Permutations de Baxter

S. Dulucq et O. Guibert *

LaBRI, Université Bordeaux I
URA CNRS 1304
351, cours de la Libération, 33405 Talence cédex France

Résumé. F.R.K. Chung, R.L. Graham, V.E. Hoggatt et M. Kleiman [2] ont montré que le nombre de permutations de Baxter sur $[n]$ est $\sum_{m=0}^{n-1} \frac{\binom{n+1}{m}\cdot\binom{n+1}{m+1}\cdot\binom{n+1}{m+2}}{\binom{n+1}{1}\cdot\binom{n+1}{2}}$. X. Viennot [12] a donné ensuite une preuve combinatoire de cette formule, montrant que cette somme correspondait à la distribution de ces permutations suivant leur nombre de montées.

R. Cori, S. Dulucq et X. Viennot [3], en mettant en correspondance deux familles de cartes planaires, ont montré que le nombre de permutations de Baxter alternantes sur $[2n+\delta]$ est $c_{n+\delta}.c_n$ où $c_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$ est le $n^{ème}$ nombre de Catalan.

Dans cet article, nous présentons une nouvelle correspondance entre permutations de Baxter et triplets de chemins deux à deux disjoints, unifiant ainsi les travaux [12] et [3]. De plus, ceci nous permet d'affiner les résultats connus en obtenant des formules énumérant les permutations (alternantes ou non) de Baxter suivant plusieurs paramètres. Nous donnons ainsi une interprétation combinatoire d'une formule due à C.L. Mallows [10].

Abstract. F.R.K. Chung, R.L. Graham, V.E. Hoggatt and M. Kleiman [2] have shown the number of Baxter's permutations on $[n]$ is $\sum_{m=0}^{n-1} \frac{\binom{n+1}{m}\cdot\binom{n+1}{m+1}\cdot\binom{n+1}{m+2}}{\binom{n+1}{1}\cdot\binom{n+1}{2}}$. X. Viennot [12] has then given a combinatorial proof of this formula, showing this sum corresponds to the distribution of these permutations according to their number of rises.

R. Cori, S. Dulucq and X. Viennot [3], by making a correspondence between two families of planar maps, have shown the number of alternating Baxter's permutations on $[2n+\delta]$ is $c_{n+\delta}.c_n$ where $c_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$ is the n^{th} Catalan number.

In this paper, we establish a new one-to-one correspondence between Baxter's permutations and three nonintersecting paths, which unifies [12] and [3]. Moreover, we obtain more precise results for the enumeration of (alternating or not) Baxter's permutations according to various parameters. So, we give a combinatorial interpretation of C.L. Mallows's formula [10].

G. Baxter [1] a mis en évidence une classe particulière de permutations en étudiant les points fixes de fonctions continues commutant par composition. Ces permutations, dites depuis permutations de Baxter, peuvent être définies en termes de motifs exclus. Plus précisément, elles vérifient les deux conditions suivantes : pour tout $1 \leq i < j < k < l \leq n$,

$$\text{si } \pi_i + 1 = \pi_l \text{ et } \pi_j > \pi_l \text{ alors } \pi_k > \pi_l,$$
$$\text{si } \pi_l + 1 = \pi_i \text{ et } \pi_k > \pi_i \text{ alors } \pi_j > \pi_i.$$

*E-mail : *nom*@labri.u-bordeaux.fr

Avec les soutiens PRC-Maths/Info et EC grant CHRX-CT93-0400.

Ainsi, sur quatre éléments, seules les permutations 2413 et 3142 ne sont pas des permutations de Baxter.

F.R.K. Chung, R.L. Graham, V.E. Hoggatt et M. Kleiman [2] ont montré, de manière analytique, que le nombre de permutations de Baxter sur $[n]$ est donné par la formule $\sum_{m=0}^{n-1} \frac{\binom{n+1}{m}.\binom{n+1}{m+1}.\binom{n+1}{m+2}}{\binom{n+1}{1}.\binom{n+1}{2}}$.

Plus tard, C.L. Mallows [10] a donné une interprétation plus fine de ce résultat en montrant que cette sommation correspondait à la distribution des permutations de Baxter suivant leur nombre de montées (indices i tels que $\pi_i < \pi_{i+1}$). De plus, il donne une nouvelle formule pour ces permutations où seul le paramètre m possède une interprétation (nombre de montées) : $\sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{m+1} \frac{s.i}{n.(n+1)} \left[\binom{n-s-1}{n-m-2} \binom{n-i-1}{m-1} - \binom{n-s-1}{n-m-1} \binom{n-i-1}{m} \right]$.

X. Viennot [12] a donné une preuve combinatoire de la formule obtenue par F.R.K. Chung, R.L. Graham, V.E. Hoggatt et M. Kleiman en établissant une correspondance entre les permutations de Baxter et certains tableaux semi-standards pour lesquels on connait une formule d'énumération. Cette correspondance repose sur un certain nombre de bijections classiques telles qu'entre permutations et histoires de Laguerre, entre mots de Motzkin 2-colorés et polyominos parallélogrammes [4], et finalement entre chemins deux à deux disjoints et tableaux semi-standards [7].

D'autre part, R. Cori, S. Dulucq et X. Viennot [3], lors de la résolution d'un problème posé par R.C. Mullin [11] sur l'énumération de certaines familles de cartes planaires, ont établi une correspondance entre le langage produit de mélange (ou shuffle) de deux systèmes de parenthèses (ou mots de Dyck) et les couples d'arbres binaires. Parmi les divers objets mis en oeuvre dans cette correspondance, apparaissent naturellement les permutations de Baxter alternantes (tour à tour montée et descente). Ils en déduisent que le nombre de telles permutations est $c_n.c_n$ et $c_{n+1}.c_n$ où $c_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$ est le $n^{ème}$ nombre de Catalan.

L'objet de ce travail est de fournir une preuve combinatoire unifiant les résultats de X. Viennot sur les permutations de Baxter [12] et ceux de R. Cori, S. Dulucq et X. Viennot sur les permutations de Baxter alternantes [3], tout en donnant une interprétation combinatoire de la formule de C.L. Mallows [10].

Récemment, S. Dulucq et O. Guibert [5] ont résolu deux conjectures de S. Gire [8] portant sur l'énumération de certains mots de piles (liés au problème de permutations triables par passages consécutifs dans une pile [13]), objets en correspondance avec certains tableaux de Young standards rectangulaires de hauteur 3. Lors de la résolution de l'un de ces deux problèmes, ils mettent en correspondance permutations de Baxter et arbres jumeaux. Ces derniers sont obtenus en prenant les deux arbres binaires, croissant et décroissant, associés à une permutation (on oublie l'étiquetage de ces arbres). Cette application surjective est bijective lorsque les permutations considérées sont les permutations de Baxter. Par exemple, les permutations 2413 et 3412 donnent le même couple d'arbres binaires croissant et décroissant, mais seule la permutation 3412 est une permutation de Baxter.

Partant de cette caractérisation des permutations de Baxter en termes d'arbres binaires jumeaux [5], nous mettons en correspondance permutations de Baxter et triplets de chemins deux à deux disjoints dans un huitième de plan (ces triplets de chemins correspondent à des polyominos parallélogrammes jumeaux) et retrouvons ainsi les chemins obtenus par X. Viennot [12], ce qui nous permet de conclure. Cependant, dans les différentes bijections considérées ici, un certain nombre de paramètres sont transportés.

Ainsi, nous déduisons des travaux de I. Gessel et X. Viennot [7] un déterminant 3×3

donnant le nombre de permutations de Baxter sur $[n]$ distribuées suivant cinq paramètres. Des cas particuliers nous permettent de retrouver les formules de F.R.K. Chung, R.L. Graham, V.E. Hoggatt et M. Kleiman [2] et de C.L. Mallows [10] pour laquelle nous montrons que les paramètres m, i et s correspondent aux nombres de montées, de minima et maxima à gauche des permutations de Baxter.

De plus, dans la bijection que nous donnons entre permutations de Baxter et triplets de chemins deux à deux disjoints, le caractère alternant des permutations correspond au fait que le second chemin est en escalier. Ainsi apparait naturellement un couple de chemins de Dyck. Nous en déduisons que le nombre de permutations de Baxter alternantes sur $[2n+\delta]$ ($\delta = 0$ ou 1) est $c_{n+\delta}.c_n$ où $c_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$ est le $n^{ème}$ nombre de Catalan, et affinons ensuite ce résultat.

1 Les résultats principaux

Rappelons tout d'abord la définition des paramètres suivants sur les permutations de S_n :

- pour $i \in [n-1]$, l'indice i est appelé une montée de π si et seulement si $\pi(i) < \pi(i+1)$,
- pour $i \in [n]$, l'élément $\pi(i)$ est dit
  minimum à gauche si et seulement si $\pi(i) < \pi(j)$ pour tout $1 \leq j < i$,
  maximum à gauche si et seulement si $\pi(i) > \pi(j)$ pour tout $1 \leq j < i$.

De plus, une permutation π de S_n est alternante si et seulement si pour tout $i \in [\lfloor \frac{n}{2} \rfloor]$, $\pi(2i-1) < \pi(2i) > \pi(2i+1)$.

Définition 1 *Une permutation π de S_n est une permutation de Baxter si et seulement si, pour tout entier $p \in [n-1]$, π se factorise de manière unique sous la forme*

$$\pi = \pi'.p.\overset{\leq}{\pi}.\overset{\geq}{\pi}.p{+}1.\pi'' \text{ ou } \pi = \pi'.p{+}1.\overset{\geq}{\pi}.\overset{\leq}{\pi}.p.\pi''$$

où toutes les lettres de $\overset{\leq}{\pi}$ [resp. $\overset{\geq}{\pi}$] sont inférieures à p [resp. supérieures à $p+1$].
On note $Baxter_n$ l'ensemble des permutations de Baxter sur $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Exemple. La permutation 4236571 appartient à $Baxter_7$. Par exemple, pour $p = 4$, $\overset{\leq}{\pi} = 23$ et $\overset{\geq}{\pi} = 6$.

Dans ce travail, nous donnons une preuve combinatoire de la formule suivante due à C.L. Mallows [10], lequel ne donne pas d'interprétation simple (dans le sens de paramètres classiques sur les permutations) de i et s.

Théorème 1 *Le nombre de permutations de Baxter sur $[n]$ ayant m montées, i minima à gauche et s maxima à gauche est*

$$\binom{n+1}{m+1}\frac{s.i}{n.(n+1)}\left[\binom{n-s-1}{n-m-2}\binom{n-i-1}{m-1} - \binom{n-s-1}{n-m-1}\binom{n-i-1}{m}\right]$$

En fait, nous obtenons un résultat encore plus fin dans la mesure où nous énumérons ces permutations de Baxter selon deux paramètres supplémentaires.

De plus, la preuve du théorème 1 nous permet d'affiner un résultat dû à R. Cori, S. Dulucq et X. Viennot [3], obtenu lors de la résolution d'un problème de R.C. Mullin [11] sur l'énumération de certaines familles de cartes planaires.

Théorème 2 *Le nombre de permutations de Baxter alternantes sur* $[2n+\delta]$ *où* $\delta \in \{0,1\}$ *ayant* i *minima à gauche et* s *maxima à gauche est*

$$\frac{i}{n+\delta-i}\binom{2(n+\delta)-i-1}{n+\delta}.\frac{s-1}{n-s+1}\binom{2n-s}{n}$$

2 La correspondance entre les permutations de Baxter et les triplets de chemins deux à deux disjoints

Cette correspondance entre permutations de Baxter et triplets de chemins deux à deux disjoints est la composition de deux bijections, la première reliant les permutations de Baxter et les arbres jumeaux [5], la seconde reliant les arbres jumeaux et les triplets de chemins deux à deux disjoints.

2.1 La bijection entre les permutations de Baxter et les arbres jumeaux

Nous rappelons ici brièvement une bijection entre les permutations de Baxter et les arbres jumeaux établie par S. Dulucq et O. Guibert [5].

Soit A_n l'ensemble des arbres binaires ayant n sommets. Ainsi, $|A_n| = c_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$.
Notons $P_{z,\overline{z}}$ le langage des mots des systèmes de parenthèses bien formées (ou mots de Dyck) défini sur l'alphabet $\{z, \overline{z}\}$.
Classiquement, le codage d'un arbre binaire a par un mot de $P_{z,\overline{z}}$ peut être défini récursivement par $\begin{cases} code(a) & = & z\ code(sous_arbre_gauche(a))\ \overline{z}\ code(sous_arbre_droit(a)) \\ code(\emptyset) & = & \epsilon \text{ (le mot vide) où } \emptyset \text{ est l'arbre binaire de } A_0 \end{cases}$

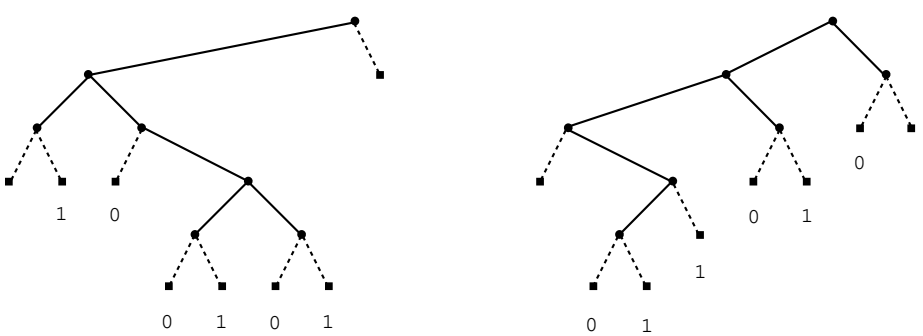

Figure 1: Deux arbres jumeaux.

Définition 2 *L'ensemble des arbres jumeaux* $J_n \subseteq A_n \times A_n$ *est l'ensemble*

$$J_n = \{(a_1, a_2) : a_1, a_2 \in A_n \text{ et } \Theta(code(a_1)) = \Theta^c(code(a_2))\}$$

où Θ *consiste en l'étiquetage des feuilles gauches [resp. droites] d'un arbre binaire (une fois complété) par la lettre* 0 *[resp.* 1*] excepté les deux feuilles extrêmes et* Θ^c *est identique à* Θ *modulo l'échange des lettres* 0 *et* 1*.*

Plus formellement, Θ *est l'application surjective de* $P_{z,\overline{z}}$ *dans* $\{0,1\}^*$ *définie par* $\Theta(z^l\overline{z}w_{l+2}w_{l+3}\dots w_{2n}) = \Theta(\overline{z}w_{l+2})\Theta(w_{l+2}w_{l+3})\dots\Theta(w_{2n-1}w_{2n})$ *avec* $\Theta(zz) = \Theta(\overline{z}z) = \epsilon$, $\Theta(z\overline{z}) = 0$, $\Theta(\overline{z}\overline{z}) = 1$.

Exemple. La figure 1 représente deux arbres jumeaux.

Théorème 3 *[5] Il existe une bijection entre les permutations de Baxter sur* $[n]$ *et les arbres jumeaux de* J_n.
De plus, à une permutation de Baxter ayant m *montées,* i *minima à gauche et* s *maxima à gauche correspond des arbres jumeaux tels que le premier arbre binaire a* m *arêtes droites et* i *sommets sur sa branche gauche tandis que le second arbre binaire a* s *sommets sur sa branche gauche.*

Preuve. Nous rappelons seulement ici cette construction, la preuve détaillée figurant dans [5].
A une permutation de Baxter donnée, on associe ses arbres binaires croissant et décroissant auxquels on enlève ensuite l'étiquetage. Les deux arbres ainsi obtenus sont jumeaux.
La réciproque s'appuie sur un algorithme qui reconstruit l'étiquetage croissant du premier des deux arbres jumeaux considérés. □

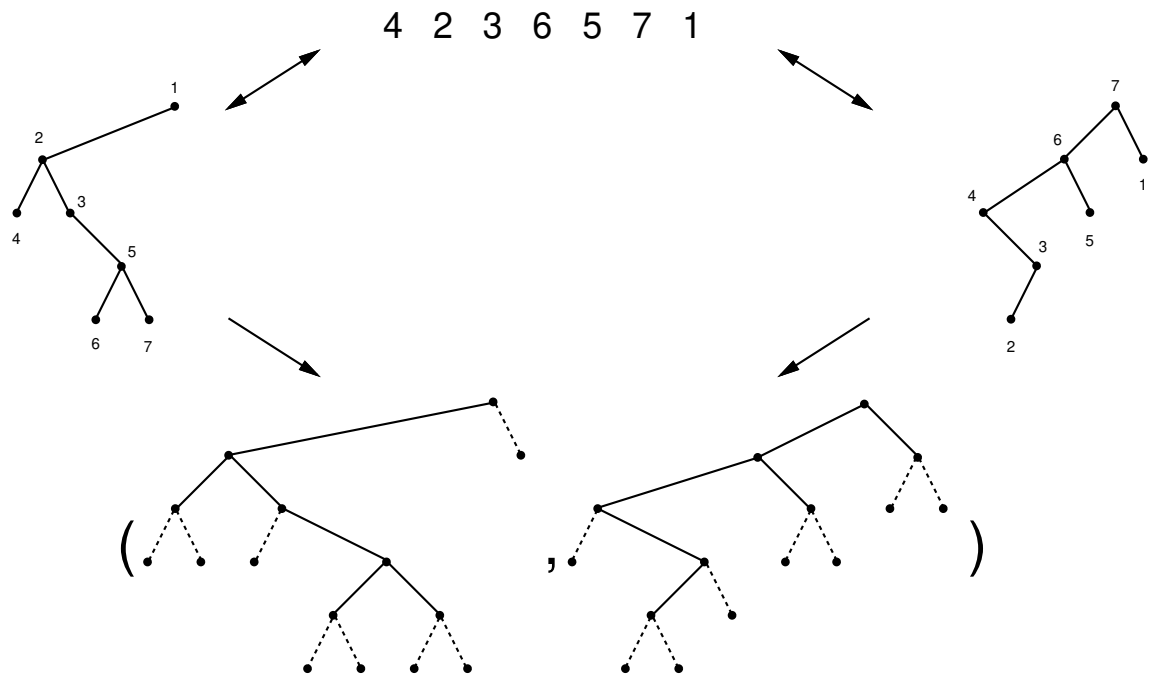

Figure 2: Une permutation de Baxter, ses arbres binaires croissant et décroissant, et les arbres jumeaux lui correspondant.

La figure 2 illustre cette bijection.

Remarque. A toute permutation de S_n correspond par cette construction des arbres jumeaux (ce qui serait une manière de les définir). Les permutations de Baxter sont les permutations sur lesquelles cette construction est bijective.

2.2 La bijection entre les arbres jumeaux et les triplets de chemins deux à deux disjoints

Cette bijection entre les arbres jumeaux et les triplets de chemins deux à deux disjoints consiste pour l'essentiel à concrétiser le caractère jumeau sur les deux polyominos parallélogrammes obtenus à partir des deux arbres binaires par la bijection de M. Delest et X. Viennot [4].

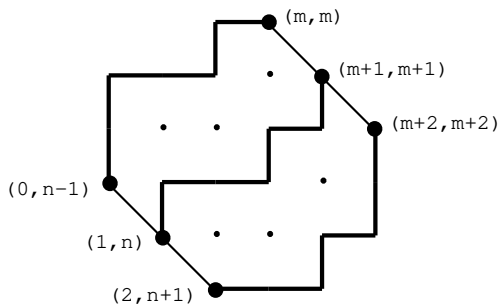

Figure 3: Un triplet de chemins deux à deux disjoints.

Définition 3 *T_n est l'ensemble des triplets de chemins deux à deux disjoints allant respectivement des 3 points de coordonnées $(0, n-1), (1, n), (2, n+1)$ aux 3 points de coordonnées $(m, m), (m+1, m+1), (m+2, m+2)$ en empruntant seulement des pas Est et Nord où m parcourt l'intervalle $[0, n-1]$.*

Exemple. La figure 3 montre un triplet de chemins deux à deux disjoints avec $n = 7$ et $m = 3$.

Théorème 4 *Il existe une bijection entre arbres jumeaux de J_n et triplets de chemins deux à deux disjoints de T_n.*
De plus, à un couple d'arbres jumeaux tel que le premier arbre binaire a m arêtes droites et i sommets sur sa branche gauche tandis que le second arbre binaire a s sommets sur sa branche gauche correspond un triplet de chemins deux à deux disjoints allant des 3 points de coordonnées $(1, n-i), (1, n), (s+1, n)$ respectivement aux 3 points de coordonnées $(m, m), (m+1, m+1), (m+2, m+2)$ en empruntant des pas Est et Nord.

Lemme 1 *[4] Il existe une bijection entre arbres binaires ayant n sommets, m arêtes droites et dont la branche gauche contient l sommets et couples de chemins disjoints allant respectivement des 2 points de coordonnées $(0, n-1), (1, n)$ aux 2 points de coordonnées $(m, m), (m+1, m+1)$ en empruntant des pas Est et Nord, le chemin supérieur débutant par exactement $l-1$ pas Nord.*

Preuve. La bijection originale [4] entre mots de Dyck (ou arbres binaires) et polyominos parallélogrammes consiste à associer aux chemins de Dyck deux suites d'entiers définies de manière unique (hauteurs des pics et des creux). Ces deux suites donnent respectivement les hauteurs de chacune des colonnes du polyomino parallélogramme et le nombre de cellules en contact de deux colonnes consécutives.
En fait, elle peut être présentée d'une façon différente, mais qui nous sera utile par la suite.

En effet, cette bijection revient à coder un arbre binaire complété en le parcourant suivant l'ordre préfixe par deux chemins deux à deux disjoints. Le premier chemin est obtenu en codant les arêtes internes (qui ne supportent pas les feuilles) gauche [resp. droite] par un pas Nord [resp. Est] ; le second chemin est obtenu en codant les feuilles (exceptées les deux extrêmes) gauche [resp. droite] par un pas Est [resp. Nord]. □

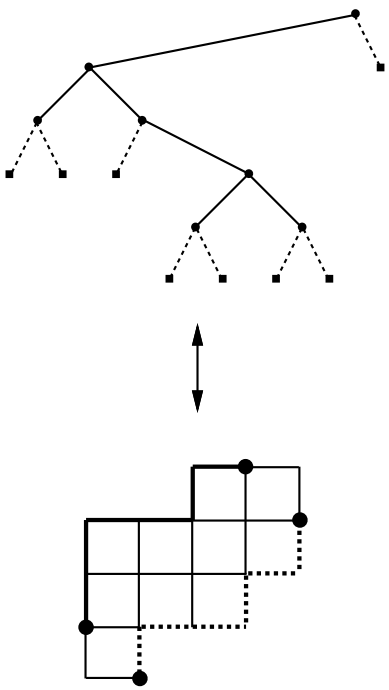

Figure 4: Arbre binaire complet et polyomino parallélogramme.

La figure 4 illustre cette bijection.

Preuve du théorème 4 (cf. figure 5). Tout d'abord, d'après le lemme 1, à deux arbres jumeaux correspondent deux couples de chemins disjoints (ou deux polyominos parallélogrammes). D'après la définition du caractère jumeau de deux arbres et la correspondance entre arbres binaires et couples de chemins disjoints (preuve du lemme 1), ces deux couples de chemins ont leurs seconds chemins complémentaires. Une symétrie par rapport à la diagonale du second couple permet de coller ces deux couples de chemins, donnant ainsi un triplet de chemins deux à deux disjoints.
Cette construction est clairement réversible. □

La figure 5 illustre cette bijection.

2.3 Enumération des permutations de Baxter

Preuve du théorème 1. Le nombre de permutations de Baxter sur $[n]$ ayant m montées, i minima à gauche et s maxima à gauche est donné par le déterminant

$$\begin{vmatrix} \binom{n-1-i}{m-1} & \binom{n-1}{m-1} & \binom{n-1-s}{m-s-1} \\ \binom{n-1-i}{m} & \binom{n-1}{m} & \binom{n-1-s}{m-s} \\ \binom{n-1-i}{m+1} & \binom{n-1}{m+1} & \binom{n-1-s}{m-s+1} \end{vmatrix}$$

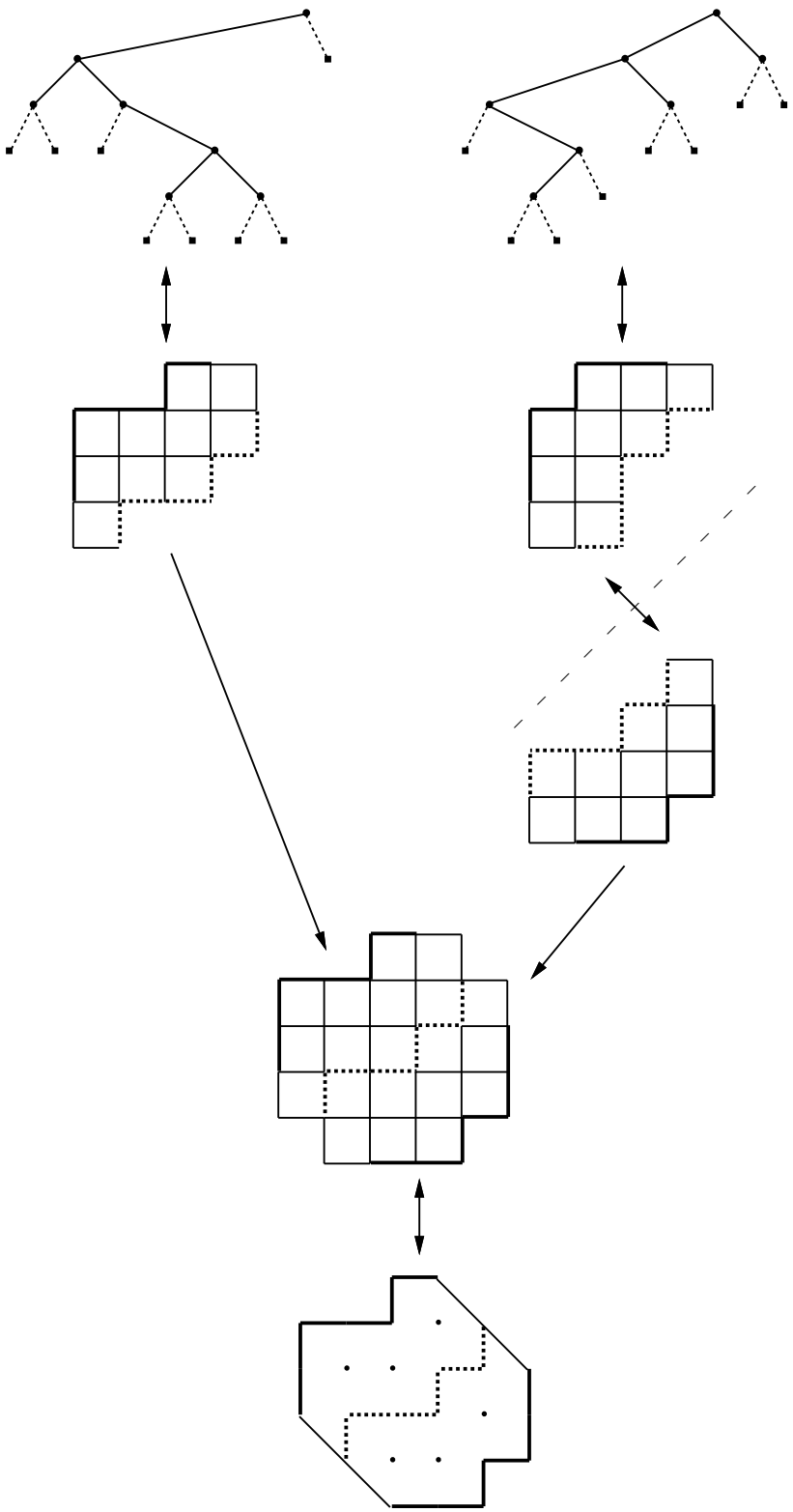

Figure 5: Des arbres jumeaux aux triplets de chemins deux à deux disjoints.

En effet, ces permutations de Baxter correspondent aux triplets de chemins deux à deux disjoints allant des 3 points de coordonnées $(1, n-i), (1, n), (s+1, n)$ aux 3 points de coordonnées $(m, m), (m+1, m+1), (m+2, m+2)$. Or, par une preuve en tout point identique à celle décrite dans l'article de I.M. Gessel et X. Viennot [7] (la même involution permet d'obtenir le même résultat bien qu'ici nous n'ayons pas un mineur de déterminant binômial), on montre que le nombre de tels chemins est donné par ce déterminant. On en déduit la formule du théorème 1 (formule de C.L. Mallows [10]). □

Notre correspondance nous permet de retrouver le résultat dû à F.R.K. Chung, R.L. Graham, V.E. Hoggatt et M. Kleiman [2], démontré ensuite combinatoirement par X. Viennot [12].

Corollaire 1 *[2, 12] Le nombre de permutations de Baxter sur $[n]$ ayant m montées est*

$$\frac{\binom{n+1}{m}\cdot\binom{n+1}{m+1}\cdot\binom{n+1}{m+2}}{\binom{n+1}{1}\cdot\binom{n+1}{2}}$$

Preuve. Ces permutations correspondent à des triplets de chemins deux à deux disjoints allant des 3 points de coordonnées $(0, n-1), (1, n), (2, n+1)$ aux 3 points de coordonnées $(m, m), (m+1, m+1), (m+2, m+2)$. Or, le nombre de tels chemins est donné par le déterminant [7, 12]

$$\begin{vmatrix} \binom{n-1}{m} & \binom{n-1}{m-1} & \binom{n-1}{m-2} \\ \binom{n-1}{m+1} & \binom{n-1}{m} & \binom{n-1}{m-1} \\ \binom{n-1}{m+2} & \binom{n-1}{m+1} & \binom{n-1}{m} \end{vmatrix}$$

□

En fait, on peut obtenir une énumération plus fine des permutations de Baxter en considérant deux paramètres supplémentaires.

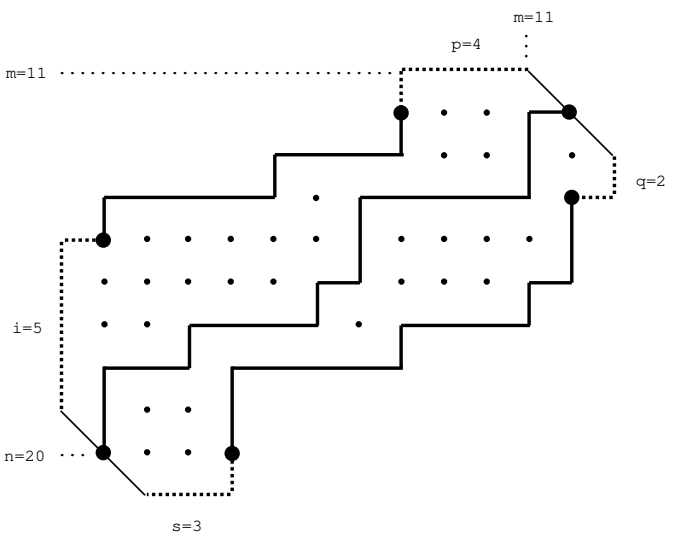

Figure 6: Les six paramètres des triplets de chemins deux à deux disjoints.

Définition 4 *Etant donnée une permutation π de S_n, on considère les paramètres suivants.*

- $md(\pi) \in [n]$ *est le nombre de montées de* $\pi(i)\pi(i+1)\dots\pi(n)$
  avec $i = \max\{j : \exists k \geq 2, \pi(j) < \pi(j+k) < \pi(j+1) < \pi(j+2) < \cdots < \pi(j+k-1)\}$
  en posant $\pi(0) = -1$ *et* $\pi(n+1) = 0$.
- $dd(\pi) \in [n]$ *est le nombre de descentes de* $\pi(i)\pi(i+1)\dots\pi(n)$
  avec $i = \max\{j : \exists k \geq 2, \pi(j) > \pi(j+k) > \pi(j+1) > \pi(j+2) > \cdots > \pi(j+k-1)\}$
  en posant $\pi(0) = n+2$ *et* $\pi(n+1) = n+1$.

Théorème 5 *Le nombre de permutations de Baxter* π *sur* $[n]$ *ayant* m *montées,* i *minima à gauche,* s *maxima à gauche,* $p = md(\pi)$ *et* $q = dd(\pi)$ *est donné par le déterminant*

$$\begin{vmatrix} \binom{n-1-i-p}{m-p} & \binom{n-1-p}{m-p} & \binom{n-1-s-p}{m-s-p} \\ \binom{n-1-i}{m} & \binom{n-1}{m} & \binom{n-1-s}{m-s} \\ \binom{n-1-i-q}{m} & \binom{n-1-q}{m} & \binom{n-1-s-q}{m-s} \end{vmatrix}$$

Preuve. Une lecture plus fine des correspondances des théorèmes 3 et 4 permet de constater que ces deux paramètres sont effectivement transportés aux triplets de chemins deux à deux disjoints. □

Enfin, notre correspondance traduit de façon naturelle la propriété d'alternance des permutations de Baxter.

3 Les permutations de Baxter alternantes

Notre correspondance nous permet de retrouver un résultat dû à R. Cori, S. Dulucq et X. Viennot [3].

Théorème 6 *[3] Le nombre de permutations de Baxter alternantes sur* $[2n+\delta]$ *où* $\delta \in \{0,1\}$ *est*

$$c_{n+\delta}.c_n$$

où $c_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$.

Preuve. Rappelons tout d'abord qu'à une permutation alternante correspond un arbre binaire croissant (ou décroissant) quasi-complet. En particulier, à une permutation de Baxter alternante sur $[2n]$ correspond un arbre binaire croissant [resp. décroissant] complet auquel il manque la feuille gauche [resp. droite] extrême tandis qu'à une permutation de Baxter alternante sur $[2n+1]$ correspond un arbre binaire croissant complet auquel il manque les deux feuilles (gauche et droite) extrêmes et un arbre binaire décroissant qui lui est complet.
De plus, un couple d'arbres binaires quasi-complets, du fait de leur quasi-complétude, constitue un couple d'arbres jumeaux. Ainsi, les permutations de Baxter alternantes sont en bijection avec les couples d'arbres binaires complets, et nous obtenons le résultat annoncé. □

La figure 7 illustre cette correspondance en la développant (ce qui est inutile pour le résultat ci-dessus) jusqu'au triplet de chemins pour constater que le second chemin a une forme fixe (en escalier). On retrouve naturellement par ce passage les mots de Dyck codant les arbres binaires croissant et décroissant associés à la permutation de Baxter alternante.

Preuve du théorème 2. Ce résultat est analogue à celui du théorème 1. En effet, aux permutations de Baxter alternantes sur $[2n+\delta]$ ayant i minima à gauche et s maxima à gauche correspondent deux mots de Dyck débutant exactement par i et $s-1$ lettres z (ou deux arbres binaires jumeaux dont les branches gauches ont respectivement i et $s-1$ sommets). Ces objets sont énumérés par les "ballot numbers" [9], ce qui nous donne le résultat. □

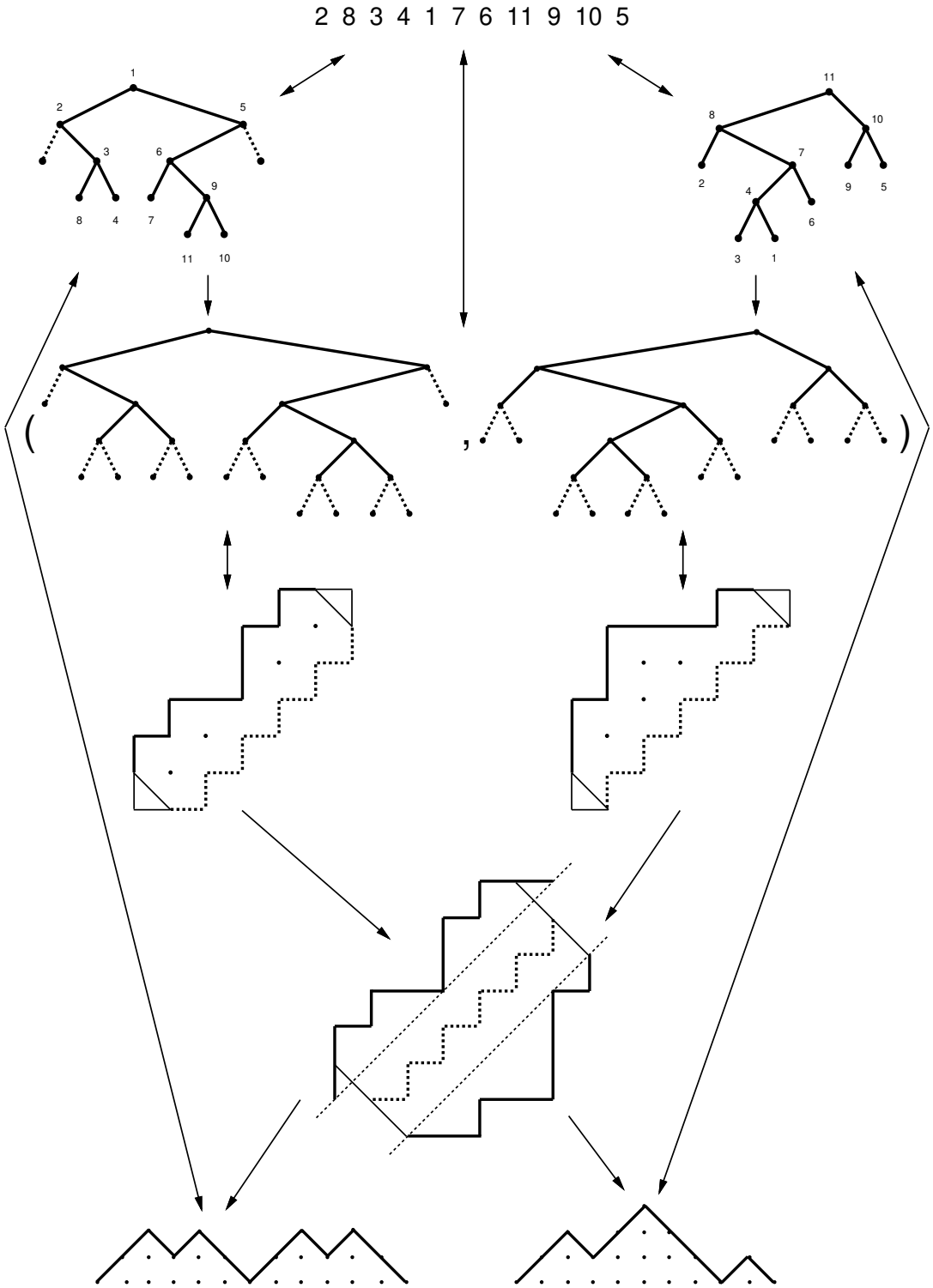

Figure 7: D'une permutation de Baxter alternante au couple de chemins de Dyck.

Théorème 7 *Le nombre de permutations de Baxter alternantes π sur $[2n+\delta]$ ayant i minima à gauche, s maxima à gauche, $p = md(\pi)$ et $q = dd(\pi)$ est*

$$\left[\binom{2n+\delta-i-p-1}{n-p} - \binom{2n+\delta-i-p-1}{n-i-p}\right] \cdot \left[\binom{2n+\delta-s-q-1}{n-s} - \binom{2n+\delta-s-q-1}{n-1}\right]$$

Preuve. C'est une conséquence directe du théorème 5 pour les permutations de Baxter alternantes. La formule se déduit de l'énumération des chemins de Dyck selon les hauteurs initiale et finale. □

Bibliographie

[1] G. Baxter, *On fixed points of the composite of commuting functions*, Proceedings of the American Mathematical Society **15** (1964), 851-855.

[2] F.R.K. Chung, R.L. Graham, V.E. Hoggatt et M. Kleiman, *The number of Baxter permutations*, Journal of Combinatorial Theory (Series A) **24** (1978), 382-394.

[3] R. Cori, S. Dulucq et G. Viennot, *Shuffle of parenthesis systems and Baxter permutations*, Journal of Combinatorial Theory (Series A) **43** (1986), 1-22.

[4] M. Delest et X. Viennot, *Algebraic languages and polyominoes enumeration*, Theorical Computer Science **34** (1984), 169-206.

[5] S. Dulucq et O. Guibert, *Mots de piles, tableaux standards et permutations de Baxter*, $6^{ème}$ conférence Séries Formelles et Combinatoire Algébrique, Dimacs (1994), soumis à Discrete Mathematics.

[6] F. Françon et X. Viennot, *Permutations selon les pics, creux, doubles-montées, doubles-descentes, nombres d'Euler et de Genocchi*, Discrete Mathematics **28** (1979), 21-35.

[7] I.M. Gessel et G. Viennot, *Binomial determinants, paths, and hook length formulae*, Advances in Mathematics **58** (1985), 300-321.

[8] S. Gire, *Arbres, permutations à motifs exclus et cartes planaires : quelques problèmes algorithmiques et combinatoires*, Thèse de l'Université Bordeaux I (1993).

[9] G. Kreweras, *Sur les éventails de segments*, Cahiers du Bureau Universitaire de Recherche Opérationnelle **15** (1970), 1-41.

[10] C.L. Mallows, *Baxter permutations rise again*, Journal of Combinatorial Theory (Series A) **27** (1979), 394-396.

[11] R.C. Mullin, *The enumeration of hamiltonian polygons in triangular maps*, Pacific Journal of Mathematics **16** (1966), 139-145.

[12] G. Viennot, *A bijective proof for the number of Baxter permutations*, Séminaire Lotharingien de Combinatoire, Le Klebach (1981).

[13] J. West, *Sorting twice through a stack*, $3^{ème}$ conférence Séries Formelles et Combinatoire Algébrique, Bordeaux, Theorical Computer Science **117** (1993), 303-313.