Maîtrise et IUP d'informatique.
Examen de calculabilité et complexité

14 décembre 1998
durée **2h30**.
Tous les documents sont autorisés

Les exercices marqués • sont soit faciles soit des applications directes du cours. Les exercices marqués •• sont moyens. L' exercices marqué ••• est plus difficile.

Machines de Turing

1• Construire une machine de Turing à bande infinie à droite qui, sur l'entrée $\$w$, où w est un mot sur un alphabet fini et \$ un symbole qui n'est pas dans l'alphabet, s'arrête avec w comme contenu de bande, placé sur le bord gauche de la bande.

Machines RAM

2• Construire une machine à registres (RAM, RASP ou RAM rudimentaire au choix) qui calcule la fonction $x \rightarrow x^2$.

Décidabilité

3• Etant donnée M une machine de Turing dont l'alphabet des entrées est $\{0,1\}$. Montrer que l'on ne peut pas décider si cette machine accepte le mot 0101.
4• Etant donnés M une machine de Turing, w un mot d'entrée, et q un état de M. Montrer que l'on ne peut pas décider si M, en travaillant sur w, passe par l'état q.
5• Etant donné un programme P, montrer que l'on ne peut pas décider si P boucle sur toute entrée w.
6•• On dira que deux programmes P_1 et P_2 ont des comportements opposés sur l'entrée w ssi (P_1 boucle sur w et P_2 s'arrête sur w), ou bien (P_1 s'arrête sur w et P_2 boucle sur w). Etant donnés deux programmes P_1 et P_2, montrer que l'on ne peut pas décider si P_1 et P_2 ont des comportements opposés sur toute entrée.

Problème NP-complet

7••• Soit G un graphe non orienté. Un stable est une partie S des sommets de G telle que toute arête de G a *au plus* une extrémité dans S. La taille de S est le nombre de sommets de S. Le *problème du stable* est le suivant :
donnée : un graphe G, un entier k
question : G admet un stable de taille k ?
Montrer que le problème du stable est NP.
Montrer ensuite qu'il est NP-complet. On pourra pour cela réduire 3-FNC-SAT au problème du stable de la façon suivante : à toute formule $F = C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_k$, où $C_i = x_{i,1} \vee x_{i,2} \vee x_{i,3}$ est une clause avec $x_{i,j}$ est un littéral (p ou $\neg p$, avec p variable propositionnelle), on associe un graphe où chaque $x_{i,j}$ est un sommet et qui admet les arêtes suivantes :

- deux sommets qui correspondent à des littéraux d'une même clause sont reliés.
- deux sommets qui correspondent à des littéraux de deux clauses distinctes sont reliés ssi les littéraux sont opposés.