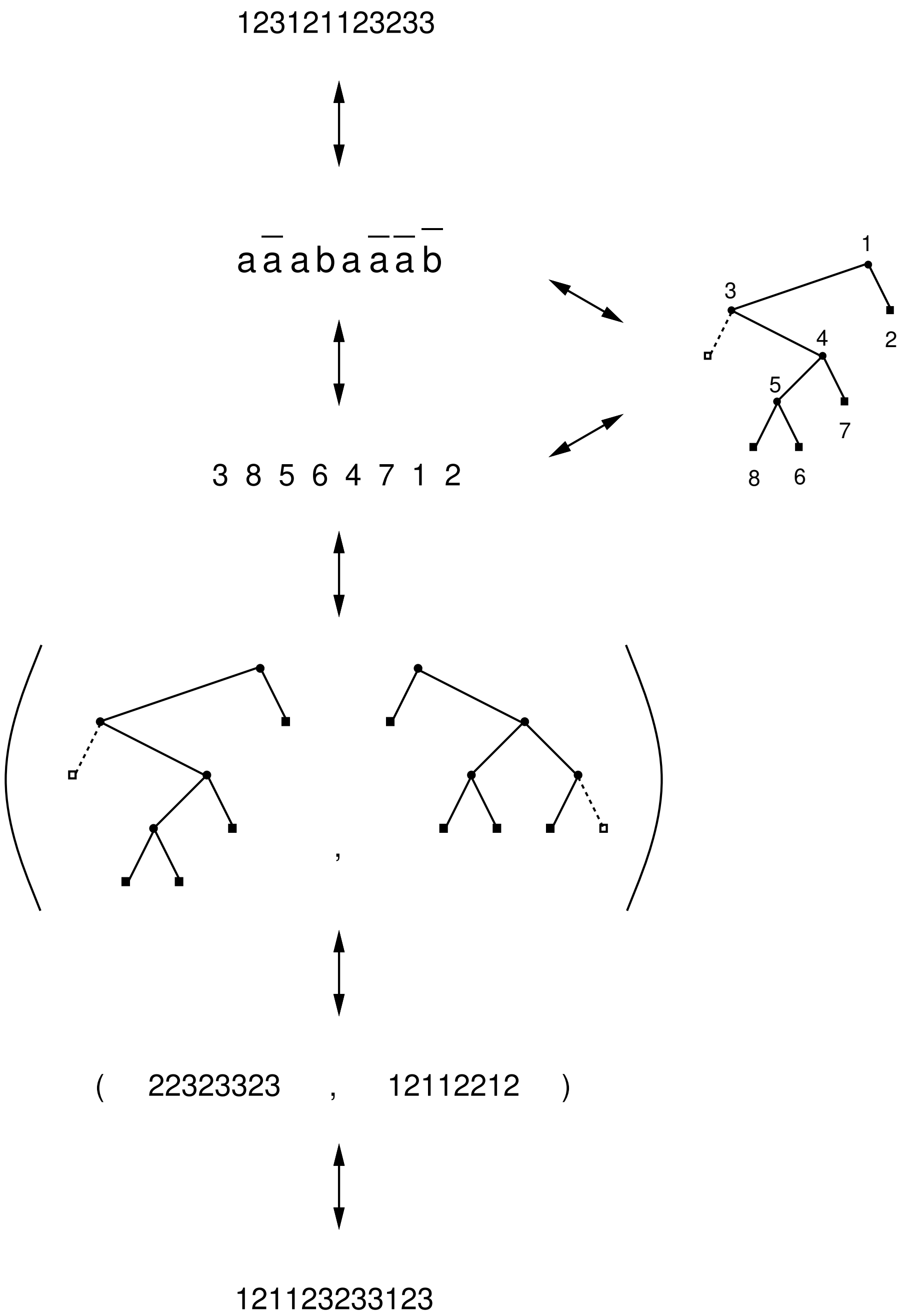

FIG. 5 - La correspondance entre un mot de piles sans facteur 22 et un mot de piles sans facteur 13.

Lemme 12 *(R. Cori, S. Dulucq et X. Viennot [4]) Il existe une bijection Υ entre mots du produit de mélange de mots de parenthèses, permutations de Baxter alternantes et couples d'arbres binaires complets de même taille.*

$$\begin{array}{cccccc} \Upsilon & : & M_{2n} & \longrightarrow & \widehat{S}_{2n}(25\overline{3}14, 41\overline{3}52) & \longrightarrow & A_n \times A_n \\ & & \alpha & \longmapsto & \pi & \longmapsto & (a_1, a_2) \end{array}$$

La première bijection, notée Υ_1, met en correspondance un mot du produit de mélange de mots de parenthèses α de M_{2n} et une permutation de Baxter alternante π de $\widehat{S}_{2n}(25\overline{3}14, 41\overline{3}52)$. Partant de l'arbre binaire complet réduit à trois sommets, c'est à dire deux feuilles libres et un sommet interne étiqueté 1, elle consiste en l'application séquentielle des opérateurs correspondant aux lettres $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{2n}$ du mot α. Ces opérateurs agissent sur un arbre binaire complet croissant de la manière suivante :
- opérateur a : étiqueter la feuille gauche libre la plus à droite et lui greffer deux arêtes,
- opérateur b : étiqueter la feuille droite libre la plus à gauche et lui greffer deux arêtes,
- opérateur $\overline{b}$: étiqueter la feuille gauche libre la plus à droite,
- opérateur $\overline{a}$: étiqueter la feuille droite libre la plus à gauche.

A l'issue de l'application des opérateurs, nous obtenons un arbre binaire complet croissant dont la projection infixe est la permutation π de $\widehat{S}_{2n}(25\overline{3}14, 41\overline{3}52)$.

La deuxième bijection, notée Υ_2, consiste à prendre respectivement les arbres binaires complets croissant et décroissant de la permutation de Baxter alternante π en oubliant leurs étiquetages.

Définition 13 *Nous désignons par Ω le codage [1] des couples d'arbres binaires complets de même taille par les couples de mots de parenthèses respectivement sur les alphabets $\{2,3\}$ et $\{1,2\}$. Ainsi,*

$$\begin{array}{cccc} \Omega & : & A_n \times A_n & \longrightarrow & P_{2,3} \times P_{1,2} \\ & & (a_1, a_2) & \longmapsto & (suffixe(a_1), préfixe(a_2)) \end{array}$$

Lemme 14 *Il existe une bijection Λ entre mots de piles sans facteur 13 et couples d'arbres binaires complets de même taille. Celle-ci est donnée par le morphisme*

$$\begin{array}{cccc} \Lambda & : & C'_n & \longrightarrow & P_{2,3} \times P_{1,2} \\ & & f' & \longmapsto & (a, b) \end{array} \quad \textit{défini par} \begin{cases} \Lambda(1) = (\varepsilon, 1) \\ \Lambda(2) = (2, 2) \\ \Lambda(3) = (3, \varepsilon) \end{cases}$$

Preuve Λ est clairement une application de C'_n vers $P_{2,3} \times P_{1,2}$ (codant $A_n \times A_n$).
Réciproquement, soit $(a, b) \in P_{2,3} \times P_{1,2}$ avec $|a| = |b| = 2n$. Alors, a et b se factorisent de manière unique en $a = 23^{k_1}23^{k_2}\ldots 23^{k_n}$ et $b = 1^{l_1}21^{l_2}2\ldots 1^{l_n}2$. Le mot $f' = 1^{l_1}23^{k_1}1^{l_2}23^{k_2}\ldots 1^{l_n}23^{k_n}$ appartient à C'_n et vérifie $\Lambda(f') = (a, b)$. □

Preuve de la proposition 10 La composition des bijections Φ, Υ, Ω et Λ met clairement en correspondance C_n et C'_n. De plus, cette correspondance transporte le nombre de facteurs $11, 12, 13, 21, 23, 31, 32, 33$ d'un mot de C_n respectivement en nombre de facteurs $32, 12, 22, 33, 23, 31, 11, 21$ d'un mot de C'_n (mais en transformant l'ordre d'apparition de chacun des facteurs). Remarquons que le nombre de facteurs $11, 33, 13$ [resp. $32, 21, 22$] de tout mot de C_n [resp. C'_n] détermine exactement le nombre de chacun des autres facteurs de longueur deux du mot. □

Corollaire 15
$|\{f \in C_n : |f|_{12} = i, |f|_{23} = j\}| = |\{f' \in C'_n : |f'|_{12} = i, |f'|_{23} = j\}| = \frac{1}{n^2}\binom{n}{i}\binom{n}{i-1}\binom{n}{j}\binom{n}{j-1}$.

Preuve Ce résultat se déduit de la proposition 10 et de la distribution des arbres binaires complets ayant n sommets et k feuilles droites (ou gauches) donnée par le nombre de Narayana $\frac{1}{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k-1}$ [20, 17]. En effet,

[1] Les codages préfixe et suffixe sont définis à la page 3.

le couple d'arbres binaires complets (a_1, a_2) de $A_n \times A_n$ en bijection avec f par Υ et Φ et avec f' par Ω et Λ est tel que a_1 possède j feuilles droites et a_2 possède i feuilles gauches. $\square$

Corollaire 16 $|B_n| = |B'_n| = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\binom{n+1}{m}\cdot\binom{n+1}{m+1}\cdot\binom{n+1}{m+2}}{\binom{n+1}{1}\cdot\binom{n+1}{2}}$.

Preuve Ce résultat se déduit du théorème 2 de [7] et de la proposition 10. $\square$

Corollaire 17 $|\{f \in B_n : |f|_{13} = m\}| = |\{f' \in B'_n : |f'|_{22} = m\}| = \frac{\binom{n+1}{m}\cdot\binom{n+1}{m+1}\cdot\binom{n+1}{m+2}}{\binom{n+1}{1}\cdot\binom{n+1}{2}}$.

Preuve Ce résultat se déduit du corollaire 3 de [7] et de la proposition 10. $\square$

Rappelons que cette dernière formule dénombre les permutations de Baxter sur $[n]$ ayant m montées [3, 18, 25, 8].

3 Tableaux de Young standard rectangulaires non séparables de hauteur 3

Nous définissons tout d'abord une famille de couples d'arbres binaires complets particuliers.

$D_n = \{(a_1, a_2) : a_1, a_2 \in A_n$ et $\Delta_d(a_1) \cap \Delta_g(a_2) \neq \emptyset\}$ désigne l'ensemble des arbres binaires complets séparables où

- Δ_d est l'ensemble des couples d'entiers $(x-1, y-1)$ tels que x et y sont les numéros d'ordre infixe respectivement d'un sommet interne s et d'une feuille t appartenant à la branche respectivement gauche et droite d'un même sommet interne droit de a_1,
- Δ_g est l'ensemble des couples d'entiers (x, y) tels que x et y sont les numéros d'ordre infixe respectivement d'une feuille s et d'un sommet interne t appartenant à la branche respectivement gauche et droite d'un même sommet interne gauche de a_2.

Ainsi, deux arbres binaires complets séparables (a_1, a_2) possèdent chacun un sous-arbre tronqué (la branche principale est rompue) qui coïncident relativement à la numérotation en ordre infixe des sommets (à une unité près). Plus précisément, le sous-arbre de a_1 [resp. a_2] est tronqué à gauche [resp. droite] et est issu d'une arête droite [resp. gauche].

La figure 6 présente schématiquement deux arbres binaires complets séparables.

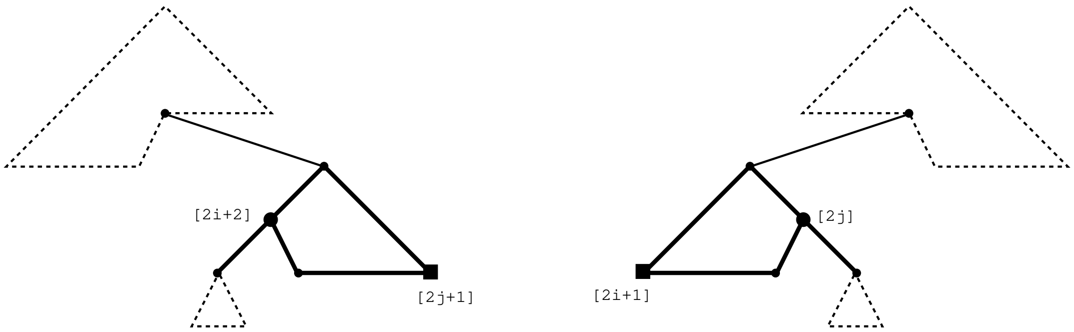

FIG. 6 - Arbres binaires complets séparables: $(2i+1, 2j) \in \Delta_d(a_1) \cap \Delta_g(a_2)$.

Lemme 18 *Les bijections Φ, Υ, Ω et Λ mettent en correspondance les mots du langage H_n (ensemble des mots de piles sans facteur $2g2$ où $g \in Y$, c'est à dire vérifiant la condition "tour* *de Hanoï"), les mots du langage* $\{\alpha \in M_{2n} : \forall \alpha = \alpha' b \beta x \alpha''$ *où* $x \in \{\overline{a}, b\}, a\beta \notin M\}$ *(langage des mots non séparables du produit de mélange de deux mots de parenthèses), les permutations de* $\widehat{S}_{2n}(2413, 41\overline{3}52)$ *(ensemble des permutations non séparables alternantes), les couples d'arbres binaires complets de* $A_n \times A_n \backslash D_n$ *(ensemble des arbres binaires complets non séparables) et les mots du langage* H'_n *(ensemble des mots de piles sans facteur* $1g3$ *où* $g \in Y$ *codant les arbres 1-2 filiformes non séparables).*

Preuve Ce résultat s'obtient en caractérisant la restriction apportée à C_n pour obtenir H_n sur la correspondance entre C_n et C''_n composant les bijections Φ, Υ, Ω et Λ. □

La figure 5 illustre ce résultat puisque le mot 123121123233 de C_4 appartient également à H_4. En particulier, les arbres binaires complets (a_1, a_2) de $A_4 \times A_4$ n'appartiennent pas à D_4 puisque l'intersection des ensembles $\Delta_d(a_1) = \{(3,6), (5,6)\}$ et $\Delta_g(a_2) = \{(3,4)\}$ est vide.

Remarquons que l'exemple 4 fait le lien entre les figures 3 et 5 et illustre ainsi la bijection entre H'_n et $\overline{F}_n$ (voir propriété 3).

Lemme 19 *Il existe une bijection* Ξ *(voir figure 7) entre arbres 1-2 filiformes non séparables ayant* n *points simples de* $\overline{F}_n$ *et cartes planaires cubiques non séparables ayant* $2n$ *sommets de* CNS_{2n}*.*

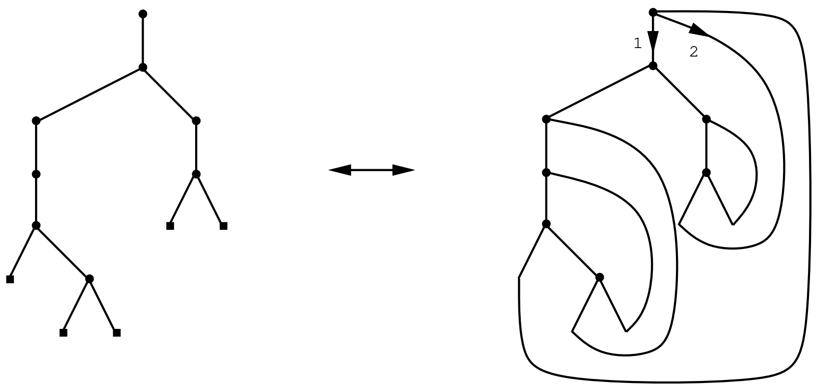

FIG. 7 - La bijection Ξ entre un arbre 1-2 filiforme non séparable et une carte planaire cubique non séparable.

L'application Ξ et son inverse sont définies de la façon suivante.

- Ξ consiste, pour un arbre 1-2 filiforme non séparable, à prolonger à droite chacune des arêtes menant à la dernière, puis à l'avant-dernière, ..., et enfin à la première des feuilles jusqu'au prochain point simple (ou la racine) non saturé relativement à un parcours en profondeur. Le sommet distingué de la carte planaire cubique non séparable ainsi obtenue est l'ancienne racine de l'arbre dont les brins pointés sont ses premier et deuxième (de gauche à droite) brins.
- L'application inverse Ξ^{-1} consiste à ajouter à l'arbre recouvrant de la carte planaire cubique non séparable une feuille pour toute arête de la carte n'appartenant pas à l'arbre recouvrant et rencontrée pour la première fois lors du parcours en profondeur.

Preuve L'application Ξ est bien définie. En effet, l'opération de prolongement des feuilles est valide puisque les arbres 1-2 filiformes non séparables ont autant de points simples que de points doubles et vérifient qu'à tout instant du parcours préfixe il y a au moins autant de points simples que de points doubles ; la carte

ainsi construite est planaire et cubique. De plus, la carte est non séparable car aucun sommet fils unique des arbres 1-2 filiformes non séparables n'est racine d'un arbre 1-2 filiforme non séparable.
L'application Ξ^{-1} est également bien définie et est clairement, par construction, l'application réciproque de Ξ. □

Preuve du théorème 6 Ce résultat se déduit d'une part de la correspondance composant les bijections Φ, Υ, Ω, Λ, *préfixe*() et Ξ entre mots de H_n (codant les tableaux de Young standard $3 \times n$ non séparables) et cartes planaires de CNS_{2n} et d'autre part de la proposition 10. □

Les figures 5 et 7 illustrent la correspondance entre tableaux de Young standard rectangulaires non séparables de hauteur 3 et cartes planaires cubiques non séparables.

Preuve du théorème 8 et de la proposition 9 Les bijections Φ et Υ_1 mettent en correspondance les mots de P_n ayant s facteurs 31 et les permutations non séparables de $S_n(2413, 41\bar{3}52)$ ayant s descentes tandis que S. Dulucq, S. Gire et J. West [6] ont établi une bijection entre ces permutations et les cartes planaires pointées non séparables ayant $n+1$ arêtes et $s+2$ sommets. Les résultats d'énumération de ces cartes selon le nombre d'arêtes (W.T. Tutte [24]) et selon le nombre d'arêtes et de sommets (W.G. Brown et W.T. Tutte [2]) nous permettent de conclure. □

Proposition 20 *Les mots du langage R_n (ensemble des mots de piles sans facteur $2g2, 1g3$ où $g \in Y$) sont en bijection (voir figure 8) avec les arbres ternaires complets ayant n sommets internes. Ils sont dénombrés [15] par*

$$|R_n| = \frac{(3n)!}{(2n+1)!n!}$$

Preuve Cette bijection est obtenue par le codage suivant d'un arbre ternaire complet a.

$$ternaire(a) = \begin{cases} \varepsilon \\ 1\ ternaire(arbre\_gauche(a))\ 2\ ternaire(arbre\_central(a))\ 3\ ternaire(arbre\_droit(a)) \end{cases}$$

si a est respectivement réduit à un sommet ou non. □

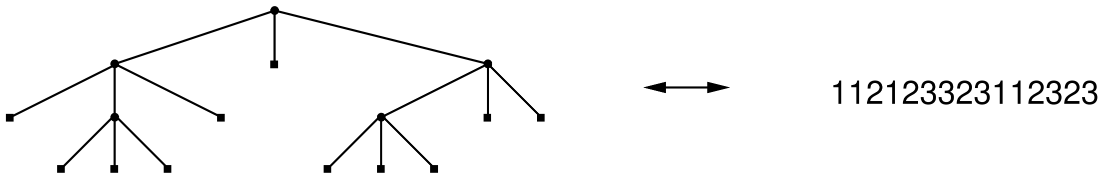

FIG. 8 - Codage d'un arbre ternaire complet ayant 5 sommets internes par un mot de R_5.

Bibliographie

[1] **G. Baxter**, On fixed points of the composite of commuting functions, *Proc. Amer. Math. Soc.* **15** (1964) 851–855.

[2] **W.G. Brown** et **W.T. Tutte**, On the enumeration of rooted non separable planar maps, *Can. J. Math.* **16** (1964) 572–577.

[3] **F.R.K. Chung**, **R.L. Graham**, **V.E. Hoggatt** et **M. Kleiman**, The number of Baxter permutations, *J. Combi. Theory A* **24** (1978) 382–394.

[4] **R. Cori**, **S. Dulucq** et **G. Viennot**, Shuffle of parenthesis systems and Baxter permutations, *J. Combi. Theory A* **43** (1986) 1–22.

[5] **S. Dulucq**, **S. Gire** et **O. Guibert**, A combinatorial proof of J. West's conjecture, soumis à *Disc. Math.*

[6] **S. Dulucq**, **S. Gire** et **J. West**, Permutations à motifs exclus et cartes planaires non séparables, $5^{ème}$ *SFCA*, Florence (1993) 165–178, à paraître dans *Disc. Math.*

[7] **S. Dulucq** et **O. Guibert**, Mots de piles, tableaux standards et permutations de Baxter, $6^{ème}$ *SFCA*, Dimacs (1994) 119–128, à paraître dans *Disc. Math.*

[8] **S. Dulucq** et **O. Guibert**, Permutations de Baxter, $7^{ème}$ *SFCA*, Marne-la-Vallée (1995) 139–150, soumis à *Disc. Math.*

[9] **J.S. Frame**, **G. de B. Robinson** et **R.M. Trall**, The hook graphs of the symetric group, *Can. J. Math.* **6** (1954) 316–324.

[10] **S. Gire**, Arbres, permutations à motifs mxclus et cartes planaires : quelques problèmes algorithmiques et combinatoires, *Thèse U. Bordeaux I* (1993).

[11] **I.P. Goulden** et **J. West**, Raney paths and a combinatorial relationship between rooted nonseparable planar maps and two-stack-sortable permutations, pré-publication.

[12] **O. Guibert**, Permutations sans sous-séquence interdite, *Mémoire DEA U. Bordeaux I* (1992).

[13] **O. Guibert**, Combinatoire des permutations à motifs exclus en liaison avec mots, cartes planaires et tableaux de Young, *Thèse U. Bordeaux I* (1995).

[14] **O. Guibert**, Stack words, standard Young tableaux, permutations with forbidden subsequences and planar maps, en préparation.

[15] **D.A. Klarner**, Correspondences between plane trees and binary sequences, *J. Combi. Theory A* **9** (1970) 401–411.

[16] **D.E. Knuth**, The art of computer programming, volume **1**, Fundamental algorithms, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1973).

[17] **G. Kreweras**, Sur les éventails de segments, *Cahiers BURO* **15** (1970) 1–41.

[18] **C.L. Mallows**, Baxter permutations rise again, *J. Combi. Theory A* **27** (1979) 394–396.

[19] **T. Motzkin**, Relations between hypersurface cross ratios, and a combinatorial formula for partitions of a polygon, for permanent preponderance, and for non-associative products, *Bulletin of the Amer. Math. Soc.* **54** (1948) 352–360.

[20] **T.V. Narayana**, A partial order and its applications to probability theory, *Sankhya* **21** (1959) 91–98.

[21] **R. Simion** et **F.W. Schmidt**, Restricted permutations, *Eur. J. Combi.* **6** (1985) 383–406.

[22] **Z.E. Stankova**, Forbidden subsequences, *Disc. Math.* **132** (1994) 291–316.

[23] **W.T. Tutte**, A census of hamiltonian polygons, *Can. J. Math.* **14** (1962) 402–417.

[24] **W.T. Tutte**, A census of planar maps, *Can. J. Math.* **15** (1963) 249–271.

[25] **G. Viennot**, A bijective proof for the number of Baxter permutations, $3^{ème}$ *Sém. Lotharingien Combi.*, Le Klebach (1981) 28–29.

[26] **J. West**, Permutations with forbidden subsequences and stack-sortable permutations, Ph.D. Thesis, M.I.T., Cambridge, MA (1990).

[27] **J. West**, Permutation trees and the Catalan and Schröder numbers, à paraître dans *Disc. Math.*

[28] **J. West**, Sorting twice through a stack, $3^{ème}$ *SFCA*, Bordeaux (1991) 397–406, *Theor. Comp. Sc.* **117** (1993) 303–313.

[29] **J. West**, Generating trees and forbidden subsequences, $6^{ème}$ *SFCA*, Dimacs (1994) 441–450.

[30] **D. Zeilberger**, A proof of Julian West's conjecture that the number of two-stack sortable permutations of length n is $2(3n)!/((n+1)!(2n+1)!)$, *Disc. Math.* **102** (1992) 85–93.