Mots de Piles, Tableaux Standards et Permutations de Baxter

S. Dulucq et O. Guibert*

LaBRI, Université Bordeaux I
URA CNRS 1304
351, cours de la Libération, 33405 Talence cédex France

Résumé

L'origine de ce travail est l'énumération des permutations triables par pile [9, 15, 16]. Ce problème, en particulier dans le cas de deux piles, fait apparaître des objets classiques en combinatoire tels que permutations à motifs exclus, cartes planaires non séparables [3, 4], et également les tableaux de Young standards lorsque l'on s'intéresse aux mouvements des piles.
Nous montrons ainsi que le nombre de tableaux de Young standards rectangulaires $3 \times n$ n'ayant pas deux entiers consécutifs sur la deuxième ligne est $c_n.c_n$ (où $c_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$) et que ces mêmes tableaux n'ayant pas deux entiers consécutifs sur la même ligne sont en correspondance avec les permutations de Baxter et donc au nombre de $\frac{\binom{n+1}{m}\cdot\binom{n+1}{m+1}\cdot\binom{n+1}{m+2}}{\binom{n+1}{1}\cdot\binom{n+1}{2}}$.
Nous obtenons également plusieurs formules correspondant à l'énumération de ces objets suivant divers paramètres.

Abstract

The origin of this work is based on the enumeration of stack-sortable permutations [9, 15, 16]. The problem, particularly in case of two stacks, exhibits classical objects in combinatorics such as permutations with forbidden subsequences, non separable planar maps [3, 4], and also standard Young tableaux if we are interested in the movements of stacks.
So, we show that the number of $3 \times n$ rectangular standard Young tableaux which avoid two consecutive integers on second row is $c_n.c_n$ (where $c_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$) and there is a one-to-one correspondence between the same tableaux which avoid two consecutive integers on the same row and Baxter permutations which are enumerated by $\frac{\binom{n+1}{m}\cdot\binom{n+1}{m+1}\cdot\binom{n+1}{m+2}}{\binom{n+1}{1}\cdot\binom{n+1}{2}}$.
We also give formulas enumerating these objects according to various parameters.

1 Introduction

D.E. Knuth [9] s'est intéressé aux permutations que l'on peut trier par passage dans une pile. Il les a caractérisées en termes de permutations à motifs exclus (c'est à dire ne comportant pas de sous-suite d'un certain type). En particulier, il a montré que seules les permutations ne comportant pas le motif 231 (c'est à dire ne comportant pas de sous-suite de type 231) pouvaient être triées par passage dans une pile. Cet ensemble, noté $S_n(231)$, est parfois appelé ensemble des permutations de Catalan car énuméré par les nombres $c_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$. De manière générale, les permutations à motifs exclus ont donné lieu à de nombreux travaux [12, 15, 7].

Dans le problème du tri d'une permutation par passage dans une seule pile, on constate immédiatement que pour trier une permutation, la pile ne peut contenir à tout instant que des entiers

allant en décroissant à partir du sommet de pile. Ainsi, dans un certain sens, la pile vérifie une condition dite "tour de Hanoï" par référence au problème du même nom.

Parmi les généralisations possibles du problème considéré par D.E. Knuth, J. West [15, 16] s'est intéressé à l'énumération des permutations triables par deux passages consécutifs dans une pile, celle-ci devant à tout instant obéir à la condition "tour de Hanoï". Il les caractérise en termes de permutations à motifs exclus en montrant qu'elles correspondent aux permutations de $S_n(2341, 3\overline{5}241)$: permutations de taille n excluant les motifs 2341 et 3241, ce dernier étant toutefois autorisé lorsqu'il est lui-même sous-suite du motif 35241 dans la permutation. J. West a également conjecturé que ces permutations sur n éléments étaient au nombre de $\frac{2.(3n)!}{(n+1)!(2n+1)!}$.

D. Zeilberger [18] a donné une preuve analytique de cette conjecture et plus récemment S. Dulucq, S. Gire, O. Guibert et J. West [3, 4] en ont donné une preuve combinatoire. Pour cela, ils donnent une correspondance entre les permutations de $S_n(2341, 3\overline{5}241)$ et les cartes planaires pointées non séparables ayant $n+1$ arêtes, ce qui conduit au résultat puisque W.T. Tutte [13] a montré que ces dernières étaient au nombre de $\frac{2.(3n)!}{(n+1)!(2n+1)!}$. De plus, les travaux [3, 4] donnent diverses formules correspondant aux distributions de ces permutations de $S_n(2341, 3\overline{5}241)$ suivant plusieurs paramètres (montées, minima).

Dans ce travail, nous nous intéressons plus particulièrement aux mouvements réalisés par les piles lorsque l'on essaie de trier une permutation. En particulier, dans le cas d'une seule pile, ses mouvements peuvent être codés par un mot d'un système de parenthèses (ou mot de Dyck) et l'énumération de ces mots donne à nouveau les nombres de Catalan (en fait, il y a une correspondance immédiate entre ces mots et les permutations de $S_n(231)$).

Dans le cas où l'on place k piles en série ($k \geq 1$) pour trier une permutation de n éléments, tous les mouvements admissibles de ces piles (sans imposer de condition) sont en correspondance avec les tableaux de Young standards [17] rectangulaires $(k+1) \times n$ (c'est à dire de forme $\lambda = (n, n, \ldots, n)$ partition de $(k+1).n$).

Le fait d'imposer certaines restrictions sur les piles (par exemple qu'elles vérifient une condition de type "tour de Hanoï") se traduit simplement par certaines restrictions sur ces tableaux de Young standards.

Ici, nous nous plaçons dans la situation où l'on dispose d'exactement deux piles ($k = 2$) et les objets correspondant aux mouvements de ces piles sont les tableaux de Young standards rectangulaires de hauteur 3.

Nous montrons en particulier que le nombre de tableaux de Young standards rectangulaires $3 \times n$ n'ayant pas deux entiers consécutifs sur la deuxième ligne est $c_n.c_n$, le carré du $n^{ème}$ nombre de Catalan, résultat à rapprocher de ceux obtenus par D. Gouyou-Beauchamps à propos de l'énumération de tableaux de Young standards de hauteur au plus 4 [8].

De plus, la restriction supplémentaire consistant à interdire deux entiers consécutifs sur la même ligne de ces tableaux nous permet de les mettre en correspondance avec les permutations de Baxter [1, 11, 14] qui sont au nombre de $\sum_{m=0}^{n-1} \frac{\binom{n+1}{m}.\binom{n+1}{m+1}.\binom{n+1}{m+2}}{\binom{n+1}{1}.\binom{n+1}{2}}$.

Nous obtenons également divers raffinements de ces formules d'énumération en considérant certaines distributions de ces objets.

La première partie de cet article est consacrée à la définition des divers objets que nous considérons (mots de piles, tableaux de Young standards arbres jumeaux) et à l'énoncé des résultats obtenus. Dans la deuxième partie, nous rappelons la notion de mélange (ou shuffle) de mots de pa-

renthèses et la correspondance mise en évidence par R. Cori, S. Dulucq et X. Viennot [2] entre ces mots et les couples d'arbres binaires d'une part, et les permutations de Baxter alternantes d'autre part. Cette bijection sera le point de départ pour l'obtention des résultats annoncés précédemment et que nous prouvons dans la troisième partie. Enfin, dans la dernière partie, nous donnons quelques raffinements des formules d'énumération obtenues plus tôt.

Les preuves des résultats seront données dans la version définitive [5].

2 Mots de piles

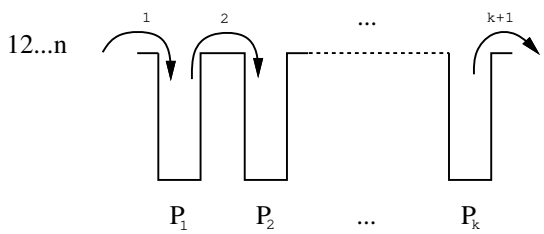

Figure 1: Mots de piles

Dans sa thèse [7], S. Gire considère un ensemble de k piles placées en série et s'intéresse aux mouvements des piles lorsque l'on fait passer la permutation identité $\zeta = 12\ldots n$ au travers de ces k piles. Les mots du langage $Y_n^{(k)} = \{f \in \{1,2,\ldots,k+1\}^* : \forall i \in [1;k], \forall f = f'f'', |f'|_i \geq |f'|_{i+1}; \forall i \in [1;k+1], |f|_i = n\}$ codent exactement tous les mouvements de k piles lorsque ζ les traverse (voir la figure 1). Ce langage $Y_n^{(k)}$ code aussi tous les tableaux de Young standards [17] rectangulaires de hauteur $k+1$ et de longueur n. On déduit de la formule des équerres [6] que $|Y_n^{(k)}| = ((k+1).n)! \prod_{i=0}^{k} \frac{i!}{(n+i)!}$.

Lorsque $k = 1$ (une seule pile), les mots de $Y_n^{(1)}$ sont exactement les mots de parenthèses.
Les notations et les résultats (classiques) que nous considérons par la suite sont les suivants.

- Le langage $P_{z,\overline{z}}$ sur l'alphabet $\{z, \overline{z}\}$ (correspondant à $Y_{n\geq 0}^{(1)}$) est le langage des mots des systèmes de parenthèses bien formées (ou mots de Dyck).
- A_n désigne l'ensemble des arbres binaires complets ayant $2n+1$ sommets dont $n+1$ feuilles.
- La bijection entre un mot de $P_{z,\overline{z}}$ et un arbre binaire complet a est définie par le codage suivant :

$$code(a) = \begin{cases} \epsilon & \text{si } a \text{ est 1 sommet} \\ z\ code(sous_arbre_gauche(a))\ \overline{z}\ code(sous_arbre_droit(a)) & \text{sinon} \end{cases}$$

- Le nombre d'arbres binaires complets ayant $2n+1$ sommets est donné par le $n^{ème}$ nombre de Catalan $c_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$.
- $\mathcal{A} = \{1,2,3\}$ désigne l'alphabet des mots associés à deux piles.
- $Y = \{f \in \mathcal{A}^* : \forall f = f'f'', |f'|_1 \geq |f'|_2 \geq |f'|_3; |f|_1 = |f|_2 = |f|_3\}$ est le langage des mots codant les mouvements de piles et correspond aux tableaux de Young standards rectangulaires de hauteur 3.

- $Y_n = Y_n^{(2)} = \{f \in Y : |f| = 3n\}$.

Faisant suite aux travaux de S. Gire [7], nous considérons différentes restrictions sur ce langage Y_n, restrictions correspondant à l'extension de la condition "tour de Hanoï" imposée aux piles lors du tri d'une permutation. En effet, cette condition se traduit par, non plus considérer le langage Y_n, mais le langage $H_n = Y_n \backslash \{f = f'2g2f'' : g \in Y\}$.

Conjecture 1 *[7]* $|H_n| = \frac{2^n(3n)!}{(n+1)!(2n+1)!}$.

S. Gire [7] a également conjecturé les deux résultats suivants que nous démontrons dans cet article.

Théorème 1 *Le nombre de mots du langage* $C_n = Y_n \backslash \{\mathcal{A}^*22\mathcal{A}^*\}$ *codant des tableaux de Young standards rectangulaires de hauteur* 3 *et de longueur* n *n'ayant pas deux entiers consécutifs sur la deuxième ligne est*

$$|C_n| = c_n.c_n$$

Théorème 2 *Le nombre de mots du langage* $B_n = Y_n \backslash \{\mathcal{A}^*11\mathcal{A}^*, \mathcal{A}^*22\mathcal{A}^*, \mathcal{A}^*33\mathcal{A}^*\}$ *codant des tableaux de Young standards rectangulaires de hauteur* 3 *et de longueur* n *n'ayant pas deux entiers consécutifs sur la même ligne est*

$$|B_n| = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\binom{n+1}{m}.\binom{n+1}{m+1}.\binom{n+1}{m+2}}{\binom{n+1}{1}.\binom{n+1}{2}}$$

La preuve du théorème 2 va nous amener à considérer une famille de couples d'arbres binaires complets particuliers : les arbres jumeaux.

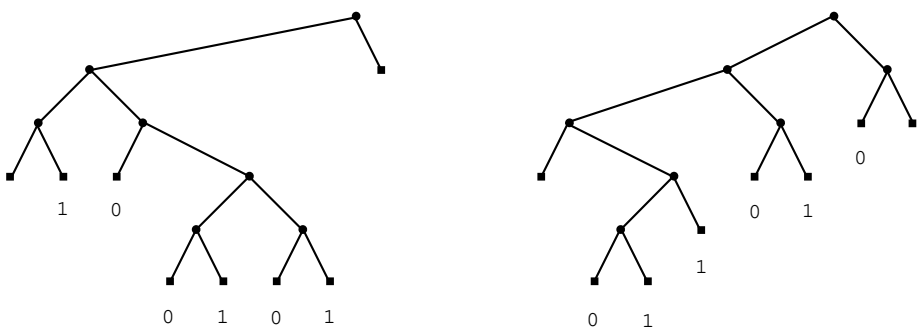

Figure 2: Deux arbres jumeaux

Définition 1
L'ensemble des arbres jumeaux $J_n \subseteq A_n \times A_n$ *est l'ensemble*
$J_n = \{(a_1, a_2) : a_1, a_2 \in A_n$ *et* $\Theta(code(a_1)) = \Theta^c(code(a_2))\}$
où Θ *est l'application surjective de* $P_{z,\overline{z}}$ *dans* $\{0,1\}^*$ *définie par*
$\Theta(z^l\overline{z}w_{l+2}w_{l+3}\ldots w_{2n}) = \Theta(\overline{z}w_{l+2})\Theta(w_{l+2}w_{l+3})\ldots\Theta(w_{2n-1}w_{2n})$
avec $\Theta(zz) = \Theta(\overline{z}z) = \epsilon$ *(le mot vide),* $\Theta(z\overline{z}) = 0$, $\Theta(\overline{z}\overline{z}) = 1$
et Θ^c *est identique à* Θ *modulo l'échange des lettres* 0 *et* 1.

Remarquons que l'application Θ consiste en l'étiquetage des feuilles gauches (respectivement droites) d'un arbre binaire complet par la lettre 0 (respectivement 1) excepté les deux feuilles extrêmes, et que deux arbres sont jumeaux si et seulement si leurs étiquetages sont complémentaires.

Exemple 1 *La figure 2 montre deux arbres jumeaux appartenant à J_7. En effet,* $\Theta(zzz\overline{z}\overline{z}\overline{z}zz\overline{z}zz\overline{z}\overline{z}\overline{z}) = \Theta^c(zzz\overline{z}zz\overline{z}\overline{z}\overline{z}z\overline{z}\overline{z}\overline{z}) = 100101$.

Une conséquence du théorème 2 sera la suivante.

Corollaire 1 *Le nombre d'arbres jumeaux de J_n est* $|J_n| = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\binom{n+1}{m}\cdot\binom{n+1}{m+1}\cdot\binom{n+1}{m+2}}{\binom{n+1}{1}\cdot\binom{n+1}{2}}$.

3 Mélange de mots de parenthèses

Avant de prouver les théorèmes 1 et 2 et le corollaire 1, nous rappelons quelques définitions et résultats sur les permutations de Baxter et sur les mélanges de mots de parenthèses.

Définition 2 *Une permutation π de S_n est une permutation de Baxter si et seulement si, pour tout p, $1 \leq p < n$, π se factorise de manière unique sous la forme $\pi = \pi'\ p\ \pi^<\ \pi^>\ p+1\ \pi''$ ou $\pi = \pi'\ p+1\ \pi^>\ \pi^<\ p\ \pi''$ telle que toutes les lettres de $\pi^<$ (respectivement $\pi^>$) sont inférieures à p (respectivement supérieures à $p+1$).*
On note $Baxter_n$ l'ensemble de ces permutations de S_n.

On peut remarquer que les deux "plus petites" permutations qui ne sont pas des permutations de Baxter sont 2413 et 3142. L'ensemble des permutations de Baxter peut s'exprimer en termes de motifs exclus [7] et l'on a $Baxter_n = S_n(25\overline{3}14, 41\overline{3}52)$.

F.R.K. Chung, R.L. Graham, V.E. Hoggatt et M. Kleiman [1] ont démontré analytiquement que le nombre de permutations de Baxter de taille n est $b_n = |Baxter_n| = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\binom{n+1}{m}\cdot\binom{n+1}{m+1}\cdot\binom{n+1}{m+2}}{\binom{n+1}{1}\cdot\binom{n+1}{2}}$. X. Viennot [14] en a donné par la suite une preuve combinatoire dans laquelle il obtient la distribution de ces permutations selon le nombre de montées (terme m de la somme), résultat également prouvé analytiquement par C.L. Mallows [11].

La correspondance entre permutations (alternantes) et arbres binaires (complets) croissants nous sera utile par la suite. Nous la rappelons brièvement.

$$abc(u) =< abc(v), x, abc(w) > \text{ où } u = vxw, x = \min\{u_i : u = u_1 u_2 \dots u_p\}.$$

Cette construction est bijective; il suffit de lire la projection en ordre infixe de l'étiquetage des sommets de l'arbre binaire croissant pour obtenir la permutation.

Définissons maintenant quelques autres objets.

- $\widehat{Baxter}_{2n} = \{\pi \in Baxter_{2n} : \forall i \in [1,n], \pi(2i-1) < \pi(2i) > \pi(2i+1)\}$ est l'ensemble des permutations de Baxter alternantes.
- $M_{2n} = \{\alpha \in P_{a,\overline{a}} \sqcup\!\sqcup P_{b,\overline{b}}; |\alpha| = 2n; \forall \alpha = \alpha' b \alpha'', |\alpha'|_a > |\alpha'|_{\overline{a}}\}$ est le langage produit de mélange (ou shuffle) de deux langages de parenthèses.

R. Cori, S. Dulucq et X. Viennot ont établi [2] une bijection, que nous noterons Υ, entre le langage M_{2n} mélangeant deux langages de parenthèses, l'ensemble $\widehat{Baxter}_{2n}$ des permutations de Baxter alternantes, et l'ensemble de tous les couples d'arbres binaires complets ayant chacun $2n+1$ sommets. Ainsi, ces trois familles d'objets sont énumérées par $c_n.c_n$, carré du $n^{ème}$ nombre de Catalan.

La première étape, notée Υ_1, met en correspondance un mot α de M_{2n} et une permutation π de $\widehat{Baxter}_{2n}$. Partant de l'arbre binaire complet réduit à trois sommets, c'est à dire deux feuilles libres et un sommet interne étiqueté 1, on applique séquentiellement les opérateurs correspondant aux lettres $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{2n}$ du mot α. Ces opérateurs sont les suivants :

opérateur a : étiqueter la feuille gauche libre la plus à droite et lui ajouter deux arêtes
opérateur b : étiqueter la feuille droite libre la plus à gauche et lui ajouter deux arêtes
opérateur $\overline{b}$: étiqueter la feuille gauche libre la plus à droite
opérateur $\overline{a}$: étiqueter la feuille droite libre la plus à gauche

Finalement on obtient un arbre binaire complet croissant dont la projection infixe est la permutation π de $\widehat{Baxter}_{2n}$.

La deuxième étape, notée Υ_2, consiste à prendre respectivement les arbres binaires croissant $abc(\pi)$ et décroissant $abd(\pi)$ correspondant à π et à oublier leurs étiquettes.

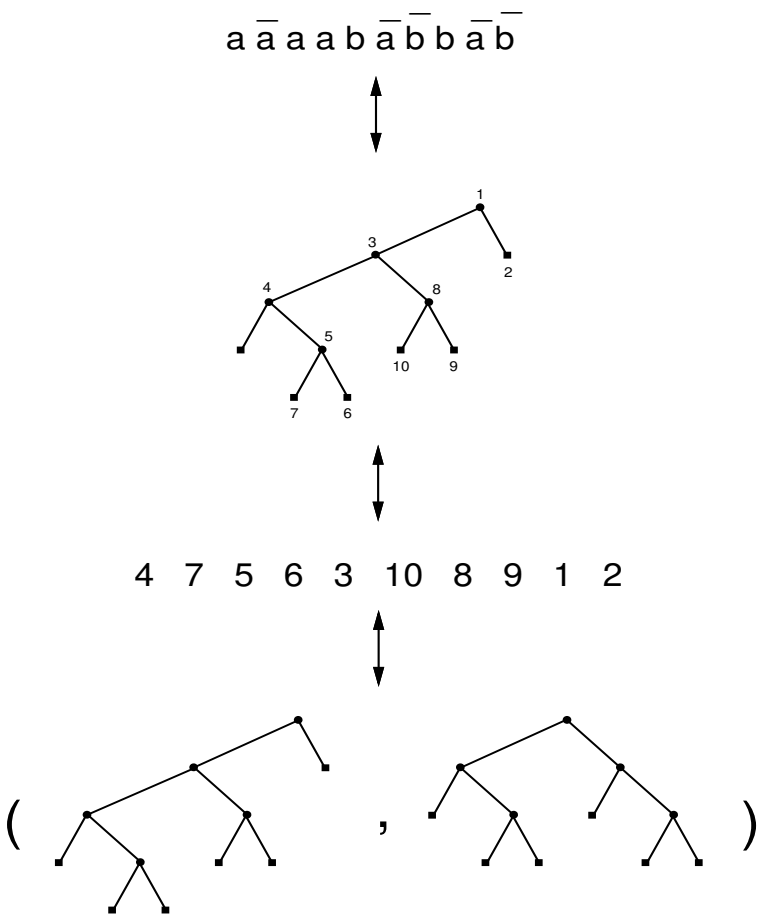

Figure 3: La bijection Υ

Exemple 2 *La figure 3 montre la bijection* Υ *entre le mot* $a\overline{a}aab\overline{a}\overline{b}b\overline{a}\overline{b}$ *de* M_{10}*, la permutation 4.7.5.6.3.10.8.9.1.2 de* $\widehat{Baxter}_{10}$ *et un couple d'arbres binaires complets ayant chacun* 11 *sommets.*

4 Enumération de certains mots de piles

4.1 Tableaux standards n'ayant pas deux entiers consécutifs sur la deuxième ligne

La preuve du théorème 1 repose sur le résultat suivant.

Lemme 1 *Le morphisme* Φ *défini par*

$$\Phi \quad : \quad \begin{array}{ccc} M_{2n} & \longrightarrow & C_n \\ \alpha = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{2n} & \longmapsto & f = \Phi(\alpha_1)\Phi(\alpha_2)\cdots\Phi(\alpha_{2n}) \end{array} \quad avec \begin{cases} \Phi(a) &= 1 \\ \Phi(b) &= 21 \\ \Phi(\overline{a}) &= 23 \\ \Phi(\overline{b}) &= 3 \end{cases}$$

est une bijection entre M_{2n} *et* C_n *(l'ensemble des mots de piles sans facteur* 22*).*

Preuve. On constate immédiatement que Φ est une application de M_{2n} dans C_n et que sa réciproque est clairement définie, l'ensemble $\{1, 21, 23, 3\}$ étant un code préfixe.
Il reste maintenant à s'assurer que les conditions imposées à α et à f sont les mêmes.

$|\alpha| = 2n, |\alpha|_a = |\alpha|_{\overline{a}}, |\alpha|_b = |\alpha|_{\overline{b}} \Longleftrightarrow |f|_1 = |f|_2 = |f|_3 = n$
puisque $|\alpha|_a + |\alpha|_b = n, |\alpha|_b + |\alpha|_{\overline{a}} = n, |\alpha|_{\overline{a}} + |\alpha|_{\overline{b}} = n$
$\forall \alpha = \alpha'\alpha'', |\alpha'|_a \geq |\alpha'|_{\overline{a}}$ et $|\alpha'|_b \geq |\alpha'|_{\overline{b}} \Longleftrightarrow \forall f = f'f'', |f'|_1 \geq |f'|_2 \geq |f'|_3$
ou encore $|\alpha'|_a + |\alpha'|_b \geq |\alpha'|_{\overline{a}} + |\alpha'|_b \geq |\alpha'|_{\overline{a}} + |\alpha'|_{\overline{b}}$
$\forall \alpha = \alpha' b \alpha'', |\alpha'|_a > |\alpha'|_{\overline{a}} \Longleftrightarrow \forall f = f' 21 f'', |f'|_1 > |f'|_2$
car le facteur 21 impose qu'il y ait un excédent stricte de 1 à sa gauche. □

Exemple 3 *Les mots* $a\overline{a}aab\overline{a}\overline{b}b\overline{a}\overline{b}$ *de* M_{10} *et* 123112123321233 *de* C_5 *sont en bijection par* Φ*.*

4.2 Tableaux standards n'ayant pas deux entiers consécutifs sur une même ligne

La preuve du théorème 2 se fait en deux étapes. La première consiste à considérer le langage B_n comme sous-ensemble du langage C_n et à caractériser les objets obtenus lorsqu'on lui applique les bijections Φ et Υ : ainsi apparaissent les arbres jumeaux. La seconde a pour but de mettre en correspondance ces arbres jumeaux et les permutations de Baxter.

Lemme 2 *Le morphisme* Φ *est une bijection entre* B_n *(ensemble des mots de piles sans facteur* $11, 22, 33$*) et* $\tilde{M}_{2n} = \{\alpha \in M_{2n} : |\alpha|_{aa} = |\alpha|_{ba} = |\alpha|_{\overline{a}\overline{b}} = |\alpha|_{\overline{b}\overline{b}} = 0\}$ *le langage des mots mélanges de deux mots de parenthèses sans facteur* $aa, ba, \overline{a}\overline{b}, \overline{b}\overline{b}$*.*

Définition 3 *L'ensemble* $\widetilde{Baxter}_{2n}$ *est l'ensemble des permutations de Baxter alternantes vérifiant pour tout* p*,* $1 \leq p < 2n$*, si* $\pi = \pi'.p+1.\pi^{>}.\pi^{<}.p.\pi''$ *alors* $\pi^{>} = \epsilon \Longleftrightarrow \pi^{<} = \epsilon$
($\pi^{>}$ *et* $\pi^{<}$ *sont soit tous deux vides, soit tous deux non vides).*

Lemme 3 *La bijection* Υ *met en correspondance le langage* $\tilde{M}_{2n}$*, l'ensemble des permutations* $\widetilde{Baxter}_{2n}$ *et l'ensemble des arbres jumeaux* J_n*.*

Exemple 4 *La figure 4 présente la correspondance* Φ *entre le mot* 12312132121313123232 3 *de* B_7*, le mot* $a\overline{a}ab\overline{b}bbb\overline{b}ba\overline{a}aa\overline{a}$ *de* $\tilde{M}_{14}$*, la permutation 11.12.3.5.4.10.9.13.6.8.7.14.1.2 de* $\widetilde{Baxter}_{14}$ *obtenue par* Υ_1 *et les arbres jumeaux appartenant à* J_7 *(déjà considérés dans l'exemple 1) obtenus par* Υ_2*.*

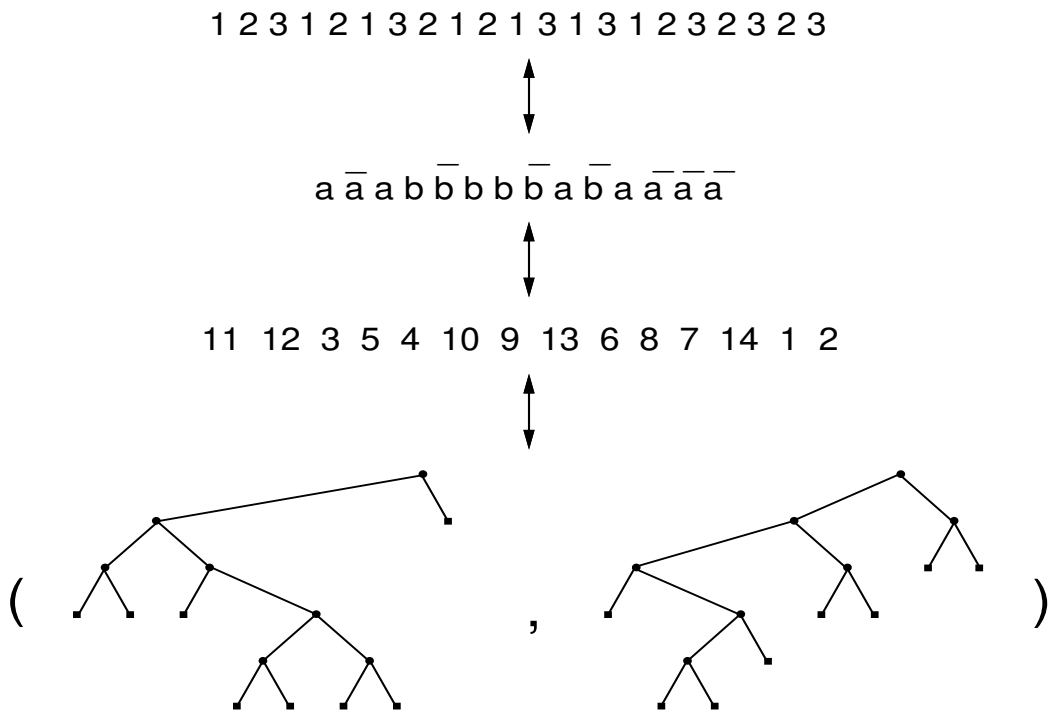

Figure 4: Restrictions sur les bijections Φ et Υ

Considérons l'ensemble $\tilde{J}_n$ des arbres jumeaux effeuillés obtenus par suppression de toutes les feuilles des arbres jumeaux de J_n, processus clairement bijectif [9].

Lemme 4 *Il existe une bijection Ψ entre les permutations appartenant à $Baxter_n$ et les arbres jumeaux de $\tilde{J}_n$.*

$$\begin{array}{rccc} \Psi & : & Baxter_n & \longrightarrow & \tilde{J}_n \\ & & \pi & \longmapsto & (a_1, a_2) \end{array}$$

L'application Ψ et son inverse peuvent être définies de la façon suivante.

- Ψ consiste, pour une permutation π appartenant à $Baxter_n$, à construire ses arbres binaires croissant et décroissant. Les deux arbres binaires (a_1, a_2) sont respectivement ces deux arbres dépouillés de l'étiquetage de leurs sommets.
- L'application inverse Ψ^{-1} peut être décrite par l'algorithme suivant opérant sur un couple d'arbres jumeaux effeuillés (a_1, a_2) ayant n sommets.

  Pour k variant de n à 1, on répète le processus suivant :

  considérant l'ordre infixe sur les sommets de a_1 et a_2, soit i l'ordre de la racine de a_2
  étiquetons k la $i^{ème}$ feuille f de a_1
  si f est une feuille gauche
  alors soit s le dernier sommet de la branche gauche du sous arbre droit de a_2 ;
  greffer le sous arbre gauche de a_2 sur le sommet s
  sinon soit s le dernier sommet de la branche droite du sous arbre gauche de a_2 ;
  greffer le sous arbre droit de a_2 sur le sommet s
  supprimer la racine de a_2
  supprimer la feuille f de a_1

Au cours de cet algorithme, un étiquetage croissant des sommets de a_1 est réalisé; la permutation π est obtenue en projetant en ordre infixe cet étiquetage.

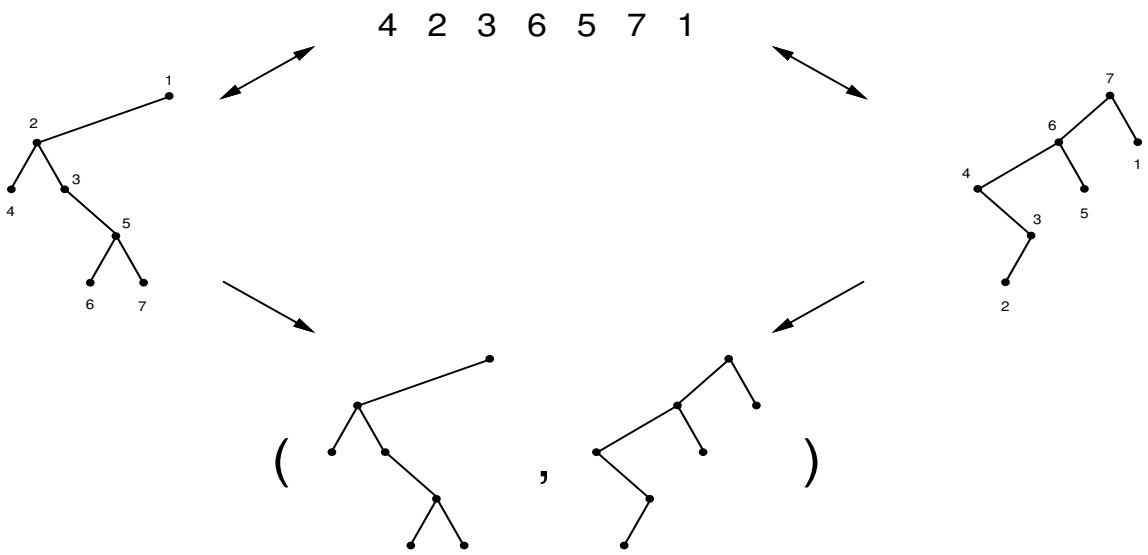

Figure 5: La bijection Ψ

Exemple 5 *La figure 5 présente la bijection Ψ entre la permutation 4.2.3.6.5.7.1 de $Baxter_7$, ses arbres binaires croissant et décroissant, et les arbres jumeaux de $\tilde{J}_7$ (correspondant aux arbres de l'exemple 1).*

5 Raffinement des résultats

Les formules d'énumération des théorèmes 1 et 2 peuvent en fait être précisées en considérant certaines distributions des objets mis en jeu.

5.1 Tableaux standards n'ayant pas deux entiers consécutifs sur la deuxième ligne

Soit $A_{n,k}$ l'ensemble des arbres binaires complets ayant $2n+1$ sommets ($n+1$ feuilles) et k feuilles gauches, c'est à dire l'ensemble des mots de $P_{z,\overline{z}}$ de longueur $2n$ et ayant k facteurs $z\overline{z}$.
Il est bien connu [10] que $|A_{n,k}| = \frac{1}{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k-1}$.

On en déduit, en précisant la bijection Φ, la distribution suivante donnant le nombre de tableaux de Young standards ne comportant pas deux entiers consécutifs sur la deuxième ligne et ayant i entiers consécutifs $(k, k+1)$ sur les lignes 2 et 3 et j entiers consécutifs sur les lignes 1 et 2.

Corollaire 2

$$\begin{aligned} & |\{f \in C_n : |f|_{23} = i, |f|_{12} = j\}| \\ = \; & |\{\alpha \in M_{2n} : |\alpha|_{\overline{a}} = i, |\alpha|_{ab} + |\alpha|_{bb} + |\alpha|_{a\overline{a}} + |\alpha|_{b\overline{a}} = j\}| \\ = \; & |\{(w_1, w_2) \in P_{z,\overline{z}} \times P_{z,\overline{z}} : |w_1| = |w_2| = 2n; |w_1|_{\overline{z}z} + 1 = i, |w_2|_{z\overline{z}} = j\}| \\ = \; & \frac{1}{n^2}\binom{n}{i}\binom{n}{i-1}\binom{n}{j}\binom{n}{j-1}. \end{aligned}$$

5.2 Tableaux standards n'ayant pas deux entiers consécutifs sur une même ligne

Certains paramètres étant conservés par les bijections Φ, Υ et Ψ, nous obtenons les deux résultats suivants. Le premier donne la distribution des tableaux de Young standards ne comportant pas d'entiers consécutifs sur la même ligne et ayant m entiers consécutifs $(k, k+1)$ sur les lignes 1 et 3. Le second provient des travaux de C.L. Mallows [11] sur les permutations de Baxter, objets sur lesquels il ne donne que l'interprétation du paramètre m.

Corollaire 3 $|\{f \in B_n : |f|_{13} = m\}| = \frac{\binom{n+1}{m}.\binom{n+1}{m+1}.\binom{n+1}{m+2}}{\binom{n+1}{1}.\binom{n+1}{2}}$.

Corollaire 4

$|\{\pi \in Baxter_n$ *ayant* m *montées,* g *maxima à gauche,* d *maxima à droite* $\}|$
$= |\{(a_1, a_2) \in J_n : a_2$ *a* m *feuilles droites,* g *et* d *arêtes sur sa branche resp. gauche et droite* $\}|$
$= \binom{n+1}{m+1}\frac{g.d}{n.(n+1)}[\binom{n-g-1}{n-m-2}\binom{n-d-1}{m-1} - \binom{n-g-1}{n-m-1}\binom{n-d-1}{m}]$.

Bibliographie

[1] F.R.K. Chung, R.L. Graham, V.E. Hoggatt et M. Kleiman, *The Number of Baxter Permutations*, J. Comb. Theory A **24** (1978), 382-394.

[2] R. Cori, S. Dulucq et G. Viennot, *Shuffle of Parenthesis Systems and Baxter Permutations*, J. Comb. Theory A **43** (1986), 1-22.

[3] S. Dulucq, S. Gire et J. West, *Permutations à Motifs Exclus et Cartes Planaires non Séparables*, $5^{ème}$ conférence Formal Power Series and Algebraic Combinatorics, Florence, soumis à Disc. Math. (1993).

[4] S. Dulucq, S. Gire et O. Guibert, *Une Preuve Combinatoire de la Conjecture de J. West*, publication du LaBRI (1993).

[5] S. Dulucq et O. Guibert, *Stack Words, Standard Tableaux and Baxter Permutations*, en préparation.

[6] J.S. Frame, G. de B. Robinson et R.M. Trall, *The Hook Graphs of the Symetric Group*, Can. J. Math. **6** (1954), 316-324.

[7] S. Gire, *Arbres, Permutations à Motifs Exclus et Cartes Planaires : Quelques Problèmes Algorithmiques et Combinatoires*, Thèse de l'Université Bordeaux I (1993).

[8] D. Gouyou-Beauchamps, *Standard Young Tableaux of Height* 4 *and* 5, Eur. J. Comb. **10** (1989), 69-82

[9] D.E. Knuth, *The Art of Computer Programming*, volume 1 / Fundamental Algorithms, Addison-Wesley, Reading, MA (1973).

[10] G. Kreweras, *Sur les Éventails de Segments*, Cahiers du BURO **15** (1970), 1-41.

[11] C.L. Mallows, *Baxter Permutations Rise Again*, J. Comb. Theory A **27** (1979), 394-396.

[12] R. Simion et F.W. Schmidt, *Restricted Permutations*, Eur. J. Comb. **6** (1985), 383-406.

[13] W.T. Tutte, *A Census of Planar Maps*, Can. J. Math. **15** (1963), 249-271.

[14] G. Viennot, *A Bijective Proof for the Number of Baxter Permutations*, Séminaire Lotharingien de Combinatoire, Le Klebach (1981).

[15] J. West, *Permutations with Forbidden Subsequences and Stack-Sortable Permutations*, Ph.D. Thesis, M.I.T., Cambridge, MA (1990).

[16] J. West, *Sorting Twice Through a Stack*, $3^{ème}$ conférence Formal Power Series and Algebraic Combinatorics, Bordeaux, Theor. Comp. Sci. **117** (1993), 303-313.

[17] A. Young *The collected papers of Alfred Young*, Mathematical Expositions 21, University of Toronto Press.

[18] D. Zeilberger, *A Proof of Julian West's Conjecture that the Number of Two-Stack Sortable Permutations of Length* n *is* $2(3n)!/((n+1)!(2n+1)!)$, soumis à Disc. Math. (1992).