Maitrise et IUP d'informatique 1999-2000
Université de Marne la Vallée
Exercices : décidabilité et point fixe

Exercice 1.— On appelle problème du zéro dans les matrices 3×3 à coefficients dans $\mathbb{Z}$ le problème suivant :
Donnée : Un ensemble fini de matrices 3×3 à coefficients dans $\mathbb{Z}$.
Question : Existe-t-il un produit fini $M_{i_1} M_{i_2} \dots M_{i_r}$ de matrices tel que l'élément d'indice $(3, 2)$ de ce produit est nul ?
Montrer que ce problème est indécidable en réduisant le problème de Post à ce problème.
Indication : Si A est un alphabet à k lettres, pour un mot u, on note $\mathtt{num}(u)$ son numéro dans l'ordre hiéarchique. On définit pour tout couple de mots (u, v)

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} k^{|u|} & k^{|v|} - k^{|u|} & 0 \\ 0 & k^{|v|} & 0 \\ \mathtt{num}(u) & \mathtt{num}(v) - \mathtt{num}(u) & 1 \end{pmatrix}$$

On utilisera le fait que $\mathtt{num}(uv) = \mathtt{num}(u)k^{|v|} + \mathtt{num}(v)$ pour montrer que f est un morphisme injectif de de $A^* \times A^*$ dans l'ensemble des matrices 3×3 à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Montrer que l'élément $(3, 2)$ de $f(u, v)$ est nul si et seulement si $u = v$. En déduire la réduction.

Exercice 2.— On appelle problème de convergence d'une suite d'éléments de $\mathbb{N}$ le problème suivant :
Donnée : Une suite d'éléments de $\mathbb{N}$ définie récursivement (c'est-à-dire telle que le peut calculer le n-ième terme de manière effective).
Question : Cette suite est-elle convergente ?
Montrer que ce problème est indécidable.

Exercice 3.— On considère le problème suivant :
Donnée : Une machine de Turing M, un mot w et un entier n.
Question : La machine M avec l'entrée w passe-t-elle au cours du calcul par la cellule numéro n ?
Ce problème est-il décidable ?

Exercice 4.— On considère le problème suivant :
Donnée : Une machine de Turing M, un mot w.
Question : La machine M avec l'entrée w visite-t-elle un nombre fini de cellules ?
Ce problème est-il décidable ?

Exercice 5.— Que fait le programme C suivant :

```
main(void){char *c="main(void){char *c=%c%s%c;printf(c,34,c,34);}";
printf(c,34,c,34);}
```