TD de calculabilité

Langages récursivement énumérables

• Montrer que l'ensemble des entiers positifs k tels que la machine de de Turing de numéro k accepte le mot vide, est récursivement énumérable.

Indécidabilité

• Montrer que "$L(M_1) = L(M_2)$" est indécidable.
• Montrer que "$L(M_1) \cap L(M_2) = \emptyset$" est indécidable.
• Le problème "Une machine de Turing M a-t-elle un nombre pair d'états?" est-il décidable?
• Montrer que le problème "Une machine de Turing M sur l'alphabet $\{0, 1, \#\}$ imprime-t-elle à un certain moment trois 1 consécutifs?" est indécidable.
• Montrer que le problème "Une machine de Turing M s'arrête-t-elle sur toutes les données?" est indécidable.
• Montrer que les problèmes suivants sont indécidables :

- "Un programme P boucle-t-il sur au moins une entrée?"
- "Un programme P produit-il une sortie?"
- "Deux programmes P_1 et P_2 produisent-ils les mêmes sorties sur les mêmes entrées?"

• Si G_1 et G_2 sont deux grammaires context-free et R un langage rationnel. Montrer que les problèmes suivants sont indécidables :

- $L(G_1) = L(G_2)$
- $L(G_1) \subset L(G_2)$
- $L(G_1) = R$
- $R \subset L(G_1)$

Post

• Montrer que le problème de Post sur un alphabet à une lettre est décidable.

Théorème du point fixe

• On va construire un programme qui pour toute entrée affiche son propre texte en sortie. On note code(k) le code de la machine de Turing de numéro k.
1) Montrer qu'en terme de machines de Turing le problème revient à trouver une machine de numéro x_0 tel que pour tout y on ait :

$$f_{x_0}(y) = \mathrm{code}(x_0)$$

2) Montrer qu'il existe une fonction σ récursive totale telle que pour tout a et pour tout y on ait :

$$f_{\sigma(a)}(y) = \mathrm{code}(a)$$

3) En déduire l'existence de x_0 à l'aide du théorème du point fixe.
• Soient $N_1, N_2, \ldots$ une énumération de toutes les machines de Turing tel que il existe un algorithme qui à une machine de numéro i associe la machine N_i et vice versa. Montrer par le théorème de récursion qu'il existe un entier j telle que la machine N_j et la machine N_{j+1} calculent la même fonction.