DE L'ALGÈBRE DES ζ DE RIEMANN MULTIVARIÉES À L'ALGÈBRE DES ζ DE HURWITZ MULTIVARIÉES

HOANG NGOC MINH, GÉRARD JACOB, MICHEL PETITOT, NOUR EDDINE OUSSOUS.

Abstract. The theory of noncommutative rational power series allows to express as iterated integrals some generating series associated to polylogarithms and MZV's (*multiple zeta values* : a generalization of the Riemann ζ function), the multiple Hurwitz ζ functions (a generalization of the classical Hurwitz ζ function). Using the shuffle product of rational power series, we give formulae to multiply these generating series. We clarify again another shuffle product for the multiple Hurwitz ζ. As application of this structure, we get a *new* algorithm to generate relations between *coloured* MZV's by means of the generalized Dirichlet generating series associated to periodic number series. The ζ functions include divergent terms. Using the words combinatorics, we give explicit formulae for *syntactic regularization* of divergent terms and an application of this regularization to the computation of Arakawa-Kaneko's integrals in terms of MZV's.

Résumé. La théorie des séries rationnelles en variables non commutatives permet d'exprimer sous forme d'intégrales itérées certaines séries génératrices associées aux polylogarithmes et aux MZV's (*multiple zeta values* :une généralisation de la fonction ζ de Riemann), les fonctions ζ de Hurwitz multivariées (une généralisation de la fonction ζ de Hurwitz classique). En nous basant sur le produit de mélange des séries rationnelles, nous donnons des formules pour multiplier ces séries génératrices. Nous explicitons également un autre produit de mélange pour les ζ de Hurwitz multivariés. Comme application de cette structure, nous obtenons un *nouvel* algorithme pour engendrer des relations entre les MZV's *colorés* par l'intermédiaire des séries génératrices de Dirichlet généralisées associées aux suites de nombres périodiques. Les fonctions ζ comportent des termes divergents. En nous basant sur la combinatoire des mots, nous donnons des formules explicites pour la *régularisation syntaxique* des termes divergents et une application de cette régularisation au calcul des intégrales d'Arakawa-Kaneko en termes des MZV's.

1. Matériels de base

1.1. Séries rationnelles et intégrales itérées. Soit X un alphabet fini. Le monoïde libre engendré par X est le monoïde X^* des mots sur l'alphabet X. Le mot vide est noté par "ϵ". Nous notons X^+ l'ensemble $X^* \setminus \{\epsilon\}$. Soient $t_1, \ldots, t_r, \ldots$ des variables formelles commutatives. Nous notons A l'anneau $\mathbb{C}[t_1, \ldots, t_r, \ldots]$. Nous notons également $A\langle X\rangle$ et $\mathrm{Sh}_A\langle X\rangle$ les algèbres des polynômes sur X^* à coefficients dans A, munies respectivement du produit de Cauchy (associatif, non commutatif et admettant ϵ comme élément neutre) et du produit de mélange (associatif, commutatif et admettant ϵ comme élément neutre) [4]. De même, nous notons $A\langle\langle X\rangle\rangle$ et $\mathrm{Sh}_A\langle\langle X\rangle\rangle$ les algèbres des séries formelles sur X^* à coefficients dans A, munies respectivement du produit de Cauchy et du produit de mélange. Rappelons que le produit de mélange de u et v est défini récursivement comme suit :

$$(1)\begin{cases} \epsilon \sqcup\!\sqcup u &= u \sqcup\!\sqcup \epsilon = u, \\ u \sqcup\!\sqcup v &= a(u' \sqcup\!\sqcup v) + b(u \sqcup\!\sqcup v') \quad \text{pour tous } u, u', v, v' \in X^*, u = au, v = bv', a, b \in X. \end{cases}$$

Il est étendu naturellement aux séries formelles par linéarité. Pour toute série $S \in A\langle\langle X\rangle\rangle$ sans terme constant, on pose $S^* = (1-S)^{-1}$ et on note $S^+ = SS^* = S^* - 1$. Une série est dite *rationnelle* [4] si elle est obtenue à partir des lettres par un nombre fini d'opérations dites rationnelles : combinaisons linéaires, produit de Cauchy, étoile. Considérons les séries rationnelles de la forme :

$$(2)\qquad (t_1x_0)^* x_{i_1} \cdots (t_r x_0)^* x_{i_r} = \sum_{s_1, \ldots, s_r > 0} (t_1 x_0)^{s_1 - 1} x_{i_1} \cdots (t_r x_0)^{s_r - 1} x_{i_r}.$$

Le produit de mélange de deux séries rationnelles est une série rationnelle. En particulier, soient $U = (ux_0)^*xU'$ et $V = (vx_0)^*yV'$, où $u, v \in A$, $x, y \in X$ et U', V' sont de la forme (2). Le produit de mélange "$U \sqcup\!\sqcup V$" vérifie la formule récursive suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lclcl} U \sqcup\!\sqcup \epsilon & = & \epsilon \sqcup\!\sqcup U & = & U, \\ U \sqcup\!\sqcup V & = & ((u+v)x_0)^*[x(U' \sqcup\!\sqcup V) + y(U \sqcup\!\sqcup V')]. \end{array} \right. \tag{3}$$

A chaque lettre x_i de l'alphabet $X = \{x_0, \ldots, x_m\}$ associons une forme différentielle ω_i. Pour tout chemin γ allant de z_0 à z dans $\mathbb{C}$ et pour tout entier $i_1, \ldots, i_n$, on définit l'*intégrale itérée* de Chen [7] du chemin γ d'origine z_0 et de but z par rapport aux formes différentielles $\omega_i, i = 1..m$:

$$\int_{z_0,\gamma}^{z} \omega_{i_1}\omega_{i_2}\ldots\omega_{i_n} = \int_{z_0,\gamma}^{z} \omega_{i_1}(z_1) \int_{z_0,\gamma}^{z_1} \omega_{i_2}\ldots\omega_{i_n} \text{ si } n > 0, \text{ et } 1 \text{ sinon.} \tag{4}$$

Les mots $w \in X^*$ permettent de coder les intégrales (4). Nous notons ces intégrales par $\alpha_{z_0,\gamma}^{z}(w)$:

$$\alpha_{z_0,\gamma}^{z}(w) = \int_{z_0,\gamma}^{z} \omega_{i_1}\omega_{i_2}\ldots\omega_{i_k} \text{ si } w = x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}, \text{ et } 1 \text{ si } w = \epsilon. \tag{5}$$

Pour toute série $S \in A\langle\!\langle X \rangle\!\rangle$, on associe (sous réserve de convergence [10]) :

$$\alpha_{z_0,\gamma}^{z}(S) = \sum_{w \in X^*} (S|w)\, \alpha_{z_0,\gamma}^{z}(w). \tag{6}$$

Soit φ une primitive de ω_0. D'après le théorème de convolution [10] nous avons :

$$\alpha_{z_0,\gamma}^{z}(x_0^n x_1) = \int_{z_0,\gamma}^{z} \frac{[\varphi(z) - \varphi(s)]^n}{n!}\omega_1(s) \quad \text{et} \quad \alpha_{z_0,\gamma}^{z}(x_0^* x_1) = \int_{z_0,\gamma}^{z} e^{\varphi(z)-\varphi(s)}\omega_1(s). \tag{7}$$

1.2. **Polylogarithmes et** MZV**'s.** Dans la suite, nous considérons $X = \{x_0, x_1\}$ et les formes différentielles $\omega_0 = dz/z$ et $\omega_1 = dz/(1-z)$. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur le chemin d'intégration, nous l'omettons. Soit $\mathcal{C}$ l'anneau $\mathbb{C}[z, 1/z, 1/(1-z)]$. Nous notons $\mathrm{LI}_{\mathcal{C}}$ la plus petite $\mathcal{C}$-algèbre qui contient $\mathcal{C}$ et qui est stable par intégration par rapport à ω_0 et ω_1. Considérons la série $L \in \mathrm{LI}_{\mathcal{C}}\langle\!\langle X \rangle\!\rangle$ qui vérifie l'équation différentielle suivante :

$$dL(z) = (x_0\omega_0 + x_1\omega_1)L(z) \quad \text{avec} \quad L(\varepsilon) = e^{x_0 \log \varepsilon} + O(\sqrt{\varepsilon}) \text{ si } \varepsilon \to 0^+. \tag{8}$$

Les coefficients de L sont des *polylogarithmes* : L est la série génératrice non commutative des polylogarithmes $\{\mathrm{Li}_w\}_{w \in X^*}$. La série L est une exponentielle de Lie [13]. D'après le théorème de Ree [17], elle vérifie le critère de Friedrichs :

$$\forall u, v \in X^*, \quad \mathrm{Li}_{u \sqcup\!\sqcup v}(z) = \mathrm{Li}_u(z)\,\mathrm{Li}_v(z). \tag{9}$$

Les polylogarithmes $\mathrm{Li}_w(t)$ sont $\mathcal{C}$-linéairement indépendants [13] et donc les polylogarithmes indicés par les mots de Lyndon forment une base de transcendance de $\mathrm{LI}_{\mathcal{C}}$ [13]. Le théorème de Radford [17] permet de décomposer les polylogarithmes $\mathrm{Li}_w(t)$ dans cette base.

Dans la suite, associons au multi-indice $(s_1, \cdots, s_k)$ le mot $x_0^{s_1-1}x_1 \cdots x_0^{s_k-1}x_1$. Le polylogarithme $\mathrm{Li}_{s_1,\cdots,s_k}(z)$ est développable en série entière :

$$\mathrm{Li}_{s_1,\cdots,s_k}(z) = \mathrm{Li}_w(z) = \sum_{n_1 > \cdots > n_r > 0} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1}\ldots n_r^{s_r}}, \quad |z| < 1. \tag{10}$$

On définit également la fonction ζ de Riemann multivariée (ou somme harmonique [15], ou MZV [18], ou somme d'Euler-Zagier [6]) la somme $\zeta(s_1, \cdots, s_k) = \zeta(w) = \mathrm{Li}_{s_1,\cdots,s_k}(1)$. La fonction $\zeta(s_1, \cdots, s_k)$ peut être aussi obtenue en spécialisant les variables $\{t_i\}_{i \geq 1}$ en $t_i = 1/i$ dans la *fonction quasi-symétrique* $F_{s_1,\cdots,s_r}(t)$ de degré r [15] :

$$F_{s_1,\cdots,s_r}(t) = \sum_{n_1 > \cdots > n_r > 0} t_{n_1}^{s_1}\ldots t_{n_r}^{s_r}. \tag{11}$$

Pour $S = (s_1, \cdots, s_k) = (s_1, S')$ et $R = (r_1, \cdots, r_l) = (r_1, R')$, le produit $S \star R$ est défini récursivement comme suit ("()" est le multi-indice vide) :

$$\left\{ \begin{array}{lclcl} S \star () & = & () \star S & = & S, \\ S \star R & = & \multicolumn{3}{l}{(s_1, S' \star R) + (r_1, S \star R') + (s_1 + r_1, S' \star R').} \end{array} \right. \tag{12}$$

La fonction quasi-symétrique $F_{S\star R}(t)$ de degré $k+l$ en les $\{t_i\}_{i\geq 1}$ est :

$$F_{S\star R}(t) = F_S(t) F_R(t). \tag{13}$$

Les $\zeta(s)$ convergents sont liés par les relations suivantes, pour tout $u, v, w \in x_0 X^* x_1$ [12] :

$$\zeta(u \sqcup\!\sqcup v) = \zeta(u)\zeta(v), \qquad \zeta(u \star v) = \zeta(u)\zeta(v), \qquad \zeta(x_1 \sqcup\!\sqcup w - x_1 \star w) = 0. \tag{14}$$

A la suite de nombres complexes $\{f_k\}_{k\geq 1}$ de s.g.o.[1] $F(z) = \sum_{k\geq 1} f_k z^k$, on associe la série [11] :

$$\mathrm{Di}_s(F|z) = \sum_{k\geq 1} f_k \frac{z^k}{k^s}, \quad |z| < 1. \tag{15}$$

Elle généralise à la fois la s.g.o. $F(z)$ et la s.g.d. $\mathrm{Di}(F; s) = \sum_{k\geq 1} f_k / k^s$. Elle peut être obtenue, à partir de la s.g.o. $F(z)$, par la *transformation polylogarithmique* [11] :

$$\mathrm{Di}_s(F|z) = \int_0^z F(t) \frac{\log^{s-1}(z/t)}{\Gamma(s)} \frac{dt}{t} = \int_0^1 F(zt) \frac{\log^{s-1}(1/t)}{\Gamma(s)} \frac{dt}{t}. \tag{16}$$

En remplaçant $\log(z/t)$ par t dans (16), nous avons :

$$\mathrm{Di}_s(F|z) = \int_0^\infty \frac{F(ze^{-t})}{\Gamma(s)} \frac{dt}{t^{1-s}}. \tag{17}$$

En particulier, pour $z = 1$, il s'agit de la *transformation de Mellin* et nous obtenons la s.g.d. $\mathrm{Di}(F/\Gamma(s); s)$ associée à $F(\tau)/\Gamma(s)$, où $F(\tau) = \sum_{k\geq 1} f_k q^k$ et $q = e^{-\tau}$. Si $F(\tau)$ est une série de rayon de convergence non nul alors $\mathrm{Di}(F; s)$ est une fonction en la variable complexe s. Par conséquent :

Théorème 1. *Pour toute fonction $F(z) \in \mathrm{LI}_{\mathcal{C}}$:*

1. *la transformée polylogarithmique de $F(z)$ est encore un élément de $\mathrm{LI}_{\mathcal{C}}$,*
2. *la s.g.d. $\mathrm{Di}(F; s)$ associée à $F(z)$ est un élément de l'algèbre des MZV's.*

2. Fonctions ζ de Hurwitz multivariées

2.1. Définition et propriétés de base.

Définition 1. *Pour tous entiers $s_1, \ldots, s_r$ et toutes variables formelles $t_1, \ldots, t_r$, nous appelons* fonction de Lerch généralisée, *la fonction définie par :*

$$\phi_{s_1,\ldots,s_r}(z; t_1, \ldots, t_r) = \sum_{n_1 > \cdots > n_r > 0} \frac{z^{n_1}}{(n_1 - t_1)^{s_1} \cdots (n_r - t_r)^{s_r}}, \quad |z| < 1.$$

Nous appelons la fonction ζ de Hurwitz multivariée *la somme*[2] *:*

$$\zeta[(s_1; t_1), \ldots, (s_r; t_r)] = \phi_{s_1,\ldots,s_r}(1; t_1, \ldots, t_r).$$

D'après le théorème de convolution, ces fonctions de Lerch peuvent être représentées par les intégrales itérées avec les formes différentielles ω_0 et ω_1 :

Proposition 1. $\phi_{s_1,\ldots,s_r}(z; t_1, \ldots, t_r) = \alpha_0^z \left(\left[(t_1 x_0)^* \sqcup\!\sqcup x_0^{s_1 - 1} \right] x_1 \ldots \left[(t_r x_0)^* \sqcup\!\sqcup x_0^{s_r - 1} \right] x_1 \right)$.

Ces fonctions ζ vérifient les équations fonctionnelles du type défini par :

Proposition 2. $\zeta[(s_1; t_1), \ldots, (s_i; t_i), \ldots, (s_r; t_r)] - \zeta[(s_1; t_1), \ldots, (s_{i-1}; t_{i-1}), (s_i; t_i - 1), (s_{i+1}; t_{i+1}), \ldots, (s_r; t_r)] = (1 - t_i)^{-s_i} \zeta[(s_1; t_1), \ldots, (s_{i-1}; t_{i-1}), (s_{i+1}; t_{i+1}), \ldots, (s_r; t_r)]$.

[1] s.g.o. : série génératrice ordinaire ; s.g.d. : série génératrice de Dirichlet.

[2] Ces séries comportent des termes divergents que nous examinerons en Section 3.

Elles vérifient également les équations différentielles :

Proposition 3. $\partial/\partial t_i\zeta[(s_1;t_1),\ldots,(s_i;t_i),\ldots,(s_r;t_r)] = s_i\zeta[(s_1;t_1),\ldots,(s_i+1;t_i),\ldots,(s_r;t_r)]$.

2.2. **Des produits de mélange pour les ζ de Hurwitz.**

2.2.1. *Premier produit.* Puisque $(tx_0)^* ⧢ x_0^s = [(tx_0)^*x_0]^s(tx_0)^*$, les séries rationnelles codant les fonctions ζ de Hurwitz sont de la forme :

$$\underbrace{(t_1x_0)^*x_0\ldots(t_1x_0)^*x_0}_{s_1-1 \text{ fois}}(t_1x_0)^*x_1\ldots\underbrace{(t_rx_0)^*x_0\ldots(t_rx_0)^*x_0}_{s_r-1 \text{ fois}}(t_rx_0)^*x_1. \tag{18}$$

D'après la formule récursive (3), ces séries sont stables par le produit "⧢".

Exemple 1 ([11]). *Considérons la série génératrice commutative suivante des* MZV*'s et celle des polylogarithmes*[3] *:*

$$\mathcal{Z}_1 = \mathcal{L}_1(1) \quad avec \quad \mathcal{L}_1(z) = \sum_{s_1,\ldots,s_r>0} \mathrm{Li}_{s_1,\ldots,s_r}(z)\, t_1^{s_1-1}\cdots t_r^{s_r-1}. \tag{19}$$

Puisque les $t_1,\ldots,t_r$ commutent avec les lettres x_0 et x_1, d'après (2), la série $(t_1x_0)^*x_1\cdots(t_1x_0)^*x_1$ code les séries génératrices $\mathcal{Z}_1$ et $\mathcal{L}_1(z)$.

Théorème 2 ([11]). *Soient S et T deux séries de la forme (18). On a $\zeta(S ⧢ T) = \zeta(S)\zeta(T)$.*

2.2.2. *Deuxième produit.* Soient $T = \{t_1,\ldots,t_r\}$ et $\bar{T} = \{\bar{t}_1,\ldots,\bar{t}_r\}$. Considérons le changement de variables suivant :

$$t_1 = \bar{t}_1 + \bar{t}_2 + \ldots + \bar{t}_r, \quad t_2 = \bar{t}_2 + \bar{t}_3 + \ldots + \bar{t}_r, \quad \ldots, \quad t_r = \bar{t}_r \tag{20}$$

et le changement inverse :

$$\bar{t}_1 = t_1 - t_2, \ldots, \quad \bar{t}_{r-1} = t_{r-1} - t_r, \quad \bar{t}_r = t_r. \tag{21}$$

Considérons de nouveau les formes différentielles ω_0 et ω_1. Pour toute variable formelle t, nous considérons des 1–formes différentielles :

$$\Omega_t = z^{-t}\omega_1. \tag{22}$$

Nous construisons des intégrales itérées sur ces formes différentielles et nous en déduisons ainsi un codage des séries des fonctions ζ de Hurwitz multivariées par des mots définis sur l'alphabet X_t contenant la lettre x_0 (codant ω_0) et des lettres x_t (codant les formes différentielles Ω_t) :

Avec les changements de variables (20) et (21), nous obtenons :

Proposition 4 ([11]). $\phi_{s_1,\ldots,s_r}(z;t_1,\ldots,t_r) = z^{t_1}\int_0^z \omega_0^{s_1-1}\Omega_{\bar{t}_1}\cdots\omega_0^{s_r-1}\Omega_{\bar{t}_r}$.

Corollaire 1. $\zeta\left([x_0^{s_1-1} ⧢ (t_1x_0)^*]x_1\cdots[x_0^{s_r-1} ⧢ (t_rx_0)^*]x_1\right) = \zeta(x_0^{s_1-1}x_{\bar{t}_1}\cdots x_0^{s_r-1}x_{\bar{t}_r})$.

Les intégrales itérées sur les formes différentielles ω_0, Ω_t de la proposition 4 nous permettent de construire un autre mélange pour les $\zeta[(s_1;t_1),\ldots,(s_r;t_r)]$ que nous notons de la même manière "⧢" par un abus de notation[4] :

Théorème 3 ([11]). *Pour tous mots $U, V \in X_t^*x_t$, on a $\zeta(U ⧢ V) = \zeta(U)\zeta(V)$.*

En appliquant successivement la transformation polylogarithmique, nous avons :

[3]La série $\mathcal{Z}_1$ correspond au moule **Zig** d'Ecalle [8].

[4]C'est pour cette raison que nous avons traité, dans [11], ces deux codages en un seul : avec ω_0 et les formes différentielles ω_t du type (22) nous calculons les intégrales itérées associées aux séries rationnelles de la forme (2).

Proposition 5. *Posons $\lambda_1 = 1, \ldots, \lambda_k = u_1 \ldots u_{k-1}$ et $f(z; t_i) = z^{1-t_i}/(1-z), i = 1..r$. Alors :*

$$\zeta[(s_1;t_1), \ldots, (s_r;t_r)] = \int_0^1 \ldots \int_0^1 f(\lambda_1 u_1; t_1) \ldots f(\lambda_{r-1} u_{r-1}; t_r)$$
$$\frac{[\log(1/u_1)]^{s_1-1}}{\Gamma(s_1)} \ldots \frac{[\log(1/u_r)]^{s_r-1}}{\Gamma(s_k)} \frac{du_1}{u_1} \ldots \frac{du_{r-1}}{u_{r-1}}.$$

2.2.3. *Troisième produit.* Déterminons maintenant un autre produit de mélange pour les ζ de Hurwitz. Pour cela, considérons le produit $\zeta(u;\nu)\zeta(v;\mu)$:

$$\zeta(u;\nu)\zeta(v;\mu) = \sum_{n>m>0} \frac{1}{(n-\nu)^u (m-\mu)^v} + \sum_{n>m>0} \frac{1}{(n-\mu)^v (m-\nu)^u} + \sum_{n>0} \frac{1}{(n-\nu)^u (n-\mu)^v}. \tag{23}$$

Décomposons $1/[(n-\nu)^u (n-\mu)^v]$ en éléments simples, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\zeta(u;\nu)\zeta(v;\mu) = \zeta[(u;\nu),(v;\mu)] + \zeta[(v;\mu),(u;\nu)] &+ \sum_{k=0}^{v-1} \binom{u-1+k}{u-1} \frac{(-1)^k}{(\mu-\nu)^{u+k}} \zeta(v-k;\mu)\\ &+ (-1)^v \sum_{k=0}^{u-1} \binom{v-1+k}{v-1} \frac{1}{(\mu-\nu)^{v+k}} \zeta(u-k;\nu).\end{aligned} \tag{24}$$

Ceci nous conduit à définir le produit de mélange suivant pour les ζ de Hurwitz multivariées et à plusieurs paramètres :

Définition 2. *Considérons $U = \{(u;\mu), U'\}$ et $V = \{(v;\nu), V'\}$, où u et v sont des entiers, où μ et ν sont des variables formelles, où U' et V' sont de même nature que les U et V. Le produit mélange "$U \bullet V$" est défini comme suit :*

$$\left\{\begin{array}{lcl} U \bullet \epsilon &=& \epsilon \bullet U \quad = \quad U, \\ U \bullet V &=& \{(v;\nu), U \bullet V'\} + \{(u;\mu), U' \bullet V\} \\ &+& \displaystyle\sum_{k=0}^{v-1} \binom{u-1+k}{u-1} \frac{(-1)^k}{(\mu-\nu)^{u+k}} \{(u-k;\mu), U' \bullet V'\} \\ &+& \displaystyle(-1)^v \sum_{k=0}^{u-1} \binom{v-1+k}{v-1} \frac{1}{(\mu-\nu)^{v+k}} \{(v-k;\nu), U' \bullet V'\}. \end{array}\right.$$

Théorème 4. *$\zeta(U \bullet V) = \zeta(U)\zeta(V)$ pour $U = \{(u_1;\mu_1), \ldots, (u_k;\mu_k)\}, V = \{(v_1;\nu_1), \ldots, (v_k;\nu_k)\}$.*

2.3. **Applications des relations entre les ζ de Hurwitz.** Soient m suites de nombres complexes $\{f_{i,k}\}_{i=1..m, n\geq 1}$ de s.g.o. $F_i(z) = \sum_{n\geq 1} f_{i,n} z^n$. Considérons les $m+1$ formes différentielles suivantes :

$$\omega_0 = \frac{dz}{z}, \quad \omega_i = F_i(z) \frac{dz}{z}, \quad i = 1..m. \tag{25}$$

Considérons également des s.g.d. associées à ces fonctions [11] :

$$\mathrm{Di}(F_{i_1}, \ldots, F_{i_k}; s_1, \ldots, s_k) = \sum_{n_1 > \ldots > n_k > 0} \frac{f_{i_1, n_1-n_2} \cdots f_{i_{k-1}, n_{k-1}-n_k} f_{i_k, n_k}}{n_1^{s_1} \ldots n_k^{s_k}}. \tag{26}$$

Proposition 6 ([11])**.** $\mathrm{Di}(F_{i_1}, \ldots, F_{i_k}; s_1, \ldots, s_k) = \alpha_0^1(x_0^{s_1-1} x_{i_1} \ldots x_0^{s_k-1} x_{i_k})$, *où :*

$$\alpha_0^z(x_0^{s_1-1} x_{i_1} \ldots x_0^{s_k-1} x_{i_k}) = \sum_{n_1 > \ldots > n_k > 0} \frac{f_{i_1, n_1-n_2} \cdots f_{i_{k-1}, n_{k-1}-n_k} f_{i_k, n_k}}{n_1^{s_1} \ldots n_k^{s_k}} z^{n_1}.$$

En particulier, si les fonctions génératrices $F_i(z)$ sont de la forme $b_i z/(1-b_i z)$ alors :

$$\alpha_0^z(x_0^{s_1-1} x_1 \ldots x_0^{s_k-1} x_k) = \sum_{n_1 > \ldots > n_k > 0} \frac{b_1^{n_1-n_2} \ldots b_{k-1}^{n_{k-1}-n_k} b_k^{n_k}}{n_1^{s_1} \ldots n_k^{s_k}} z^{n_1}. \tag{27}$$

et $\mathrm{Di}(F_1,\ldots,F_k;s_1,\ldots,s_k)$ est le *polylogarithme multiple* [6, 9, 20] :

$$\mathrm{Li}_{s_1,\ldots,s_k}(b_1,\ldots,b_k)=\sum_{n_1>\ldots>n_k>0}\frac{b_1^{n_1}(b_2/b_1)^{n_2}\ldots(b_k/b_{k-1})^{n_k}}{n_1^{s_1}\ldots n_k^{s_k}}. \tag{28}$$

Théorème 5. *Si les $\{f_{i,n}\}_{n\geq 1}, i=1..m$, sont périodiques de même période K alors :*

$$\mathrm{Di}(F_{i_1},\ldots,F_{i_k};s_1,\ldots,s_k)=\sum_{a_1,\ldots,a_k=1}^{K}\frac{f_{i_1,a_1}\ldots f_{i_k,a_k}}{K^{s_1+\ldots+s_k}}\zeta\left[\left(s_1;-\frac{a_1+\ldots+a_k}{K}\right),\ldots,\left(s_k;-\frac{a_k}{K}\right)\right].$$

En d'autres termes, si les $\{f_{i,n}\}_{n\geq 1}, i=1..m$, sont périodiques de même période K alors cette série génératrice de Dirichlet est une somme finie de séries ζ de Hurwitz multivariées. Le cas particulier étant les ζ colorées : introduisons la racine primitive de la racine m-ième de l'unité, $q=e^{2\mathrm{i}\pi/m}$, et les fonctions génératrices $F_i(z)=q^iz/(1-q^iz)$. Nous obtenons, en conséquence, les MZV's *colorés* [5, 6, 9] que nous exprimons, d'après le théorème 5, en fonctions des ζ de Hurwitz :

Corollaire 2 (Formule de distribution)**.**

$$\zeta\begin{pmatrix}s_1,\ldots,s_k\\ q^{i_1-i_2},\ldots,q^{i_k}\end{pmatrix}=\frac{1}{m^{s_1+\ldots+s_k}}\sum_{a_1,\ldots,a_k=1}^{m}q^{i_1a_1+\ldots+i_ka_k}\zeta\left[\left(s_1;-\frac{a_1+\ldots+a_k}{m}\right),\ldots,\left(s_k;-\frac{a_k}{m}\right)\right].$$

3. Régularisation des termes divergents

3.1. **Régularisation des** MZV's **divergents.** Il y a deux méthodes pour régulariser les MZV's divergents selon que l'on s'appuie, soit sur le premier produit de mélange "$\sqcup\!\sqcup$" lié aux intégrales itérées, soit sur le deuxième produit de mélange "$\star$" lié aux sommes (intégrales discrètes) itérées [3, 19]. Ces deux procédés ne donnent pas le même résultat même si, dans les deux cas, on adopte la régularisation $\zeta(1)=0$. Les relations quadratiques [12] montrent que les deux procédés de régularisation coïncident lorsque l'on régularise le produit de $\zeta(1)$ par une MZV's convergente mais pas lorsque l'on régularise le produit de $\zeta(1)$ par une MZV's divergent :

Exemple 2 ([2, 3, 8, 19])**.** *Pour le premier mélange, on a $\zeta_{\sqcup\!\sqcup}(1)\zeta_{\sqcup\!\sqcup}(1)=2\zeta_{\sqcup\!\sqcup}(1,1)$. Pour le second mélange, on a $\zeta_\star(1)\zeta_\star(1)=2\zeta_\star(1,1)+\zeta(2)$. Dans le premier cas, on obtient la régularisation $\zeta_{\sqcup\!\sqcup}(1,1)=0$ et généralement $\zeta_{\sqcup\!\sqcup}(\{1\}^k)=0$ pour $k\geq 1$. Dans le second cas, $\zeta_\star(1,1)=-\zeta(2)/2$.*

Définition 3. *Considérons $C_1=\mathbb{Q}\oplus x_0\mathbb{Q}\langle X\rangle x_1$ et $C_2=\mathbb{Q}\oplus(Y\setminus\{y_1\}\mathbb{Q}\langle Y\rangle)$ et les morphisme d'algèbres de mélange $\mathsf{reg}_{\sqcup\!\sqcup}:\mathbb{Q}\langle X\rangle\longrightarrow C_1$ et $\mathsf{reg}_\star:\mathbb{Q}\langle Y\rangle\longrightarrow C_2$ tels que $\mathsf{reg}_{\sqcup\!\sqcup}(u\sqcup\!\sqcup v)=\mathsf{reg}_{\sqcup\!\sqcup}(u)\sqcup\!\sqcup\mathsf{reg}_{\sqcup\!\sqcup}(v)$ et $\mathsf{reg}_\star(u\star v)=\mathsf{reg}_\star(u)\star\mathsf{reg}_\star(v)$ pour $u,v\in X^*$; et tels que $\mathsf{reg}_{\sqcup\!\sqcup}(w)=\mathsf{reg}_\star(w)=w$ pour $w\in x_0X^*x_1$; et $\mathsf{reg}_{\sqcup\!\sqcup}(x_0)=\mathsf{reg}_{\sqcup\!\sqcup}(x_1)=\mathsf{reg}_\star(y_1)=0$.*

On démontre l'existence et l'unicité d'un tel morphisme à partir de l'isomorphisme classique dû à Radford : $(\mathbb{Q}\langle X\rangle,\sqcup\!\sqcup)\simeq\mathbb{Q}[\mathcal{L}yn(X)]=C_1[x_1,x_0]$ car tous les mots de Lyndon définis sur X appartiennent à $x_0X^*x_1$ à l'exception x_0 et x_1. "$\zeta\circ\mathsf{reg}_{\sqcup\!\sqcup}$" est donc un morphisme d'algèbres qui se prolonge sur $\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle$. Il en est de même pour "$\zeta\circ\mathsf{reg}_\star$".

Théorème 6. *Pour $k\geq 1, u\in X^*x_1, v\in x_0X^*$, on a :*

$$\mathsf{reg}_{\sqcup\!\sqcup}(x_1^kx_0u)=x_0[(-x_1)^k\sqcup\!\sqcup u]\quad\text{et}\quad\mathsf{reg}_{\sqcup\!\sqcup}(vx_1x_0^k)=[v\sqcup\!\sqcup(-x_0)^k]x_1.$$

Proof. La première expression est une conséquence de l'identité syntaxique suivante [10] :

$$\forall k\geq 0,\forall u\in X^*,\quad x_1^kx_0u=\sum_{l=0}^{k}x_1^l\sqcup\!\sqcup(x_0[(-x_1)^{k-l}\sqcup\!\sqcup u]). \tag{29}$$

En appliquant le morphisme de miroir, puis le morphisme de substitution $\sigma(x_0)=x_1$ et $\sigma(x_1)=x_0$ dans les deux membres de (29), on obtient une identité duale conduisant à la seconde expression. $\square$

Théorème 7. *Posons* $Z = \sum_{w\in X^*} \zeta\circ\mathsf{reg}_{\sqcup\!\sqcup}(w)\, w$. *Alors* $Z = \prod_{l\in\mathcal{L}yn(X)\setminus X} e^{\zeta(P^*(l))P(l)}$, *où* $\{P(l)\}_{l\in\mathcal{L}yn(X)}$ *est une base de l'algèbre de Lie libre sur* X *indicée par les mots de Lyndon et* $\{P^*(l)\}_{l\in\mathcal{L}yn(X)}$ *sa base duale qui est aussi une base de transcendance de l'algèbre de mélange* $\mathrm{Sh}_{\mathbb{Q}}\langle X\rangle$.

Proof. La série Z s'obtient comme l'image par le morphisme "$(\zeta\circ\mathsf{reg}_{\sqcup\!\sqcup})\otimes\mathrm{Id} = (\zeta\otimes\mathrm{Id})\circ(\mathsf{reg}_{\sqcup\!\sqcup}\otimes\mathrm{Id})$" de la série diagonale $\sum_{w\in X^*} w\otimes w$ qui est une exponentielle de Lie [17]. D'après un théorème de Schützenberger, pour l'ordre lexicographique décroissant, on a [17] :

$$\sum_{w\in X^*} w\otimes w = e^{x_1\otimes x_1}\Big[\prod_{l\in\mathcal{L}yn(X)\setminus X} e^{P^*(l)\otimes P(l)}\Big]e^{x_0\otimes x_0}. \tag{30}$$

Comme, pour tout mot l de Lyndon tel que $l\neq x_0$ et $l\neq x_1$, on a $P^*(l)\in x_0\mathbb{Q}\langle X\rangle x_1$. Par conséquent, en appliquant le morphisme "$\zeta\circ\mathsf{reg}_{\sqcup\!\sqcup}$", nous obtenons le résultat voulu. □

En d'autres termes, Z correspond donc au signe près à l'associateur Φ_{KZ} de Drinfel'd. Elle est l'unique exponentielle de Lie telle que $(Z|x_0) = (Z|x_1) = 0$ et $(Z|w) = \zeta(w)$ pour $w\in x_0X^*x_1$ [13]. D'après (30), on a :

$$\prod_{l\in\mathcal{L}yn(X)\setminus X} e^{P^*(l)\otimes P(l)} = e^{-x_1\otimes x_1}\sum_{w\in X^*} w\otimes w\; e^{-x_0\otimes x_0}. \tag{31}$$

On peut alors poser :

Définition 4 ([16]).

$$\Phi_{\sqcup\!\sqcup} = \sum_{w\in X^*}\mathsf{reg}_{\sqcup\!\sqcup}(w)\, w = \prod_{l\in\mathcal{L}yn(X)\setminus X} e^{P^*(l)\otimes P(l)} \quad et \quad \Phi_\star = \sum_{w\in Y^*}\mathsf{reg}_\star(w)\, w = e^{-y_1\otimes y_1}\Big[\sum_{w\in Y^*} w\otimes w\Big].$$

Lemme 1 ([3]). *Pour tout* $w\in x_0X^*x_1$ *et* $m\geq 0$, *on a* $\mathsf{reg}_\star(y_1^m w) = \sum_{i=0}^{m}\frac{(-y_1)^{\star i}}{i!}\star(y_1^{m-i}w)$.

Proof. Avec l'expression de "exp" et d'après la définition du produit de Cauchy des séries formelles en variables non commutatives, nous obtenons (en identifiant terme par terme dans $\Phi_\star$). □

Lemme 2 (Lemme binomial). $y_1^{\star k}\star uv = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}[y_1^{\star i}\star u]D^{k-i}(v)$, *où* $D(v) = y_1\star v - y_1 v$.

Proof. Pour $k=1$, on a $y_1\star uv = (y_1\star u)v + uD(v)$. On suppose la formule vraie (pour l'entier k). On en tire :

$$y_1^{\star k+1}\star uv = y_1^{\star k}\star[(y_1\star u)v + uD(v)] \tag{32}$$

$$= \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}[y_1^{\star i+1}\star u]D^{k-i}(v) + \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}[y_1^{\star i}\star u]D^{k+1-i}(v) \tag{33}$$

$$= \sum_{j=0}^{k+1}\binom{k+1}{j}[y_1^{\star j}\star u]D^{k+1-j}(v). \tag{34}$$

□

Proposition 7 (Formule d'inversion). $y_1^k = \frac{(-1)^{k-1}}{k}\sum_{l=0}^{k-1}(-1)^l y_1^l\star y_{k-l}$.

Proof. C'est la conséquence de la propriété $y_1^l\star y_k = y_1^{l-1}\sqcup\!\sqcup\, y_{k+1} + y_1^l\sqcup\!\sqcup\, y_k$, pour k et $l\geq 1$. En effet en appliquant cette propriété au sesond membre du résultat souhaité, nous obtenons :

$$y_k - [y_k + y_1\sqcup\!\sqcup\, y_{k-1}] + [y_1\sqcup\!\sqcup\, y_{k-1} + y_1^2\sqcup\!\sqcup\, y_{k-2}] + \ldots - (-1)^k[y_1^{k-2}\sqcup\!\sqcup\, y_2 + y_1^{k-1}\sqcup\!\sqcup\, y_1] = (-1)^{k-1}k y_1^k.$$

□

Corollaire 3. *Pour $k>2$, nous avons* $\mathsf{reg}_\star(y_1^k)=\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}y_k+\displaystyle\sum_{l=2}^{k-2}\dfrac{(-1)^{k-1-l}}{k}\mathsf{reg}_\star(y_1^l)\star y_{k-l}$.

Proposition 8. *Pour tout mot $w\in x_0X^*x_1$, on a* $\mathsf{reg}_\star(y_1^m w)=\displaystyle\sum_{p=0}^{m}\dfrac{(-1)^p}{p!}\mathsf{reg}_\star(y_1^{m-p})\ D^p(w)$.

Proof. En utilisant le lemme 1 puis le lemme binomial, on a successivement :

$$\mathsf{reg}_\star(y_1^m w) = \sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k}{k!}\left[\sum_{p=0}^{m}\binom{k}{p}(y_1^{\star k-p}\star y_1^{m-k})\right]D^p(w) \tag{35}$$

$$= \sum_{p=0}^{m}\sum_{k=p}^{m}\frac{(-1)^k}{p!(k-p)!}(y_1^{\star k-p}\star y_1^{n-k})\ D^p(w) \tag{36}$$

$$= \sum_{p=0}^{m}\frac{(-1)^p}{p!}\left[\sum_{k=p}^{m}\frac{(-y_1)^{\star k-p}}{(k-p)!}\star y_1^{m-k}\right]D^p(w) \tag{37}$$

$$= \sum_{p=0}^{m}\frac{(-1)^p}{p!}\mathsf{reg}_\star(y_1^{m-p})\ D^p(w). \tag{38}$$

□

Le corollaire 3 et la proposition 8 terminent la régulation syntaxique des mots $y_1^m w$ par "$\mathsf{reg}_\star$".

3.2. **Régularisation des ζ de Hurwitz divergents.** Nous allons appliquer le procédé de régularisation syntaxique de la Définition 3 aux ζ de Hurwitz divergents.

Considérons $G_{-1}=G_0=1$ et pour tout $r\ge 1$, considérons les séries $G_r=(t_1x_0)^*x_1\dots(t_rx_0)^*x_1$. Posons $F_0=1$ et pour $i=1..r$, posons également $F_i=(t_ix_0)^+x_1$.

Théorème 8. *Pour $r\ge1$, on a* $\mathsf{reg}_{\sqcup\!\sqcup}(G_r)=\displaystyle\sum_{k=0}^{r}t_{r-k}\ x_0[(-x_1)^k\sqcup\!\sqcup\, G_{r-k}]$, *avec $t_0=1$.*

Proof. Pour $r\ge1$, nous avons (par récurrence) $G_r=\displaystyle\sum_{k=0}^{r}x_1^kF_{r-k}G_{r-k-1}$. L'identité syntaxique (29) et la définition "$\mathsf{reg}_{\sqcup\!\sqcup}$" nous donnent le résultat annoncé. □

Comme pour les mots $y_1^m w$, le corollaire 3 et la proposition 8 donnent la régulation syntaxique des séries $y_1^mF_{r-k}G_{r-k-1}$ par "$\mathsf{reg}_\star$".

Nous adoptons le raccourci de notation $(t_1,\dots,t_r)=(t_1x_0)^*x_1\cdots(t_rx_0)^*x_1$ et $(t_1^+,\dots,t_r)=(t_1x_0)^+x_1\cdots(t_rx_0)^*x_1$ avec en particulier $(0^+,0,\cdots,0)=0$. En utilisant la formule (3), les calculs donnent (les termes nuls $(0^+,0,\dots,0)$ ne figurant ici que pour l'esthétique) :

$$\begin{aligned}
\mathsf{reg}_{\sqcup\!\sqcup}(t_1) &= (t_1^+)-(0^+).\\
\mathsf{reg}_{\sqcup\!\sqcup}(t_1,t_2) &= (t_1^+,t_2)-(t_2^+,t_2)-(t_2^+,0)+(0^+,0).\\
\mathsf{reg}_{\sqcup\!\sqcup}(t_1,t_2,t_3) &= (t_1^+,t_2,t_3)-(t_2^+,t_2,t_3)-(t_2^+,t_3,t_3)-(t_2^+,t_3,0)\\
&+ (t_3^+,t_3,t_3)+(t_3^+,t_3,0)+(t_3^+,0,0)-(0^+,0,0).\\
\mathsf{reg}_{\sqcup\!\sqcup}(t_1,t_2,t_3,t_4) &= (t_1^+,t_2,t_3,t_4)-(t_2^+,t_2,t_3,t_4)-(t_2^+,t_3,t_3,t_4)\\
&- (t_2^+,t_3,t_4,t_4)-(t_2^+,t_3,t_4,0)+(t_3^+,t_3,t_3,t_4)\\
&+ (t_3^+,t_4,t_4,t_4)+(t_3^+,t_4,t_4,0)-(t_4^+,t_4,t_4,t_4)\\
&- (t_4^+,0,0,0)-(t_4^+,t_4,t_4,0)+(t_3^+,t_4,0,0)\\
&- (t_4^+,t_4,0,0)+(t_3^+,t_3,t_4,t_4)+(t_3^+,t_3,t_4,0)+(0^+,0,0,0).
\end{aligned}$$

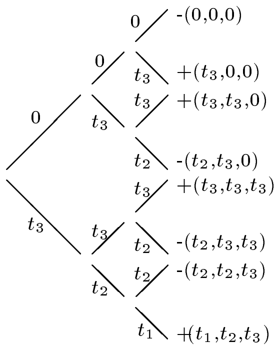

FIGURE 1. Arbre pour $r = 3$

La formule générale est formée d'une somme de 2^r multi–indices. Chacun des multi–indices est obtenu en parcourant une branche d'un arbre binaire complet de profondeur r.
Les branches montantes sont étiquetées par un même indice et les branches descendantes par des indices successifs. Le signe du multi–indice obtenu sur une branche est 1 si le nombre de montées est pair et -1 sinon.

3.3. **Application aux intégrales d'Arakawa-Kaneko.** Arakawa et Kaneko ont défini, pour $k_1, \ldots, k_n \geq 1$, l'intégrale suivante [1] :

$$\xi_{k_1,\ldots,k_n}(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{\mathrm{Li}_{k_1,\ldots,k_n}(1-e^{-t})}{e^t - 1} \frac{dt}{t^{1-s}}. \tag{39}$$

Arakawa et Kaneko ont montré que $\xi_{k,\{1\}^{r-1}}(l)$ est un polynôme en des MZV's. Ils ont posé la question de la possibilité d'exprimer l'intégrale $\xi_{k_1,\ldots,k_n}(l)$ en termes des MZV's [1]. Nous allons montrer que cette question a une réponse positive et elle dépend seulement de l'expression des $\mathrm{Li}_{k_1,\ldots,k_n}(1-t)$ en des polylogarithmes de profondeur inférieure à n et de poids inférieur à $\sum_{i=1}^n k_i$. Effectuons le changement de variable $t \to e^{-t}$, nous obtenons :

$$\xi_{k_1,\ldots,k_n}(s) = \int_0^1 \mathcal{B}_{k_1,\ldots,k_n}(t) \frac{\log^{s-1}(1/t)}{\Gamma(s)} \frac{dt}{t}, \quad \text{où} \quad \mathcal{B}_{k_1,\ldots,k_n}(z) = \frac{z}{1-z} \mathrm{Li}_{k_1,\ldots,k_n}(1-z). \tag{40}$$

Théorème 9. *Pour tout entier $k_1, \ldots, k_n \geq 1$, l'intégrale $\xi_{k_1,\ldots,k_n}(s)$ est un polynôme en des* MZV*'s et à coefficients rationnels.*

Ceci est une conséquence directe de l'équation fonctionnelle suivante [14] :

$$L(1-t) = \sigma[L(t)]\, Z, \quad t \in [0,1[, \tag{41}$$

où σ est le morphisme *involutif* de substitution défini par $\sigma(x_0) = -x_1$ et $\sigma(x_1) = -x_0$. Une des conséquences de l'équation fonctionnelle (41) est que pour tout mot $w \in X^*$, le polylogarithme $\mathrm{Li}_w(1-t)$ est un polynôme en les polylogarithmes indicés par les mots de Lyndon de longueur plus petite ou égale à $|w|$ et à coefficients dans l'algèbre des MZV's [14]. Par conséquent :

Proposition 9. *Pour tout entier $r, k \geq 1$, nous avons :*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Li}_{k,\{1\}^{r-1}}(1-t) &= \sum_{l=0}^{k-2} \zeta(k-l) \frac{\log^l(1-t)}{\Gamma(l+1)} + \frac{\log^r(1/t)}{\Gamma(r+1)} \frac{\log^{k-1}(1-t)}{\Gamma(k)} \\
&+ (-1)^r \sum_{l=0}^{k-2} \frac{\log^l(1-t)}{\Gamma(l+1)} \mathrm{Li}_{x_0(x_1^{k-1-l} ⧢ x_0^{r-1})}(t).
\end{aligned}$$

Proof. En identifiant le coefficient du mot $x_0^{k-1}x_1^r$ dans (41), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Li}_{x_0^{k-1}x_1^r}(1-t) &= \sum_{l=0}^{k-1} \zeta \circ \mathsf{reg}_{⧢}(x_0^{k-1-l}x_1^r)\, \mathrm{Li}_{\sigma[x_0^l]}(t) + \sum_{l=1}^{r-1} \zeta \circ \mathsf{reg}_{⧢}(x_1^{r-l})\, \mathrm{Li}_{\sigma[x_0^{k-1}x_1^l]}(t) + \mathrm{Li}_{\sigma[x_0^{k-1}x_1^r]}(t) \\
&= \sum_{l=0}^{k-2} \zeta(x_0^{k-1-l}x_1) \frac{\log^l(1-t)}{\Gamma(l+1)} - (-1)^{k+r} \mathrm{Li}_{x_1^{k-1}x_0^r}(t).
\end{aligned}$$

L'identité syntaxique (29) nous donne le résultat en prenant $u = x_0^{r-1}$. □

En particulier, pour tout entier $k \geq 1$, le polylogarithme $\mathrm{Li}_k(1-t)$ est un polynôme en les logarithmes $\log(1-t)$ et en les polylogarithmes $\{\mathrm{Li}_{\{1\}^q,2}(t)\}_{0<q<k}$ dont les coefficients sont des MZV's simplement indicés. D'après la proposition 9 et la transformation polylogarithmique, on obtient :

Corollaire 4. *Pour $r, k \geq 1$ et pour tout entier l, nous avons :*

$$\begin{aligned}\xi_{k,\{1\}^{r-1}}(l) &= \sum_{i=0}^{k-2}(-1)^i\zeta(k-i)\zeta(l,\{1\}^i) + \frac{\Gamma(r+l)}{\Gamma(r+1)\Gamma(l)}\zeta(r+l,\{1\}^{k-1}) \\ &+ \sum_{i=0}^{k-2}(-1)^{r+i}\zeta_{ш}(x_0^{l-1}x_1^i x_0[x_1^{k-1-i} ш\, x_0^{r-1}]).\end{aligned}$$

La dernière somme contient des MZV's divergents que l'on peut, de nouveau, régulariser en utilisant le théorème 6.

Remerciements : Merci à Foata et Zagier pour nous avoir signalé les travaux de [1] lors de leur passage à Lille le 10 Janvier 2000. Merci à Boutet de Monvel, Cartier, Ecalle, Racinet et Waldschmidt pour d'utiles discussions.

References

[1] T. Arakawa & M. Kaneko.– Multiple zeta values, poly-Bernoulli numbers and related zeta functions, Nagoya Math. J. 153, pp. 189–209, 1999.
[2] L. Boutet de Monvel.– *Remarque sur les sries polylogarithmes divergentes*, collogue "Polylogarithme, Multizêta et la conjecture Deligne-Ihara", Luminy, Avril 2000.
[3] P. Cartier.– *Les méthodes de régularisation en physique mathématique*, séminaire IHP, Janvier 2000.
[4] J. Berstel & C. Reutenauer.– *Rational series and their languages*, Spr.-Ver., 1988.
[5] M. Bigotte.– *Etude symbolique et algorithmique des fonctions polylogarithmes et des nombres Euler-Zagier coloré*, Thèse, Université Lille 1, Décembre 2000.
[6] J.M. Borwein, D.M. Bradley, D.J. Broadhurst & P. Lisonek.– *Special Values of Multiple Polylogarithms*, in Trans. of the Amer. Math. Soc., 2000.
[7] K.T. Chen.– *Iterated path integrals*, Bull. Amer. Math. Soc., vol 83, 1977, pp. 831-879.
[8] J. Ecalle.– *La libre génération des multizêta et leur décomposition canonico-explicite en irréductibles*, séminaire IHP, Décembre 1999.
[9] A.B. Goncharov.– *Multiple polylogarithms, cyclotomy and modular complexes*, Math. Res Letters, vol 5, pp 497-516, 1998.
[10] Hoang Ngoc Minh.– *Summations of Polylogarithms via Evaluation Transform*, in Mathematics and Computers in Simulations, 42, 4-6, 1996, pp. 707-728.
[11] Hoang Ngoc Minh.– *Fonctions de Dirichlet d'ordre n et de paramètre t*, Discrete Math., 180, 1998, pp. 221-241.
[12] Hoang Ngoc Minh & M. Petitot.– *Lyndon words, polylogarithmic functions and the Riemann ζ function*, Discrete Math., 217, 2000, pp. 273-292.
[13] Hoang Ngoc Minh, M. Petitot & J. Van der Hoeven.– *Polylogarithms and Shuffle Algebra*, FPSAC'98, Toronto, Canada, Juin 1998.
[14] Hoang Ngoc Minh, M. Petitot & J. Van der Hoeven.– *L'algèbre des polylogarithmes par les séries génératrices*, FPSAC'99, Barcelone, Espagne, Juillet 1999.
[15] M. Hoffman.– *The algebra of multiple harmonic series*, Jour. of Alg., August 1997.
[16] G. Racinet.– *Séries génératrices non-commutatives de polyzêtas et associateurs de Drinfel'd*, Thèse, Université de Picardie–Jules Verne, Amiens, Décembre 2000.
[17] C. Reutenauer.– *Free Lie Algebras*, London Mathematical Society Monographs, New Series-7, Oxford Science Publications, 1993.
[18] D. Zagier.– *Values of zeta functions and their applications*, in "First European Congress of Mathematics", volume 2, pp. 497–512. Birkhäuser, 1994.
[19] M. Waldschmidt.– *Valeurs zta multiples: une introduction*, à paraître dans J. de Th. des Nomb. de Bordeaux.
[20] M. Waldschmidt.– *Multiple Polylogarithms*, preprint.

E-mail address: {hoang,jacob,oussous,petitot}@lifl.fr

Université Lille II, 59024 Lille, France & Université Lille I, 59655 Villeneuve d'Ascq, France