TD de calculabilité

Ensembles dénombrables

• Montrer qu'un ensemble E est fini ou dénombrable s'il existe une injection de cet ensemble dans $\mathbb{N}$. De même s'il existe une surjection de $\mathbb{N}$ dans E.
• Montrer que le produit cartésien de deux ensembles dénombrables est dénombrable.
• Montrer que les ensembles suivants sont dénombrables : $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}^*$, X, $X^* \times Y^*$, $X^* \times \mathbb{N}$, $(X^*)^*$, où X et Y sont des ensembles finis. Expliciter des bijections entre $\mathbb{N}$ et chacun de ces ensembles.
• Soit X un alphabet de cardinal n. Pour tout mot w de X^*, on note $|w|$ la longueur de w et $\mu(w)$ le numéro de w dans l'ordre hiérarchique. Trouver une formule permettant le calcul de $\mu(w)$ connaissant w.
• Montrer que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable. L'ensemble des programmes Pascal est-il dénombrable ? L'ensemble des fonctions $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ calculables à l'aide d'un programme Pascal est-il dénombrable ? En déduire qu'il existe des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui ne sont pas calculables à l'aide d'un programme Pascal.
• Ecrire un programme qui énumère :

- les couples d'entiers
- les suites finies d'entiers
- les mots sur un alphabet fini (par exemple $X = \{a, b, c\}$)
- les couples de mots
- les suites finies de mots

Diagonalisation

• Montrer qu'il n'existe pas de programme Pascal qui étant donné un programme Pascal P et une entrée e répond vrai si le programme P boucle sur l'entrée e et faux sinon.

Machines de Turing

• Donner une machine de Turing qui accepte le langage $L = \{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$.
• Donner une machine de Turing qui accepte l'ensemble des mots sur l'alphabet $\{0, 1\}$ qui ont un nombre égal de 0 et de 1.
• On se propose de construire une machine de Turing M qui retourne le mot d'entrée $w \in \{0, 1\}^*$ écrit initialement sur sa bande (opération miroir).
1) Expliciter le principe de fonctionnement d'une telle machine M. En particulier on explicitera le mot écrit sur la bande à un instant quelconque du calcul.
2) Donner la table de transition de la machine M.
• Donner une machine de Turing qui accepte le langage $L = \{w\tilde{w} \mid w \in \{0, 1\}^*\}$, où $\tilde{w}$ est le miroir de w.
• Donner une machine de Turing qui additionne deux entiers écrits en entrée en notation bâton (base 1).
• Ecrire une machine de Turing qui décale tous les symboles autres que # d'un cran à droite.
• Soit $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_k\}$. Donner une machine de Turing qui, étant donné un mot $w \in A^*$, calcule le suivant dans l'ordre hiérarchique.
• Donner une machine de Turing qui engendre les paires d'entiers (i, j), avec $i, j \geq 1$. (Les paires seront par exemple générées dans l'ordre : $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$ ...)
• On appelle *suite de franchissements* associée à la frontière qui sépare deux cellules de la bande d'une machine de Turing la suite des états dans laquelle la machine se trouve à chaque fois qu'elle vient de franchir cette frontière au cours de l'exécution. Noter que ces franchissements se font alternativement dans un sens ou dans l'autre.
1) Montrer que le temps de calcul d'une machine M est la somme des longueurs des suites de franchissement entre deux cellules quelconques de la bande de M.
2) On considère une machine de Turing M qui au moment où elle accepte un mot a toujours sa tête plus à droite que les cellules du mot initial. Montrer la propriété d'*amnésie* suivante pour M : si M accepte le mot $w_1 w_2$ et que la suite de franchissements entre w_1 et w_2 est la même qu'entre x_1 et x_2 lorsque M prend en entrée le mot $x_1 x_2$, alors M accepte $x_1 w_2$.